Теорема. Если граница Γ области D удовлетворяет условию

$$|\theta(s_1)-\theta(s_2)|<K\,(s_1-s_2)^{\lambda},$$

то полиномы Бибербаха удовлетворяют неравенству

$$|f(z)-\Pi_n(z)|<\frac{C(\varepsilon)}{n^{\lambda-\varepsilon}}$$

Доказательство. Производная $f'(z)$ удовлетворяет условию

$$|f'(z_1)-f'(z_2)|<M\,|z_1-z_2|^{\lambda},$$

поэтому можно подобрать $P_n(z)$ так, что

$$|f'(z)-P_n'(z)|<\frac{C_3}{n^{\lambda-\eta}}$$

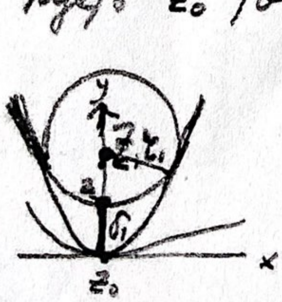
$$|f(z)-P_n(z)|<\frac{C_3}{n^{\lambda-\eta}} \qquad P_n(0)=0,\ P_n'(0)=1$$

Полагая $\pi_n(z)=P_n(z)-\Pi_n(z)$ получим

$$I_n=\iint_D|\pi_n'(z)|^2\,d\sigma<\frac{2SC_3^2}{n^{2(\lambda-\eta)}}$$

Пусть z_0 точка границы. Впишем в область параболу

$$y=k_1|x|^{1+\lambda}.$$



r_1 и δ_1 связаны соотношением

$$\delta_1\sim(C\,r_1)^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}},$$

кроме того

$$r_2\sim\delta_1$$

$$r_{m+1}\sim\left[C^{\frac{(1+\lambda)^2}{2\lambda(1-\lambda)}}r_1\right]^{\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^m}\cdot C^{\frac{1+\lambda}{2\lambda}}$$

Точку z_1 берем так, чтобы

$$q = e^{\frac{(1+\lambda)^2}{2\lambda(1-\lambda)}} r_1 < 1$$

Выбирая m точек $z_1, z_2, \dots z_m$ имеем

$$|\Pi_n(z_k)| \le \Pi_n(z_{k-1}) + \sqrt{\log(en)\,\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z-z_{k-1}|\le r_{k-1}} |\Pi_n'(z)|^2 d\sigma}$$

$$|\Pi_n(z_{m+1})| \le \Pi_n(z_1) + \sqrt{\log en}\sum\Big(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z-z_{k-1}|\le r_{k-1}}|\Pi_n'(z)|^2 d\sigma\Big)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \Pi_n(z_1) + \sqrt{\log en \cdot m \cdot \frac{q}{\pi} J_n} \qquad (1)$$

$$|\Pi_n(z_0)| \le |\Pi_n(z_{m+1})| + a_1\rho + \dots + a_n\rho^n \le$$

$$\le |\Pi_n(z_{m+1})| + \Big[\sum \frac{1}{k}\Big(\frac{\rho}{r_{m+1}}\Big)^{2k}\cdot\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z-z_{m+1}|\le r_{m+1}} |\Pi_n'(z)|^2 d\sigma\Big]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq |\pi_m(z_{m+1})| + \sqrt{\frac{1}{\pi} J_n \log en}\left(\frac{\rho}{r_{m+1}}\right)^n \quad (2)$$

$$\rho \sim r_{m+1} + \delta_{m+1}$$

$$\frac{\rho}{r_{m+1}} \sim 1 + C^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} r_{m+1}^{\frac{2\lambda}{1-\lambda}}$$

Складывая (1) и (2) получаем

$$|\pi_n(z_0)| \leq |\pi_n(z_1)| +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi} J_n \log en}\left\{\sqrt{m} + \left(1 + C^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} r_{m+1}^{\frac{2\lambda}{1-\lambda}}\right)^n\right\} \sim$$

$$\sim |\pi_n(z_1)| + \sqrt{\frac{2}{\pi} J_n \log en}\left\{\sqrt{m} + \left(1 + C^{\frac{(1+\lambda)^2}{2\lambda(1-\lambda)}} q^{\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^m}\right)^n\right\}$$

полагая, например,

$$m = 2\,\frac{\log\log n}{\log\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$$

получим

$$|\pi_n(z_0)| \leq |\pi_n(z_1)| + \sqrt{\frac{4}{\pi \log\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} J_n \log en \cdot \log\log n}$$

Имея в виду оценку для J_n получим

$$|\pi_n(z)| < \frac{C}{n^{\lambda-\eta}},$$

что доказывает теорему.

Если в области удовлетворяющей усло-
вию радиуса

$$|P_n(z)| < M,$$

то

$$|P_n'(z)| < CMn^{\frac{2}{1+\lambda}},$$

где C константа зависящая от области.

$$|P_n'(z_0)| < \frac{nM}{r}\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^{n}$$

$$\sim \frac{nM}{r}(1+$$