

Виктор Соломонович Рябенский

(20.03.1923 – 22.02. 2018)

Профессор Виктор Соломонович Рябенский, доктор физико-математических наук, крупнейший специалист в области вычислительной математики и один из создателей ее основ, родился в Москве в семье служащих Соломона Абрамовича и Берты Павловны Рябенских. В 1940 году он поступил на механико-математический факультет МГУ, но обучение прервала война. Несколько раз побывав на волоске от смерти и встретив Победу в звании гвардии сержанта, механик-водитель Рябенский вернулся на родной мехмат, с успехом закончил его в 1949 году, и был принят в аспирантуру. Талант будущего классика отечественной вычислительной математики был замечен и поддержан Иваном Георгиевичем Петровским, под руководством которого Виктор Соломонович работал сначала над дипломом, а затем и над кандидатской диссертацией. Именно эта диссертация с длинным, узкоспециальным в те годы названием "Об устойчивости конечноразностных схем и о применении метода конечных разностей к решению задачи Коши для систем уравнений с частными производными", защищенная в МГУ в 1952 г., открыла вычислительному сообществу новое имя и через некоторое время по праву позволила вписать Виктора Соломоновича Рябенского в славную когорту основателей теории разностных схем.

Так сложилось, что молодой специалист В.С. Рябенский начал свой трудовой путь практически в одно время с образованием секретного в то время Отделения прикладной математики (ОПМ), являвшегося тогда подразделением Математического института. Возглавлял отделение Мстислав Всеволодович Келдыш. ОПМ, созданное для решения вычислительных задач, связанных с атомной и термоядерной энергетикой, исследованием космического пространства и др., разрасталось благодаря привлечению молодых талантливых ученых. М.В. Келдыш брал на работу тех и только тех, кто действительно мог справиться с абсолютно новыми для математики и физики задачами. Был замечен и Виктор Соломонович, работавший тогда во Всесоюзном заочном институте железнодорожного транспорта. Он был приглашен в 1957 году по рекомендации Сергея Всеволодовича Яблонского в расчетное бюро ОПМ. Именно в Институте прикладной математики (ИПМ) им. М.В. Келдыша РАН – современное название ОПМ – В.С. Рябенский окончательно сформировался как ученый, получивший мировое признание.

Отметим, что среди больших друзей Виктора Соломоновича были изобретатель многосеточного метода Радий Петрович Федоренко и автор метода частиц Владимир Федотович Дьяченко – их письменные столы стояли в одной комнате.

Развитием результатов кандидатской диссертации стала написанная в 1956 году Виктором Соломоновичем совместно с Алексеем Федоровичем Филипповым монография "Об устойчивости разностных уравнений", [1]. Теперь уже общепризнанное классическое исследование, фактически первая в мире книга об устойчивости разностных схем. Вычислительная математика, наука столь же древняя, как и сама математика, в те годы переживала свое второе рождение. Массовые расчеты с использованием «разностных схем» при решении задач по ядерной проблеме, освоения космоса, самолетостроения и др., проводимые как на электромеханических арифмометрах, так и на первых ЭВМ, привели к коренному пересмотру и переоценке сложившихся представлений о методах приближенных вычислений. Число точек сетки по пространству в дискретных моделях стало существенно превышать десятки и сотни

(сейчас уже не удивляют объемы в 10^{10} точек). Это потребовало разработки соответствующей теоретической базы вычислительных алгоритмов. Настоящим проклятием для вычислителей была (и остается) неустойчивость численного решения, проявляющаяся в быстром нефизичном росте искомой функции в одной или сразу многих точках. Причем, как в динамических задачах, так и в стационарных, решаемых методами релаксации. Поэтому теория и рецепты, предложенные в [1], оказались для специалистов как нельзя кстати. При этом В.С. Рябенкий (как и, по-видимому, А.Ф. Филиппов) в то время не имел никакого отношения к практическим расчетам: будучи «чистым» математиком, он рассмотрел разностную схему как некую абстрактную модель и смог найти и исследовать все основные особенности поведения этой модели. Это яркий пример глубокой врожденной математической интуиции, пронизывающей все научные результаты Виктора Соломоновича.

Конечно, работы по исследованию разностных уравнений велись уже задолго до выхода [1]. Например, замечательная работа Куранта, Фридрихса и Леви 1928 г., была переведена в журнале «Успехи математических наук» еще до войны [2]. Но это были лишь эпизодические, «немодные» публикации, в том числе из-за естественных причин скрытности практических расчетов и использования первых ЭВМ, к которым допускался строго ограниченный круг специалистов. Этим, по-видимому, объясняется и то, что математик Питер Лакс (Peter Lax), работая в 1940 – 50-е годы эпизодически в Лос-Аламосской лаборатории по Манхэттенскому проекту и тоже занимаясь исследованием вопросов решения краевых задач с помощью конечноразностных аппроксимаций, опубликовал свою теорию только в 1956 г. [3]. Жаргонная, но легко запоминаемая студентами формулировка одного из основных результатов [1], [3] – «из аппроксимации и устойчивости следует сходимость» – имеет сегодня несколько названий: теорема Рябенкого, теорема Рябенкого-Филиппова, теорема Лакса, теорема Лакса-Рябенкого.

Надо отметить, что в ИПМ в те годы сформировались коллективы ученых для работ по многим «закрытым» прикладным проблемам, требующих, зачастую, решения очень схожих теоретических вопросов, составивших впоследствии основы многих численных методов. Обмен «открытыми» результатами и жаркие обсуждения происходили на научных семинарах и защитах диссертаций. Безусловно, это вносило дух соревновательности, тем более, что один из отделов, где тоже велись исследования по теории устойчивости разностных схем, возглавлял Александр Андреевич Самарский — будущий академик РАН. У Виктора Соломоновича и Александра Андреевича сложились долгие доверительные отношения двух математиков, дороживших мнениями друг друга, особенно, когда речь шла о научных результатах. Возможно, этому способствовало и то, что оба они ушли добровольцами на фронт со студенческой скамьи – рядовым и ополченцем, и, чудом оставшись в живых, снова вернулись в свой родной МГУ.

Начальный этап работы Виктора Соломоновича в ИПМ проходил в тесном сотрудничестве с Сергеем Константиновичем Годуновым, будущим академиком РАН. Ими была предпринята попытка теоретического осмысления и оформления опыта численного решения сложных задач математической физики, накопленного к тому времени в ряде отделов ИПМ. Результатом этого научного сотрудничества стала также получившая широкую известность монография «Введение в теорию разностных схем» [4]. Ее дополненное переиздание [5] является и по сей день одним из основных введений в предмет. Главное научное содержание предложенной теории концентрируется вокруг фундаментального понятия устойчивости вычислительных алгоритмов. Опираясь на четкие математические определения аппроксимации и устойчивости и разъясняя примерами их содержательный смысл, они выработали систему классификации, отбора и

рецепты построения разностных схем для типичных задач математической физики. При этом, помимо уже «традиционного» анализа устойчивости в духе признака Куранта-Фридрихса-Леви, в монографии был представлен анализ асимптотического накопления вычислительных погрешностей в эволюционных разностных схемах, поскольку уже тогда практические расчеты велись с таким количеством операций, что эти асимптотические свойства кардинально влияли на пригодность того или иного алгоритма. Отличительной особенностью также стали результаты анализа влияния краевых условий на устойчивость разностных схем. Начало этим трудным и тонким исследованиям было мотивировано результатами Израиля Моисеевича Гельфанда и Константина Ивановича Бабенко, представленными на конференции в 1956 году, в которых были намечены контуры будущей теории. Однако, последовательное проведение предложенной ими точки зрения оказалось непростым делом. Лишь в результате введения таких новых и непривычных объектов как "спектр семейства операторов" (возникшего во время дискуссий с И.М. Гельфандом, К.И. Бабенко и Эммануилом Эльевичем Шнолем, [6]), а затем и "ядро спектра семейства операторов" ([5]) С.К. Годунову и В.С. Рябенькому удалось придать стройность и конструктивность теории, получить законченные результаты.

Вопрос точности разностных аппроксимаций обобщенных разрывных решений нелинейных гиперболических уравнений (например, при расчете ударных волн в газовой динамике) был и есть ключевой в теории разностных схем. В 1958 г. С.К. Годунов и В.С. Рябенький провели с помощью Натальи Михайловны Гоманьковой ряд численных экспериментов, чтобы, «наконец», разобраться с этим вопросом. Сергей Константинович Годунов вспоминает:

«Эти эксперименты привели к результатам, поставивших нас в тупик. Моя разностная схема с распадами разрывов (классическая «схема Годунова»), имеющая на гладких решениях первый порядок точности $O(h)$, обеспечивала при расчете «обобщенных» решений с ударными волнами погрешность лишь порядка $O(\sqrt{h})$. Мы рассказали об этом на одной из научных конференций, проходившей в МГУ, но не нашли в то время возможности представить эти эксперименты в виде статьи. Тем не менее, интерес к анализу точности в подобных расчётах снова возник и стал активно развиваться уже в семидесятые годы. Появилось большое число разнообразных расчетных методов повышенной точности. Я был знаком с многими изобретателями этих методов, но во время дискуссий с ними мне так и не удалось выяснить, что они понимают под «порядком точности», тогда как в наших исследованиях мы опирались по примеру Сергея Львовича Соболева на понятие слабой сходимости.»

Интересным оказался вклад В.С. Рябенького в задачи интерполяции. Для анализа устойчивости систем разностных уравнений по начальным условиям он сконструировал алгоритм локального полиномиального восполнения сеточной функции с заданной гладкостью. Затем на основе этого алгоритма был построен метод гладкой локальной интерполяции на неравномерных прямоугольных сетках, известный как "локальные сплайны Рябенького" и применяемый в ряде вычислительных алгоритмов и в теории.

Завершая описание научных исследований Виктора Соломоновича в 1950-х и начале 1960-х, можно сказать, что монографиями [1], [4], [5] были, по существу, определены основные направления теоретического анализа разностных схем - важнейшего объекта вычислительной математики и инструмента современного математического моделирования. Учебник [5] интересен еще и тем, что там приведены библиографические комментарии, раскрывающие истоки многих направлений, ставших уже классическими разделами вычислительной математики.

Следующий этап научного творчества Виктора Соломоновича, продолжающийся и по сей день в работах его учеников, дал вычислительной математике новое понятие – разностный потенциал (РП), а также целую гамму приложений – от численных методов решения краевых задач математической физики до алгоритмов активного экранирования шума. В начале 1990-х годов Алексей Валериевич Забродин, заведующий одним из отделов ИПМ, близкий друг В.С. Рябенского, стоявший у истоков разработки отечественных многопроцессорных вычислительных систем и параллельных вычислительных технологий, предложил Виктору Соломоновичу рассмотреть проблему активного экранирования физических полей. Эта тема сразу увлекла В.С. Рябенского, – он интуитивно почувствовал, что разностные потенциалы здесь могут оказаться весьма полезным инструментом. Ведь след функции на сеточной границе несет всю необходимую и достаточную информацию для восстановления в защищаемой области именно того поля, которое генерируется внешними источниками (а значит, теория РП позволяет это поле смоделировать, чтобы затем вычесть). Конечно, при создании своего алгоритма Виктор Соломонович думал, прежде всего, о практической реализуемости математической модели с помощью доступных физических устройств и измерений. Например, подходы, связанные с необходимостью использования информации о свойствах среды внутри защищаемой области, сразу отбраковывались. Прошло несколько месяцев, пока были получены желаемые формулы, оказавшиеся настолько простыми, что трудно поверить в те возможности, которые они открывают. Эти первые теоретические результаты В.С. Рябенский опубликовал в двух коротких заметках [70], [71]. Они положили начало новому направлению в проблеме активной защиты заданной области пространства от влияния внешних источников шума и содержат основную конструкцию использования разностных потенциалов типа Коши для этих целей.

Виктор Соломонович обладал редким даром «зажигать» своими идеями студентов и молодых коллег, увлекательно рассказывая о возможностях и нерешенных проблемах. При этом он совершенно не жалел времени на общение с ними и щедро делился богатейшим научным и житейским опытом. С абсолютной ответственностью подходя к выбору направления научной деятельности своего молодого коллеги, он создает вокруг себя ту неповторимую атмосферу увлеченности и творчества, которая дает возможность полного раскрытия способностей будущего ученого. Для Виктора Соломоновича и для его супруги Натальи Петровны Рябенской, живших общими интересами, каждый ученик становился очень близким человеком. Это одна из причин, почему у В.С. Рябенского не так уж много учеников, как могло бы быть (другая причина в том, что в перестроечное время большое число его способных студентов попросту ушло из науки). Около десяти кандидатских диссертаций защищено под его руководством, а двое его учеников впоследствии стали докторами наук. Созданная Виктором Соломоновичем научная школа представлена его учениками, а также учениками его учеников, работающими как в России, так и за рубежом — в Великобритании, Германии, Израиле и США. Идеи и методы, предложенные Виктором Соломоновичем, получили дальнейшее существенное развитие в теоретических и прикладных исследованиях, которые проводятся в университетах, правительственных лабораториях и научных центрах крупных промышленных компаний.

Виктор Соломонович преподавать начал очень рано, еще 1950-х годах после окончания аспирантуры, полностью его педагогический талант лектора и преподавателя раскрылся позднее – за более чем 30-летний период работы в МФТИ на кафедре вычислительной математики. Он создал совершенно оригинальный курс лекций по основам и методам вычислительной математики, многие главы которого являются

авторскими. Работа над лекциями и книгой [4] привела к появлению учебного пособия [5], ставшего уже классическим учебником по этой ветви вычислительной математики и переведенного на многие языки. Итогом многолетнего преподавательского труда являются учебники [90] и [91] (в соавторстве с С.В. Цынковым). Опыт семинарских занятий также нашел отражение в созданном коллективом сотрудников кафедры и студентов под научным руководством В.С. Рябенского лабораторном практикуме [92] по основам вычислительной математики с программами для персонального компьютера. Теория разностных потенциалов изложена в монографиях [93], [94], содержащих также многочисленные и обновляемые с каждым новым изданием результаты по применению РП к задачам математической физики (1987, 2002, 2010 гг.), см. также [95] – перевод первого издания [94]. В общей сложности В.С. Рябенский опубликовал более десяти учебников и монографий, а также более ста сорока научных работ в отечественных и зарубежных журналах.

В.С. Рябенский являлся профессором Московского физико-технического института (с 1970 г.), главным научным сотрудником Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Он заслуженный деятель науки РФ (2005 г.) и лауреат премии имени академика И.Г. Петровского (2007 г.), присужденной Президиумом РАН за книгу [94]. В разные периоды на протяжении многих лет действовали научные семинары, руководимые В.С. Рябенским. В 1998 г. в рамках международной конференции ICOSAHOM'98 была организована секция в честь 50-летия научной карьеры Виктора Соломоновича и его выдающегося вклада в развитие вычислительной математики. В 2013 г. в Москве была проведена международная конференция «Разностные схемы и их приложения», посвященная 90-летию Виктора Соломоновича, доклады на которой вошли в специальный выпуск журнала «Applied Numerical Mathematics» [96].

Кратко подводя итоги того вклада в прикладную математику, который внес Виктор Соломонович, мы перечисляем следующие понятия, прочно связанные у нас с его именем: «Теорема Сходимости» Рябенского-Филиппова, «Спектр Семейства Разностных Операторов» Годунова-Рябенского, «Гладкая Локальная Интерполяция» Рябенского, «Разностный Потенциал» Рябенского, «Алгоритм Активного Шумоподавления» Рябенского.

Виктор Соломонович прожил почти девяносто пять лет и до последних дней был увлечен любимым делом – математикой. Он всегда сохранял оптимизм, бодрость и удивительную ясность мышления. Искренность, принципиальность и доброжелательность Виктора Соломоновича располагали к нему всех, кто с ним общался. У всех, кому посчастливилось провести с Виктором Соломоновичем время по разным поводам за дружескими разговорами и встречами в стенах ИПМ и не только, на всю жизнь остаются в памяти его воспоминания о военных эпизодах, о его друзьях и коллегах – искренние и эмоциональные, с яркими характеристиками. Все, знавшие Виктора Соломоновича, испытывали к нему самые добрые и благодарные чувства, и безусловно любили его, это ведь случается далеко не с каждым – быть светом духовного костра, отблеск которого сопровождает до сих пор знавших Виктора Соломоновича.

Библиография:

- [1] В.С.Рябенский, А.Ф.Филиппов "Об устойчивости разностных уравнений", Москва, Гостехиздат, 1956, 174 с.
- [2] Курант Р., Фридрихс К., Леви Г., О разностных уравнениях математической физики, УМН, 8 (1940), 125—160.
- [3] Лакс П., Рихтмайер Р. (Lax P. D., Richtmyer R. D.) Survey of the stability of linear finite difference equations, Comm. Pure Appl. Math., 9, (1956) 267-293.
- [4] С.К. Годунов, В.С. Рябенский "Введение в теорию разностных схем", М., Физматлит., 1962,
- [5] Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука, 1973; 2-е изд. 1977.
- [6] Годунов С.К., Рябенский В.С. «Спектральные признаки устойчивости краевых задач для несамосопряженных разностных уравнений», Успехи мат. Наук, 1963, т. 18, вып. 3.
- [7] А.Н. Малышев, «Введение в вычислительную линейную алгебру», Новосибирск. Наук, 1991, С.К. Годунов, Приложение, с. 204-223.
- [8] Loyd. N. Trefethen, Mark Embree. "Spectra and pseudospectra. Princeton University Press, 2005
- [9] С.К. Годунов, Ю.Д. Манузина, М.А. Назарьева. «Экспериментальный анализ сходимости приближений Годунова к обобщенным решениям газовой динамики», Журн. Выч. Мат. и Мат. Физ. 2011. Т. 51, N 1. С. 96–103.
- [10] Рябенский В.С. Некоторые вопросы теории разностных краевых задач. — Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. — М., 1969.
- [11] Белянков А.Я. К развитию метода внутренних граничных условий в теории разностных схем. — Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МФТИ, 1977.
- [12] Резник А.А. Аппроксимация поверхностных потенциалов эллиптических операторов разностными потенциалами // Докл. АН СССР. — 1982. - Т. 263, №6. - С. 1318-1320.
- [13] Резник А.А. Аппроксимация поверхностных потенциалов эллиптических операторов разностными потенциалами и решение краевых задач. — Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МФТИ, 1983.
- [14] Федоренко Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. - 1961. - Т. 1, №5. - С. 922-927.
- [15] Рябенский В.С. Общая конструкция разностной формулы Грина на основе понятия четкого разностного следа. — М., 1983. — (Препр. / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР; № 15).
- [16] Рябенский В.С. Обобщенные проекторы Кальдерона и граничные уравнения на основе концепции четкого следа // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 270, №2.-С. 288-292.
- [17] Рябенский В.С., Граничные уравнения с проекторами, УМН, 40:2(242), 121–149, 1985.
- [18] Лазарев М.И. Потенциалы линейных операторов //ДАН СССР. 1987. Т. 292, № 5. С. 1045-1047.
- [19] Софронов И.Л. Развитие метода разностных потенциалов и применение его к решению стационарных задач дифракции. — Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МФТИ, 1984.
- [20] Резник А. А., Рябенский В. С, Софронов И. Л., Турчанинов В. И. Об алгоритме метода разностных потенциалов для численного решения редуцированных на границу краевых задач // ЖВМ и МФ. — 1985. — Т. 25, №10.-С. 1496-1505.
- [21] И.Л. Софронов, “Численный итерационный метод решения регулярных эллиптических задач”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 29:6 (1989), 923–934
- [22] Рябенский В.С, Софронов И.Л. Численное решение пространственных внешних задач для уравнений Гельмгольца методом разностных потенциалов // Численное моделирование в аэрогидродинамике. — М.: Наука, 1986.

- [23] Зиновьев Е.В. Решение внешних задач для уравнения Гельмгольца. Приложение к расчету осесимметричных элементов машин. — Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1990.
- [24] Рябенский В.С., Цынков С. В. Искусственные краевые условия для численного решения внешних задач вязкого обтекания. — М., 1993. — (Препр. / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР; №45 и №46).
- [25] Ryaben'kii V.S., Tsynkov S.V. Artificial boundary conditions for the numerical solution of external viscous flow problems // SIAM J. Numer. Anal. - 1995. - V. 32. - P. 1355-1389.
- [26] Рябенский В.С., Торгашов В.А. Метод разностных потенциалов для численного решения внутренней задачи о плоском течении вязкой несжимаемой жидкости // Доклады РАН. — 1994. — Т. 337. — С. 450-453.
- [27] Рябенский В.С., Торгашов В.А. Безытерационный метод численного решения неявной разностной схемы для системы Навье-Стокса в переменных функциях тока-вихрь // Матем. моделир. — 1996. — Т. 8, № 10. — С. 100-112.
- [28] Мишков М.Н. Построение искусственных граничных условий с использованием предельного поглощения. — Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: ИММ, 1997.
- [29] Мишков М.Н., Рябенский В.С. Исследование искусственных граничных условий, построенных с помощью периодизации и введения малого параметра для задач дозвукового обтекания // Матем. моделирование. 1998. Т. 10, №9. С. 87–98.
- [30] Каменецкий Д.С. Разностные потенциалы и параметризация решений однородных разностных уравнений // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38, №11. С. 1829-1843.
- [31] Каменецкий Д. С. Разностные обобщенные операторы Пуанкаре-Стеклова и потенциалы с плотностью из пространства скачков // ЖВМ и МФ. 1999. Т. 39, №8. С. 1328-1376.
- [32] S.V. Tsynkov, On the definition of surface potentials for finite-difference operators, Journal of Scientific Computing, Vol. 18, No. 2, (2003) pp. 155-189.
- [33] S. V. Tsynkov, An application of nonlocal external conditions to viscous flow computations, J. Comput. Phys., 116 (1995) pp. 212-225.
- [34] S. V. Tsynkov, E. Turkel, and S. Abarbanel, External flow computations using global boundary conditions, AIAA Journal, 34 (1996) pp. 700-706.
- [35] S.V. Tsynkov and V.N. Vatsa, An Improved Treatment of External Boundary for Three-Dimensional Flow Computations, AIAA J., 36 (1998) pp. 1998-2004
- [36] Tsynkov S.V. External Boundary Conditions for three-dimensional problems of computational aerodynamics // SIAM J. Sci. Comp. — 1999. — V. 21. - P. 166-206.
- [37] S.V. Tsynkov, S. Abarbanel, J. Nordström, V. S. Ryaben'kii, and V. N. Vatsa, Global Artificial Boundary Conditions for Computation of External Flows with Jets, AIAA J., 38 (2000) pp. 2014-2022.
- [38] С.В. Цынков, Нелокальные искусственные граничные условия для численного решения задач в неограниченных областях, диссертация на соискание учёной степени д. ф.-м. н., Москва, 2003 (специальность 01.01.07 — вычислительная математика)
- [39] Рябенский В.С. Точный перенос разностных краевых условий. // М.: Функц. анализ и его прилож. Т. 24. Вып. 3, 1990, 90-91.
- [40] Софронов И.Л. Условия полной прозрачности на сфере для волнового уравнения в пространстве // Докл. РАН. — 1992. — Т. 326 (6). — С. 453-457
- [41] И.Л. Софронов, Условия полной прозрачности для волнового уравнения. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, №76, 1993.
- [42] Dedner, A.; Kroener, D.; Sofronov, I.; Wesenberg, M. Transparent boundary conditions for MHD simulations in stratified atmospheres, J. Comp. Phys. Vol. 171 (2001) 448—478.
- [43] Ballmann J.; Britten G.; Sofronov I. Time-accurate inlet and outlet conditions for unsteady transonic channel flow, AIAA Journal, Vol. 40 (2002), No. 2., 1745—1754.

- [44] Arnold A.; Ehrhardt M.; Sofronov I. Discrete transparent boundary conditions for the Schroedinger equation: Fast calculation, approximation, and stability, *Comm. Math. Sci.* 1 (2003), 501—556.
- [45] И.Л. Софронов, “О применении прозрачных граничных условий в задачах аэроакустики”, *Матем. моделирование*, 19:8 (2007), 105–112.
- [46] Н.А. Зайцев, И.Л. Софронов, “Применение прозрачных граничных условий для решения двумерных задач упругости с азимутальной анизотропией”, *Матем. моделирование*, 19:8 (2007), 49–54.
- [47] Sofronov I. L., N. A. Zaitsev, Numerical generation of transparent boundary conditions on the side surface of a vertical transverse isotropic layer, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 234 (2010), pp. 1732-1738
- [48] И.Л. Софронов, Дифференциальная часть прозрачных граничных условий для некоторых гиперболических систем уравнений второго порядка // Докл. РАН. — 2009. — Т. 426 (5). — С. 602-604
- [49] Турчанинов В.И. Свойство лагун решений разностного аналога пространственного волнового уравнения // Докл. РАН. — 2000. — Т. 375, №4.
- [50] Рябенский В.С, Турчанинов В.И., Цынков С.В. Использование лагун решений 3D-волнового уравнения для вычисления решения задачи Коши на больших временах // Матем. моделирование. — 1999. — Т. 11, №12.-С. 113-126.
- [51] Рябенский В.С, Турчанинов В. И., Цынков С.В., Неотражающие искусственные граничные условия для замены отбрасываемых уравнений с лагунами // Матем. моделирование. 2000. Т.12, №12. С.108-127.
- [52] V.S. Ryaben’kii, S. V. Tsynkov, and V. I. Turchaninov, Long-Time Numerical Computation of Wave-Type Solutions Driven by Moving Sources, *Appl. Numer. Math.*, 38 (2001) pp. 187-222.
- [53] V.S. Ryaben’kii, S. V. Tsynkov, and V. I. Turchaninov, Global Discrete Artificial Boundary Conditions for Time-Dependent Wave Propagation, *J. Comput. Phys.*, 174 (2001) pp. 712-758.
- [54] S.V. Tsynkov, Artificial Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Unsteady Acoustic Waves, *J. Comput. Phys.*, 189 (2003) pp. 626-650.
- [55] S.V. Tsynkov, On the Application of Lacunae-Based Methods to Maxwell's Equations, *J. Comput. Phys.*, 199 (2004) pp. 126-149.
- [56] H. Qasimov and S. V. Tsynkov, Lacunae Based Stabilization of PMLs, *J. Comput. Phys.*, 227 (2008) pp. 7322-7345.
- [57] Meier, E.T., Glasser, A.H., Lukin, V.S., and Shumlak, U. Modeling open boundaries in dissipative MHD simulation, *J. Comput. Phys.*, 231 (2012) pp. 2963-2976.
- [58] S. Petropavlovsky and S. Tsynkov, Quasi-Lacunae of Maxwell's equations, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 71, No. 4 (2011) pp. 1109-1122.
- [59] S. Petropavlovsky and S. Tsynkov, A Non-Deteriorating Algorithm for Computational Electromagnetism Based on Quasi-Lacunae of Maxwell's Equations, *J. Comput. Phys.*, 231 (2012) pp. 558-585.
- [60] В.С. Рябенский, В.И. Турчанинов, Е.Ю. Эпштейн, Схема композиции алгоритмов для задач в составных областях на базе метода разностных потенциалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2006. - Т. 46, N 10. - С. . 1853-1870.
- [61] Y. Epshteyn, Algorithms Composition Approach based on Difference Potentials Method for Parabolic Problems, *Communications in Mathematical Sciences*, Volume 12 (2014), Number 4, pages 723 – 755
- [62] M. Medvinsky, S. Tsynkov, and E. Turkel, The Method of Difference Potentials for the Helmholtz Equation Using Compact High Order Schemes, *Journal of Scientific Computing*, 53, No. 1 (2012) pp. 150-193.
- [63] M. Medvinsky, S. Tsynkov, and E. Turkel, High Order Numerical Simulation of the Transmission and Scattering of Waves Using the Method of Difference Potentials, *Journal of Computational Physics*, 243 (2013) pp. 305-322.

- [64] S. Britt, S. Tsynkov, and E. Turkel, A High Order Numerical Method for the Helmholtz Equation with Non-Standard Boundary Conditions, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35, No. 5 (2013) pp. A2255-A2292.
- [65] S. Britt, S. Petropavlovsky, S. Tsynkov, and E. Turkel, Computation of singular solutions to the Helmholtz equation with high order accuracy, *Applied Numerical Mathematics*, 93 (2015) pp. 215-241.
- [66] S. Britt, S. Tsynkov, and E. Tukul, Numerical Simulation of Time-Harmonic Waves in Inhomogeneous Media using Compact High Order Schemes, *Communications in Computational Physics*, 9, No. 3 (2011) pp. 520-541.
- [67] E. Turkel, D. Gordon, R. Gordon, and S. Tsynkov, Compact 2D and 3D sixth order schemes for the Helmholtz equation with variable wave number, *Journal of Computational Physics*, 232, No. 1 (2012) pp. 272-287.
- [68] Y.Epshteyn and S.Phippen, High-Order Difference Potentials Methods for 1D Elliptic Type Models, *Applied Numerical Mathematics*, 93 (2015) pp. 69-86.
- [69] J.Albright, Y.Epshteyn and K.R.Steffen, High-Order Accurate Difference Potentials Methods for Parabolic Problems, *Applied Numerical Mathematics*, 93 (2015) pp. 87-106.
- [70] Рябенский В.С. Разностная задача экранирования // *Функциональный анализ и его приложения*. 1995. Т.29. №1, с.70-71.
- [71] Рябенский В.С. Нелинейная задача экранирования // *Успехи мат. наук*, 1995. 50. № 4, 146.
- [72] Вейцман Р.Н., Рябенский В.С. Разностные задачи экранирования и имитации. // *Докл. РАН*. 1997. Т.354. №2. с.151-154.
- [73] Вейцман Р.И., Рябенский В.С. Разностные задачи имитации // *Труды Моск. матем. об-ва.*, т.58, 1997.
- [74] Зиновьев Е.В., Рябенский В.С., Способ активного подавления шума. Патент Рос.Федерации, № 6G01K11/16 (01.2.281001) Гос. институт патентной информации, 1996.
- [75] J. Loncaric, V. S. Ryaben'kii, and S. V. Tsynkov, Active shielding and control of noise // 2001. *SIAM J.* 62(2). 563–596.
- [76] В.С. Рябенский, С.В. Утюжников и С.В. Цынков. Задача активного экранирования для многосвязных областей // *Докл. РАН, Матем.*, 2006. 411. № 2. С. 164-166.
- [77] Ryaben'kii V.S., Tsynkov S.V., Utyuzhnikov S.V. Inverse Source Problem and Active Shielding for Composite Domains. // *Applied Mathematics Letters*. 2007. V.20, №5. p.511-515.
- [78] Ryaben'kii V.S., Tsynkov S.V., Utyuzhnikov S.V. Active Control of Sound with Variable Degree of Cancellation. // *Applied Mathematics Letters*. 2009. V.22. №12. p.1846-1851.
- [79] Рябенский В.С. Идея использования слабого шума для управления подавлением сильного шума в экранируемой подобласти в реальном времени. // *Доклады РАН*. 2010. Т.430. №2. с.166-168.
- [80] Peterson, A. and Tsynkov, S.V. Active Control of Sound for Composite Regions// *SIAM J. of Appl. Math.* 67. 2007. P. 1582-1609.
- [81] Loncaric, J. and Tsynkov, S.V. Optimization of acoustic source strength in the problems of active noise control// *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 63. P. 1141-1183. 2003.
- [82] Loncaric, J. and Tsynkov, S.V. Optimization of power in the problem of active control of sound // *Mathematics and Computers in Simulation*. 65. P. 323-335. 2004.
- [83] Lim H., Utyuzhnikov S.V., Lam Y.W., Turan A., Avis M., Ryaben'kii V.S., Tsynkov S.V. An Experimental Validation of the Noise Control Methodology Based on Difference Potentials. // *AIAA Journal*. 2009. V.47. №4. P.874-884.
- [84] Рябенский В.С. Подавление в реальном времени шума в защищаемой подобласти трехмерного пространства на основе информации от синхронной разведки шумом. // *Доклады РАН*, 2011, Т.439. №3.с.319-322.
- [85] Рябенский В.С. Разностная модель активного экранирования заданной подобласти от шума внешних источников в текущем времени. // *ЖВМ и МФ*. 2011. Т.51. №3. с.480-491.

- [86] Рябенский В.С. Синхронная разведка для управления подавлением внешнего шума в трехмерной подобласти в реальном времени. // ЖВМ и МФ. 2011. Т.51. №10. с.1889-1904.
- [87] Рябенский В.С. Ключевая информация для управления решениями линейных разностных схем в составных областях // Доклады Академии наук. - 2012. - Т. 444, № 4. С. 376-377.
- [88] Рябенский В.С. Математическая модель устройств подавления внешнего шума в подобласти пространства // Математическое моделирование. - 2012. - Т. 24, № 8. - С. 3-31.
- [89] Турчанинов В.И. Основные моменты задачи активной защиты от шума. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, № 29. 2017.
- [90] В.С. Рябенский, Введение в вычислительную математику, М., Физматлит, 1993; второе издание 2000, с. 300; третье издание 2008
- [91] V. S. Ryaben'kii and S. V. Tsynkov, A Theoretical Introduction to Numerical Analysis, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2007.
- [92] Лабораторный практикум - Основы вычислительной математики (учеб. пособие, 194 с.), МФТИ
- [93] Рябенский В.С. Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред. — М.: Наука, 1987.
- [94] Рябенский В. С. Метод разностных потенциалов и его приложения — М.: Наука, 2002; второе издание 2010
- [95] V.S. Ryaben'kii, Method of Difference Potentials and Its Applications, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 30, Springer-Verlag, Berlin 2002
- [96] Applied Numerical Mathematics, 93, Pages 1-294 (July 2015), International Conference Difference Schemes and Applications in Honor of the 90-th Birthday of Professor V. S. Ryaben'kii.