

Современные проблемы математики и механики  
Московский государственный университет  
Москва, 13-15 мая 2019 г.

## Методы гомотопии в задачах построения космических траекторий



Широбоков М.Г., Трофимов С.П., Овчинников М.Ю.  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

# Содержание

- Введение в методы гомотопии
- Проектирование семейств гало-орбит вокруг коллинеарных точек либрации
- Адаптация траекторий перелета к сложным моделям движения
- Оптимизация многовитковых траекторий перелета с малой тягой
- Заключение

# Понятие о гомотопии

Пусть необходимо найти решение уравнения

$$F(x) = 0$$

Параметризуем левую часть  $F(x) \rightarrow H(x, \lambda)$

так, чтобы в крайних точках

$$H(x, 0) = G(x), \quad H(x, 1) = F(x)$$

и чтобы уравнение

$$H(x, 0) = G(x) = 0$$

имело известное решение  $x_0$

# Методы гомотопии

Ищется/аппроксимируется кривая

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda), \lambda \in [0, 1]$$

определяющая семейство решений

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) = 0, \lambda \in [0, 1]$$

Здесь  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  – известно, а  $\mathbf{x}(1)$  – решение исходной задачи, и нужно продолжить решение по параметру  $\lambda$ . Два класса методов продолжения:

- дискретные методы продолжения
- дифференциальные методы продолжения

# Два класса методов продолжения

Для  $\lambda_0 = 0$  знаем  $\mathbf{x}_0$  – решение  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda_0) = 0$ .

## Дискретный метод продолжения:

Пусть известно решение  $\mathbf{x}_i$  для  $\lambda_i = i/N$ , тогда для  $\lambda_{i+1}$  решение  $\mathbf{x}_{i+1}$  уравнения  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda_{i+1}) = 0$  ищем методом Ньютона с начальным условием  $\mathbf{x}_i$ .

## Дифференциальный метод продолжения:

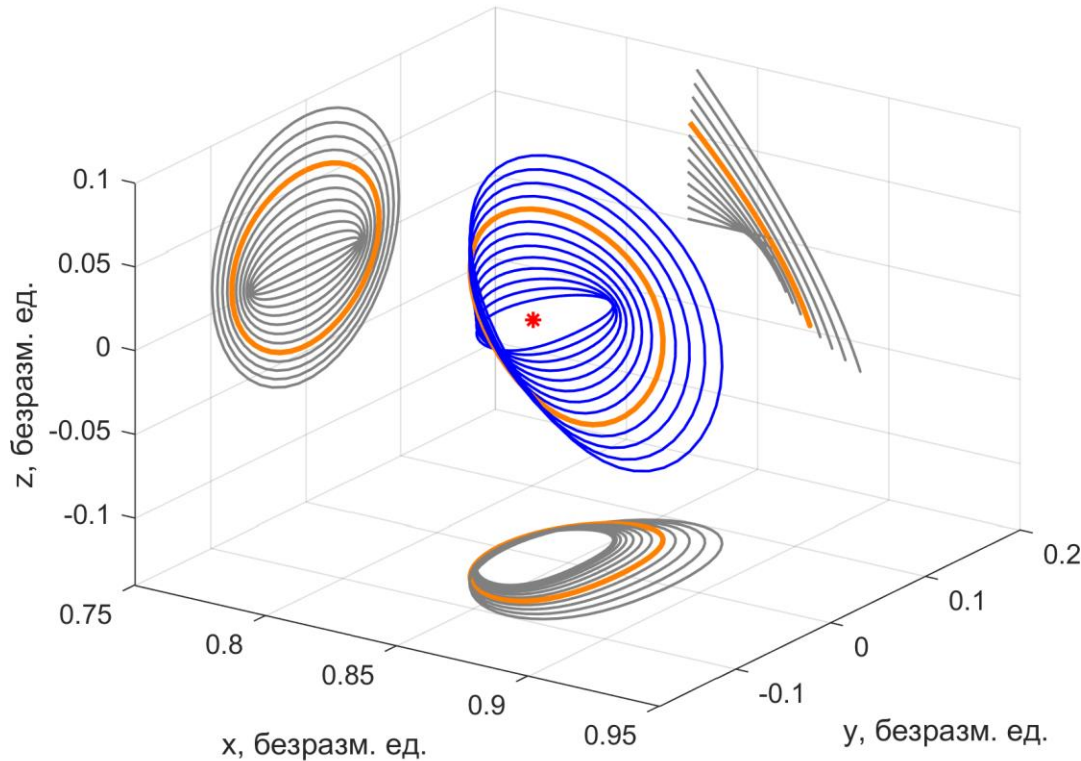
Продифференцируем  $\mathbf{H}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda)$  по  $\lambda$  и получим задачу Коши

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} = - \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \lambda}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

# Проблемы методов гомотопии

- Выбор параметра, функции гомотопии
- Выбор и адаптация шага для дискретного метода продолжения
- Выбор метода решения ОДУ для дифференциальном метода продолжения
- Проблема сходимости
- Точки возврата и бифуркации, ветвление решений

# Северные гало-орбиты вокруг точки L1 системы Земля-Луна



$$x(t) = \sum_{i,j=1}^N \left( \sum_{|k| \leq i+j} x_{ijk} \cos k\theta \right) \alpha^i \beta^j$$

$$y(t) = \sum_{i,j=1}^N \left( \sum_{|k| \leq i+j} y_{ijk} \sin k\theta \right) \alpha^i \beta^j$$

$$z(t) = \sum_{i,j=1}^N \left( \sum_{|k| \leq i+j} z_{ijk} \cos k\theta \right) \alpha^i \beta^j$$

$$(x_0, 0, z_0, 0, \dot{v}_0, 0) \xrightarrow[\text{до } y = 0]{\text{интегрируем}} (x_1, 0, z_1, 0, \dot{v}_1, 0)$$

# Восстановление семейства орбит

1) Выбирается параметр  $\lambda$ , определяющий орбиту в семействе; например  $\lambda = z_{\max}$ .

2) Функция гомотопии:

$$\mathbf{H}((x_0, \dot{y}_0), \lambda) = (\dot{x}_1, \dot{z}_1)$$

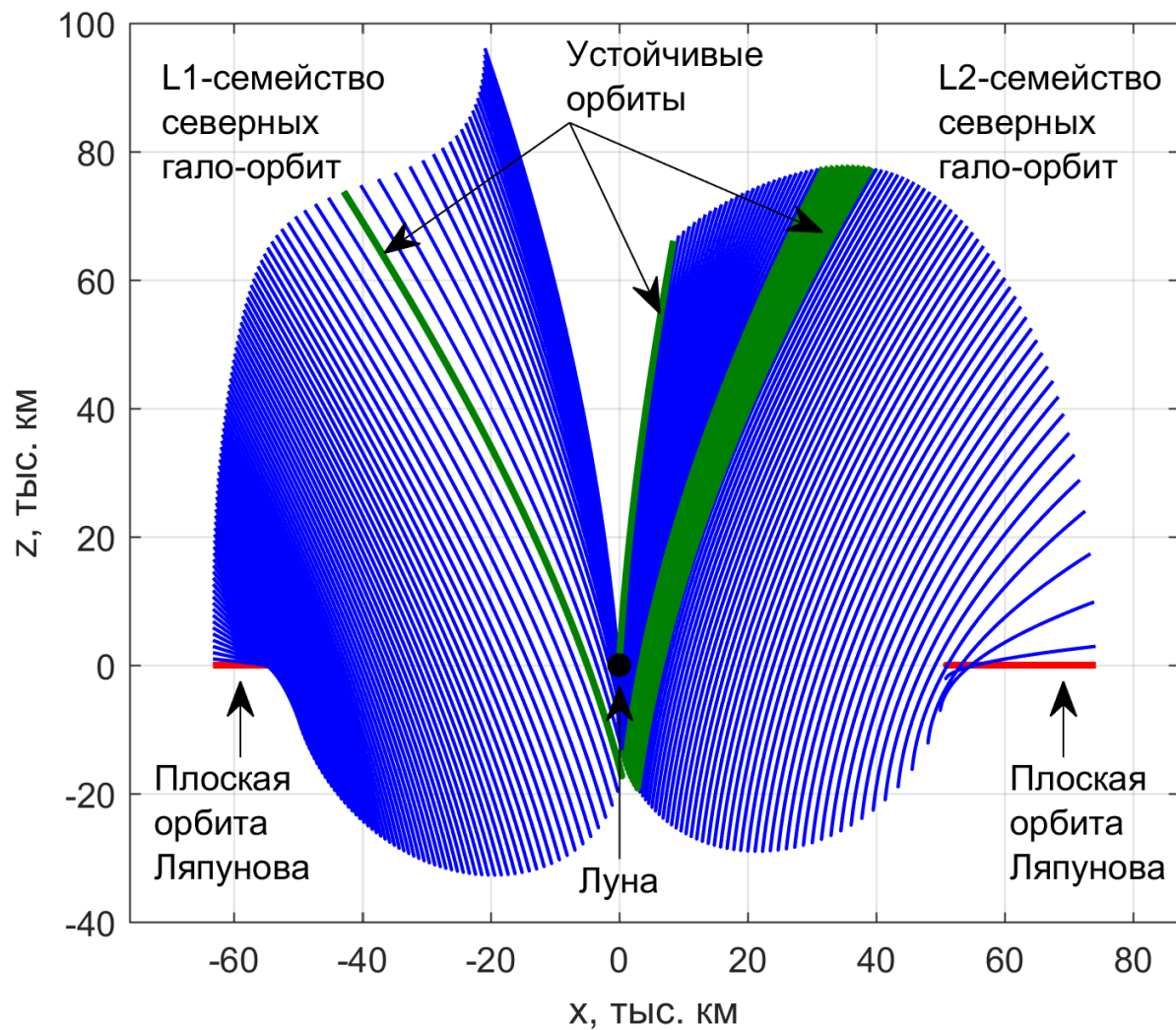
3) С использованием рядов Линдштедта–Пуанкаре и техники дифференциальной коррекции проектируются две близкие по  $\lambda$  орбиты: для  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ .

4) Пусть имеются орбиты с  $\lambda_{i-1}$  и  $\lambda_i$ , оценим с помощью линейной экстраполяции для  $\lambda_{i+1}$  новый вектор  $(x_0, \dot{y}_0)$  и с помощью метода Ньютона уточним его решив уравнение

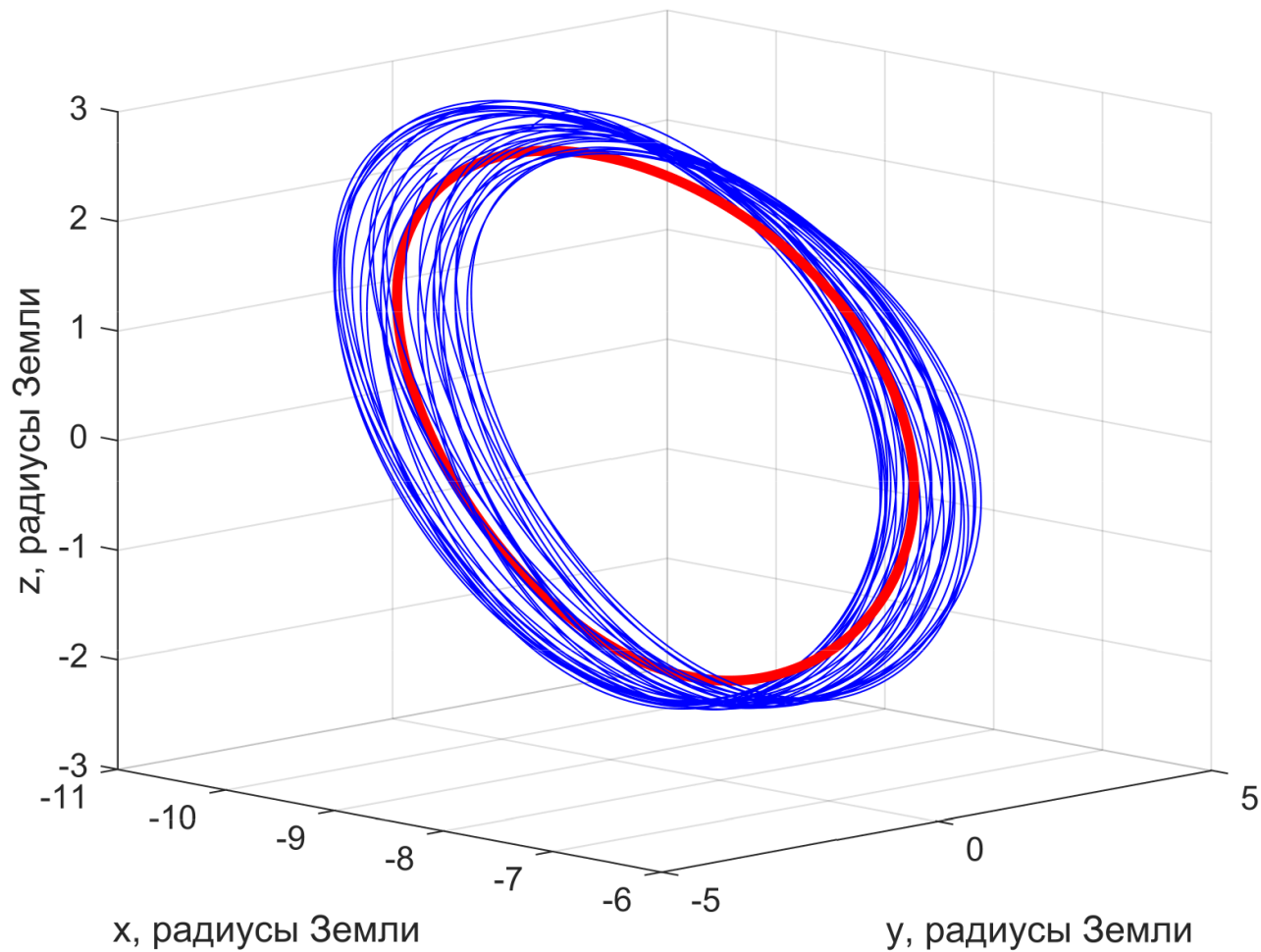
$$\mathbf{H}((x_0, \dot{y}_0), \lambda_{i+1}) = 0$$



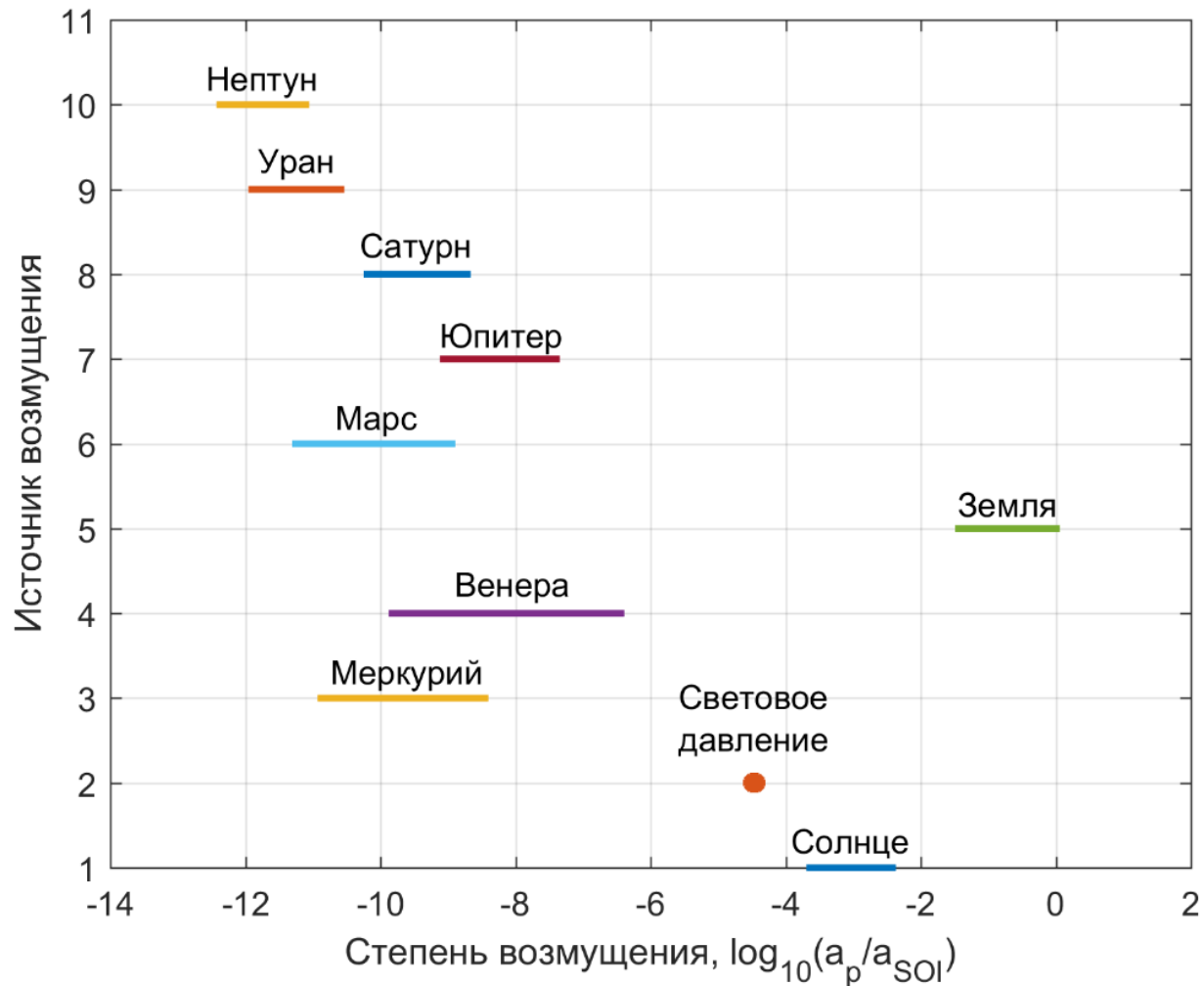
# L1- и L2-семейства гало-орбит в системе Земля-Луна



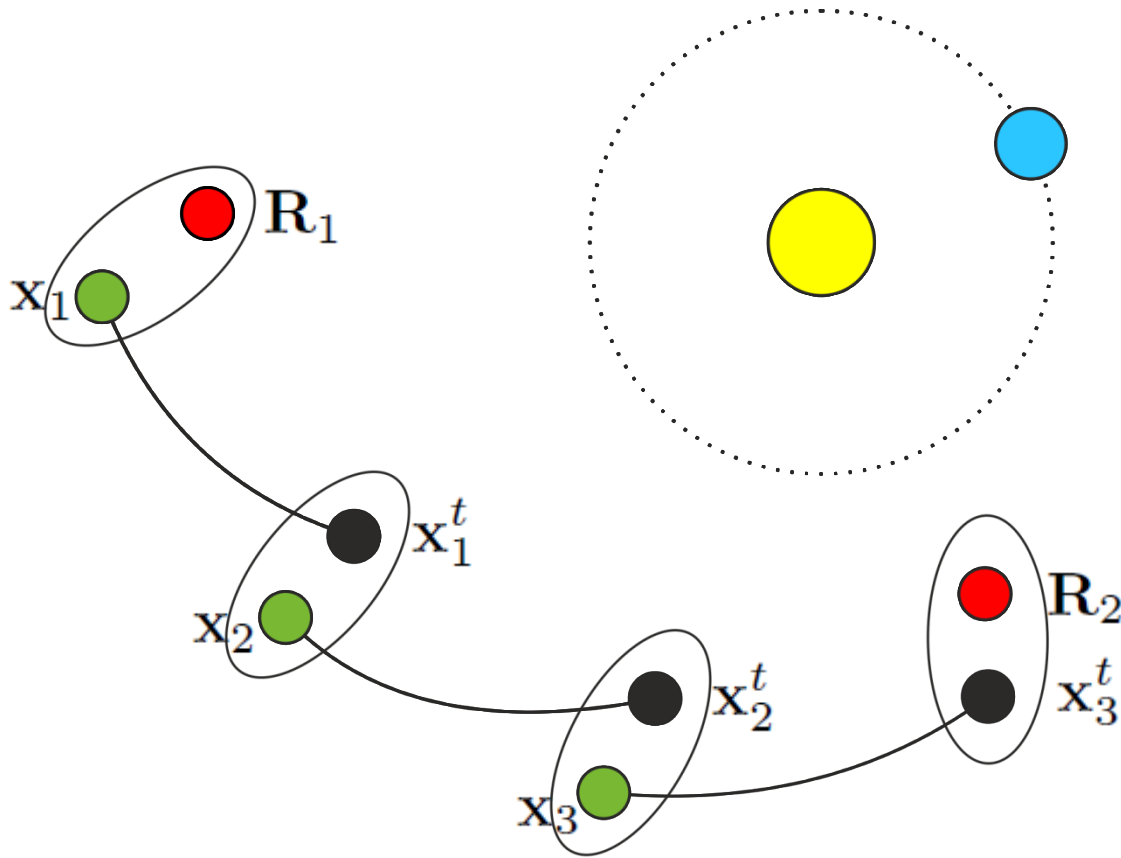
# Простая vs реалистичная модель



# Уровни возмущений на гало-орбитах от различных источников



# Метод параллельной пристрелки



Переменные

$$x_1, x_2, x_3$$

Уравнения:

$$R_1 - r_1 = 0$$

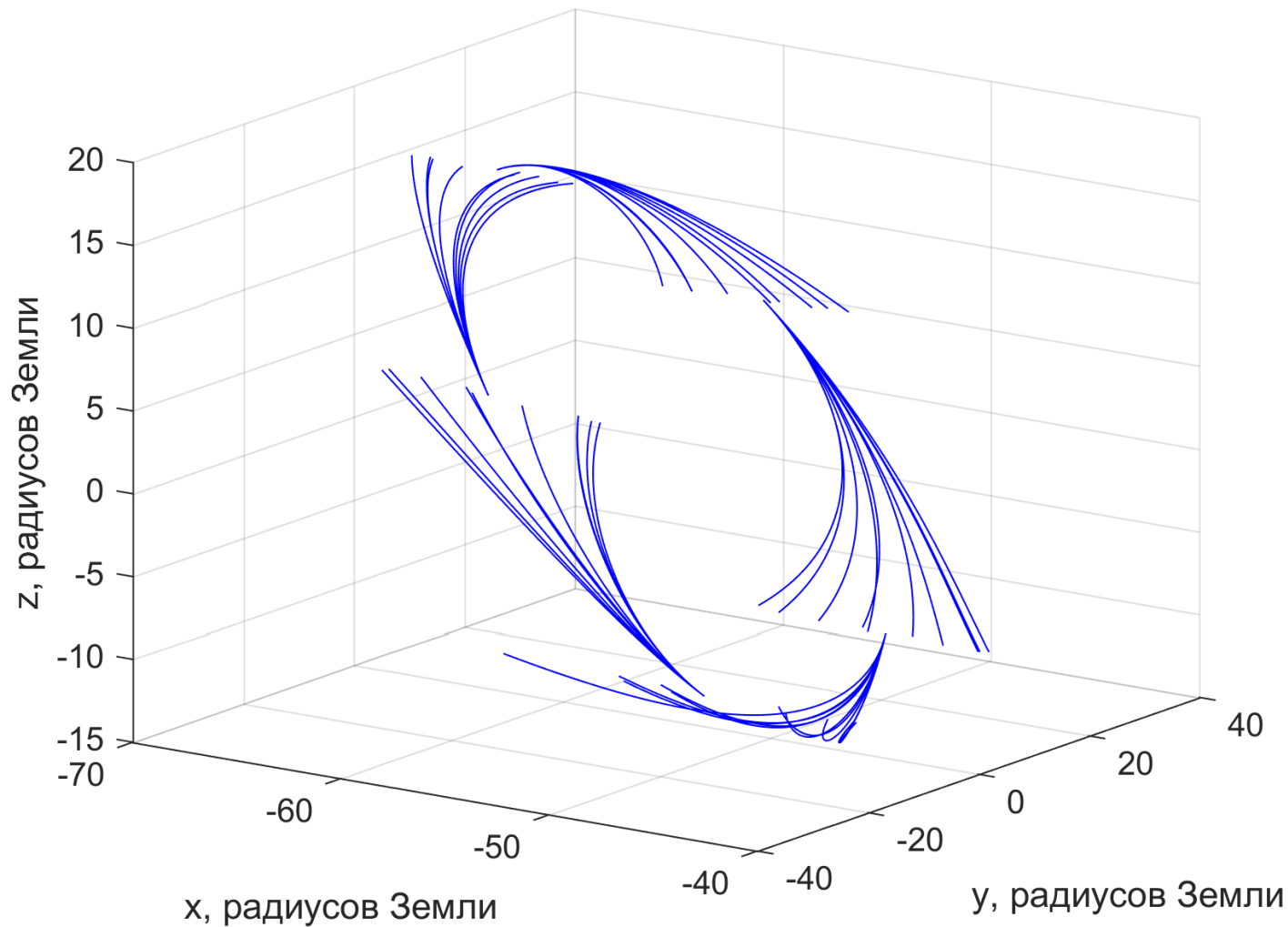
$$x_1^t(x_1) - x_2 = 0$$

$$x_2^t(x_2) - x_3 = 0$$

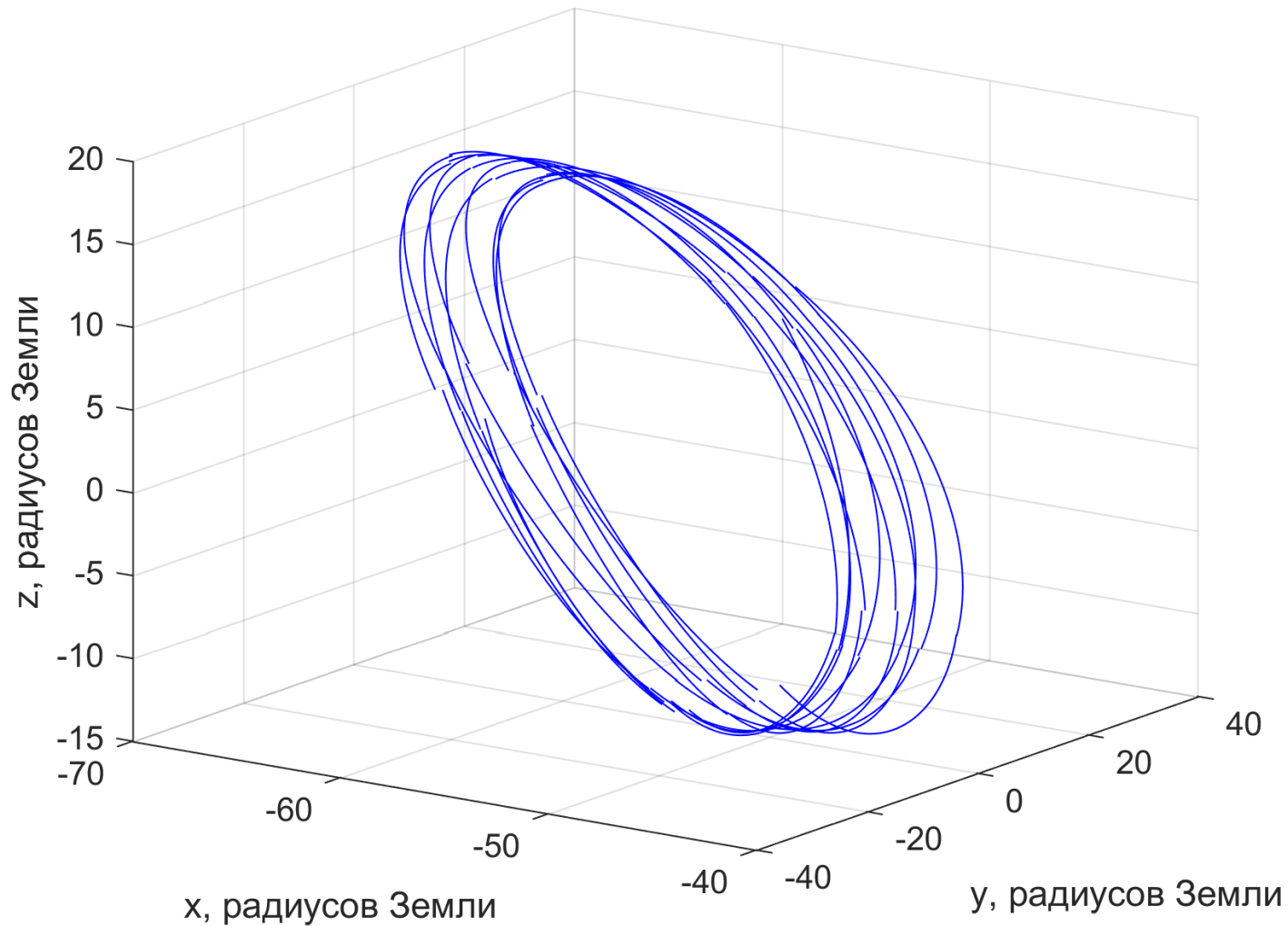
$$r_3^t(x_3) - R_2 = 0$$

В случае введения  $N$  вспомогательных точек:  
 $6N$  переменных,  $6N$  уравнений

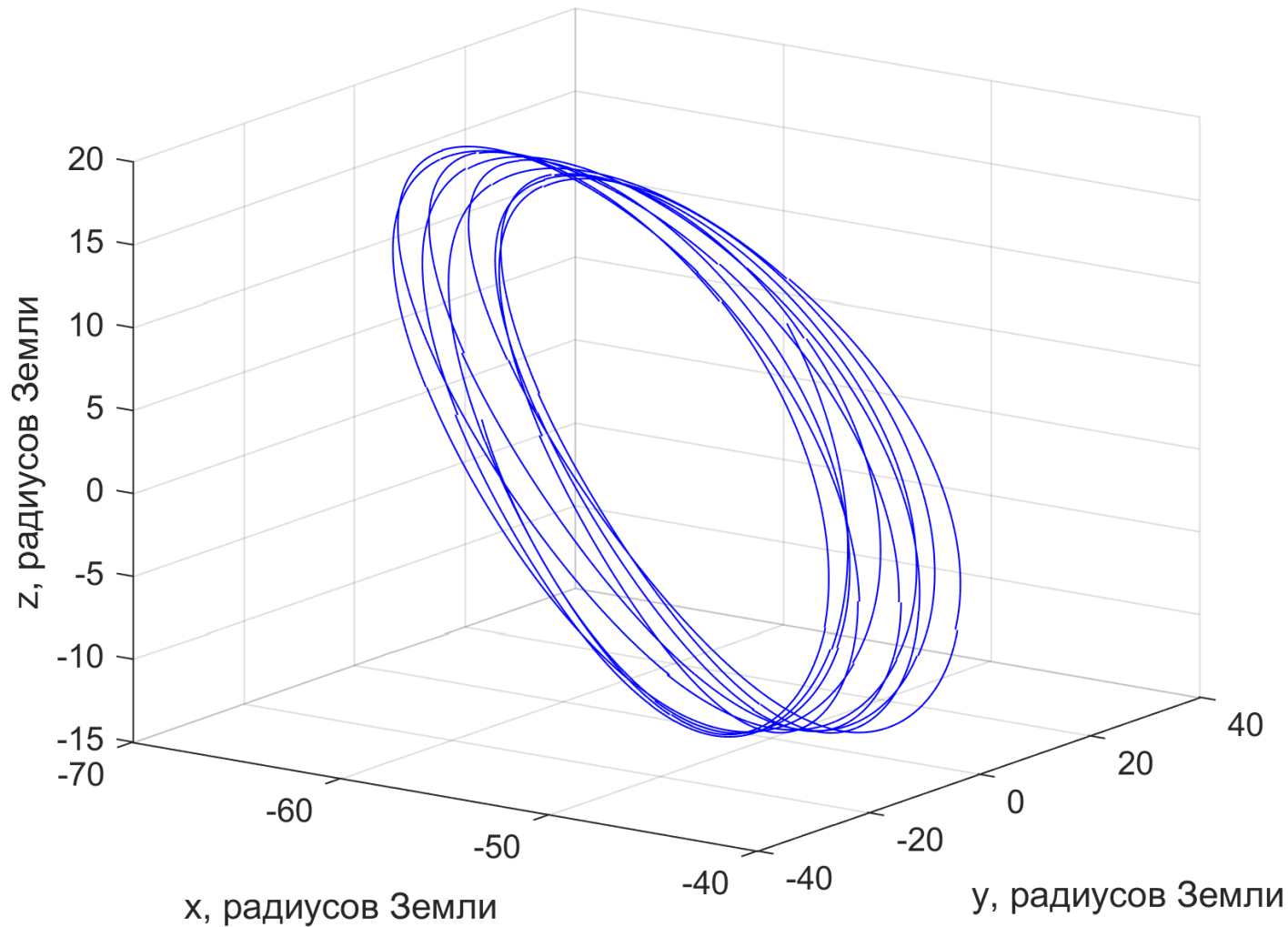
# Адаптация гало-орбиты к эфемеридной модели



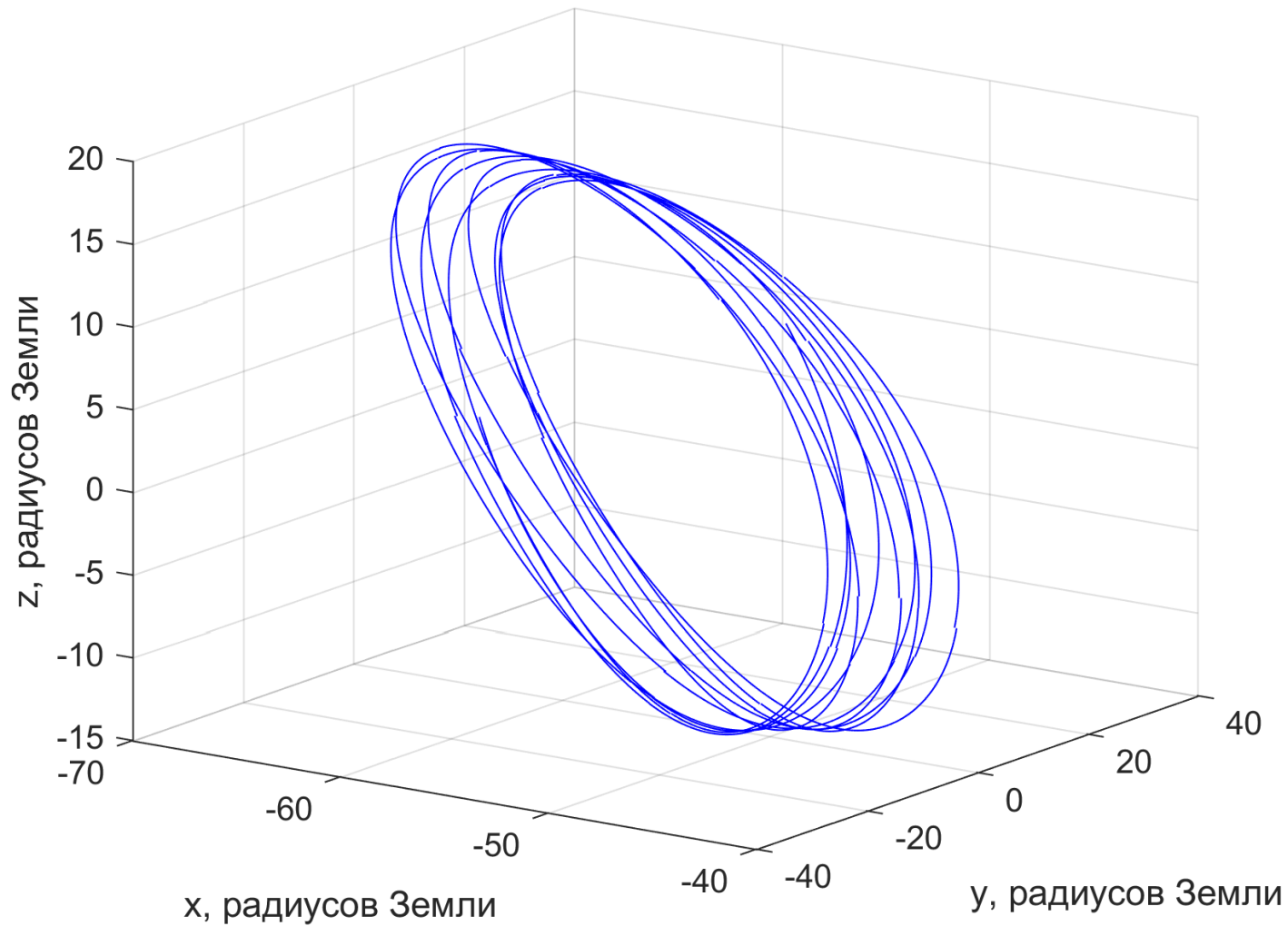
# Адаптация гало-орбиты к эфемеридной модели



# Адаптация гало-орбиты к эфемеридной модели

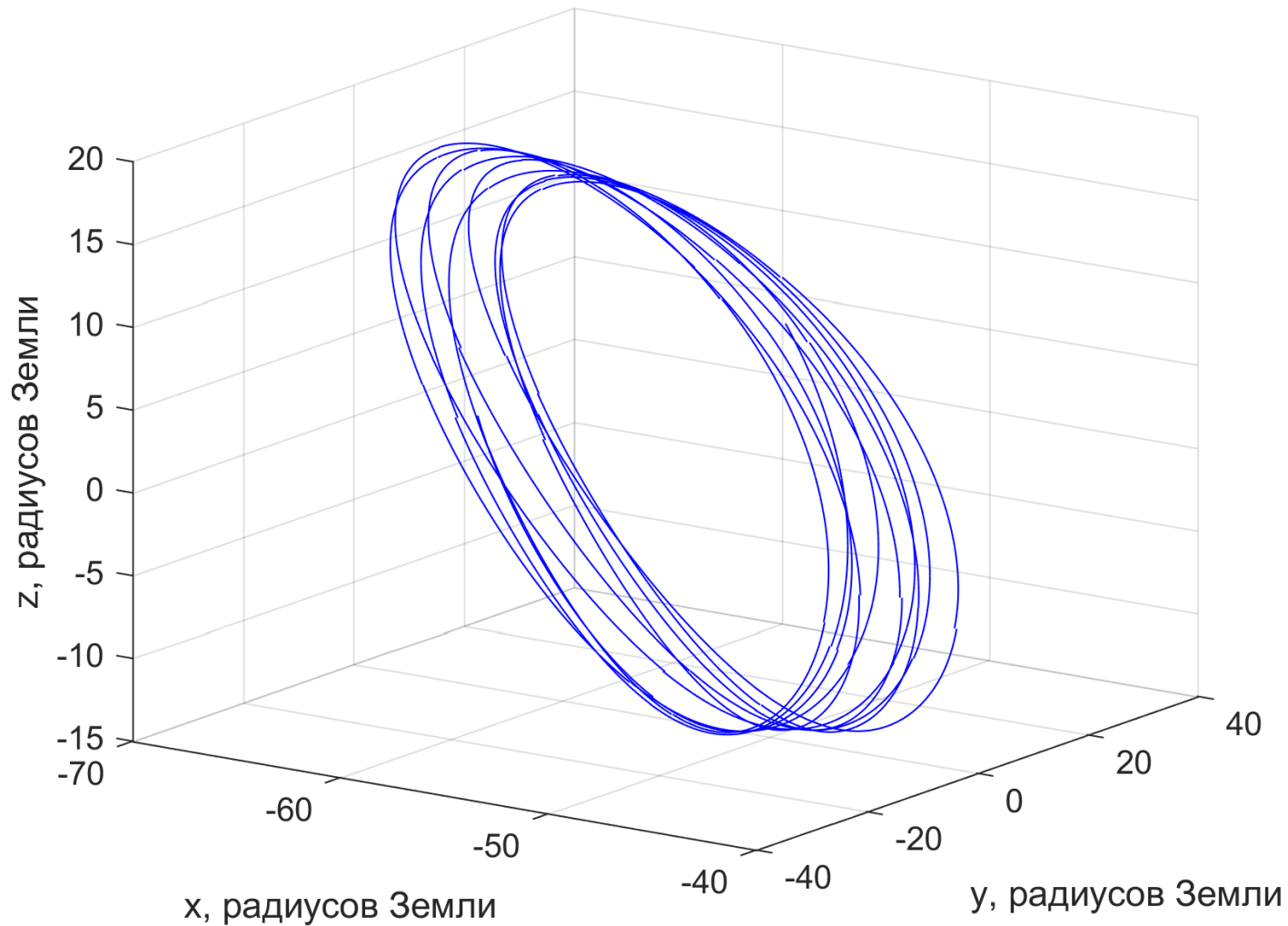


# Адаптация гало-орбиты к эфемеридной модели

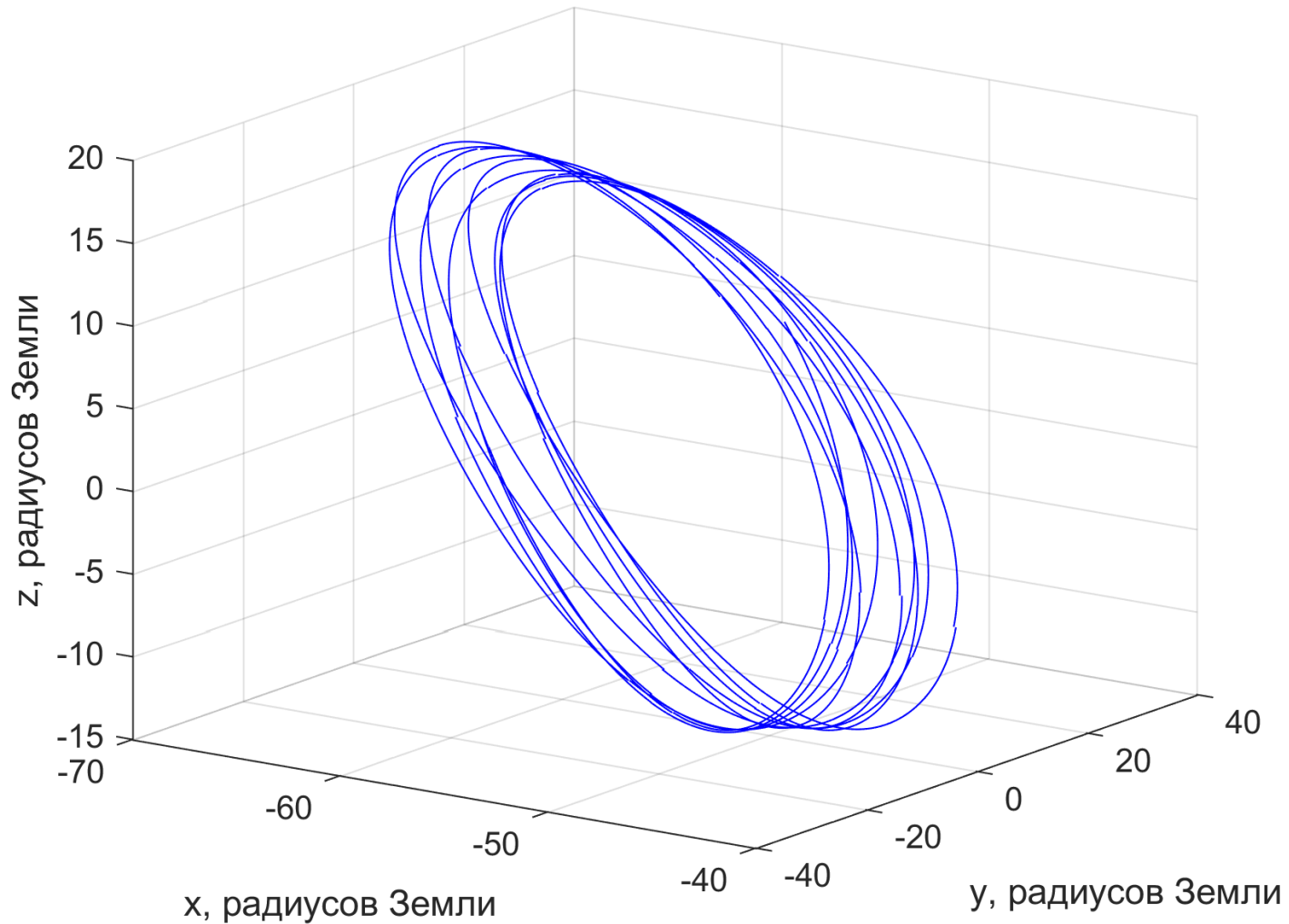




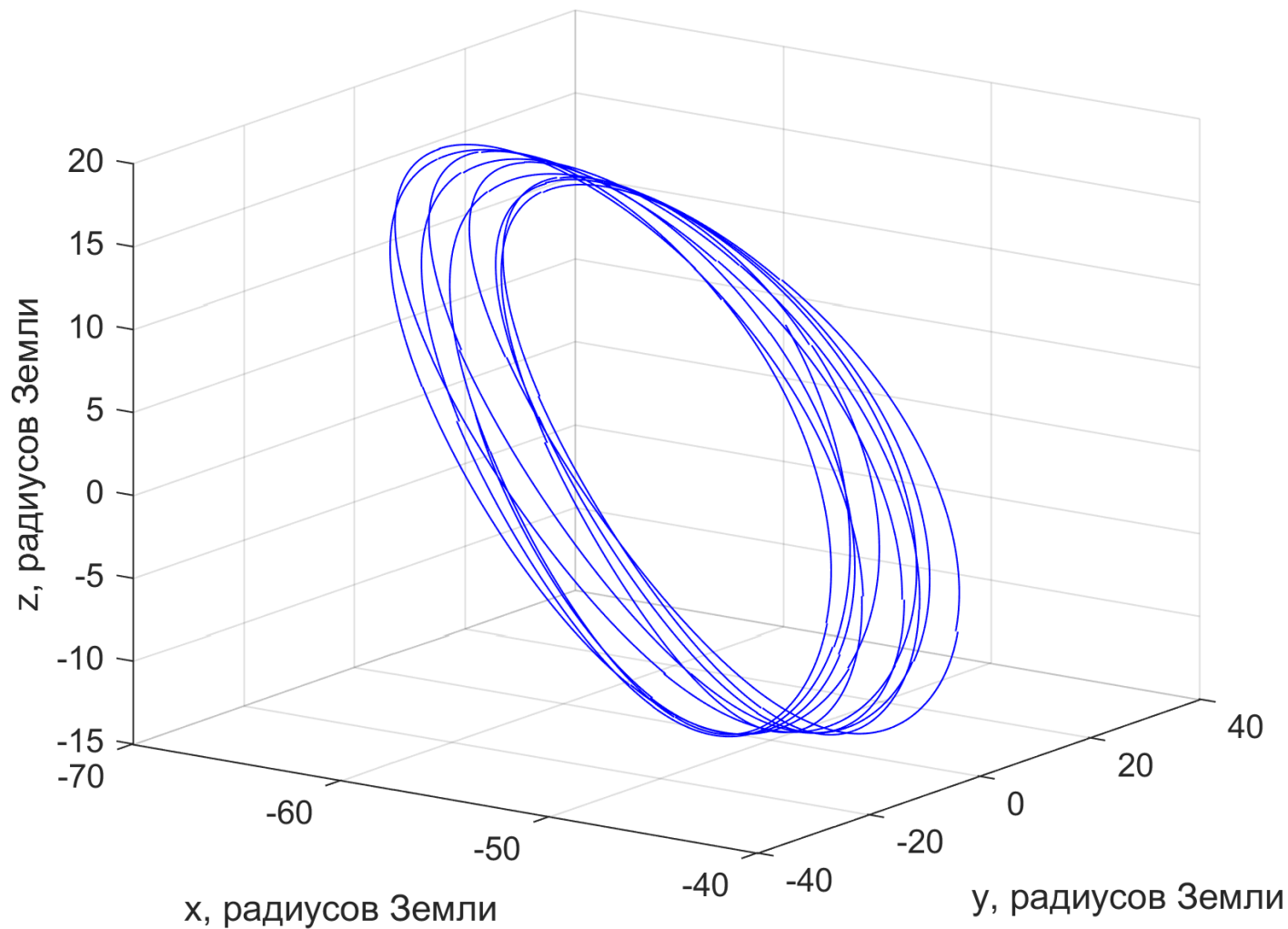
# Адаптация гало-орбиты к эфемеридной модели



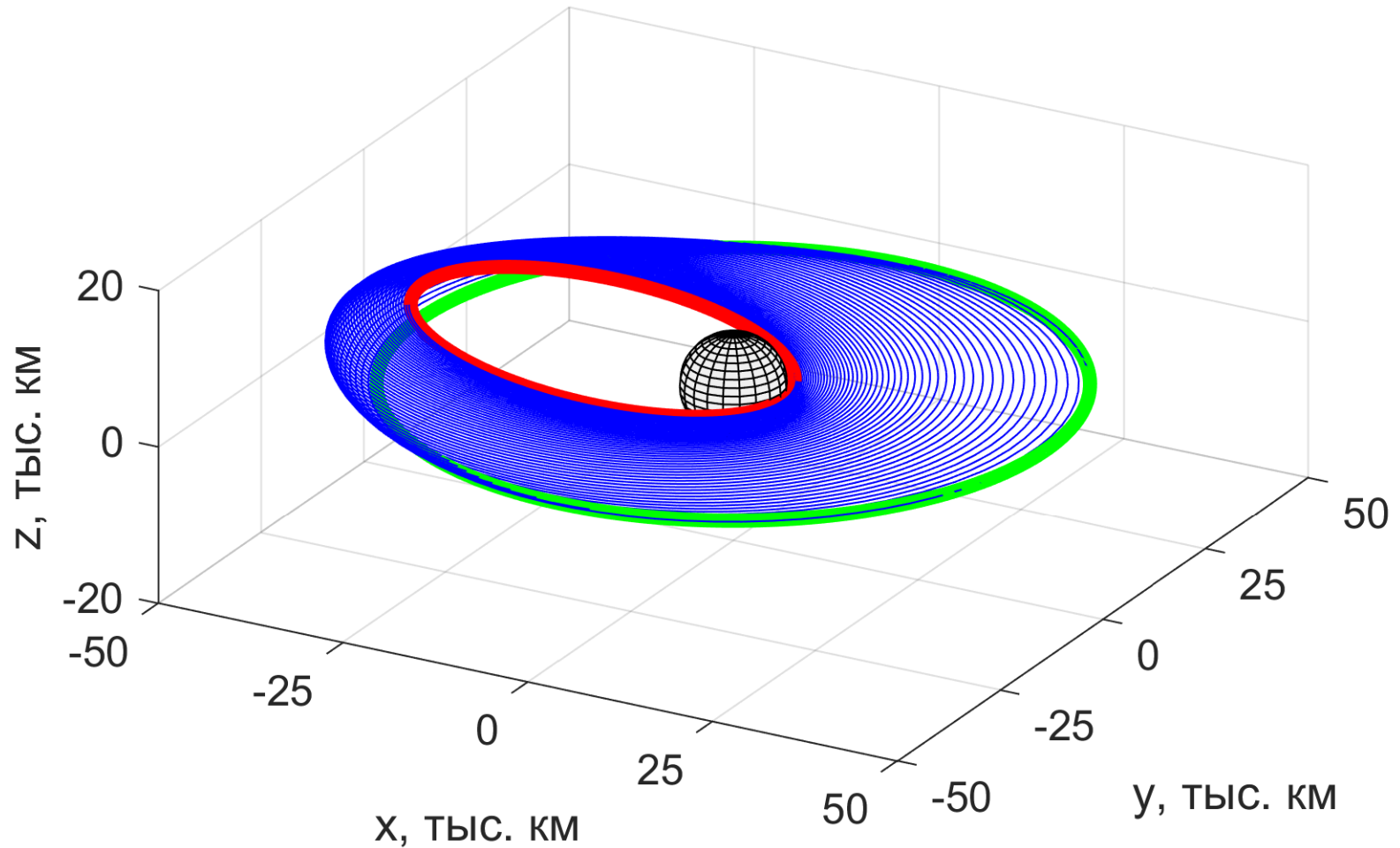
# Адаптация гало-орбиты к эфемеридной модели



# Адаптация гало-орбиты к эфемеридной модели



# Оптимальные многовитковые перелеты между орбитами



# Задача оптимального управления

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{u}|^2 dt \rightarrow \min \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{r}/r^3 + \mathbf{u} \\ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

$$H(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v^T \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)^T + \boldsymbol{\lambda}_v^T \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u}_{\text{opt}} = \boldsymbol{\lambda}_v \quad \begin{array}{ll} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} & \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = \left( \frac{\mathbf{I}_{3 \times 3}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r}^T}{r^5} \right) \boldsymbol{\lambda}_v \\ \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{r}/r^3 + \boldsymbol{\lambda}_v & \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\boldsymbol{\lambda}_r \end{array}$$

Найти  $\boldsymbol{\lambda}_r(t_1)$  и  $\boldsymbol{\lambda}_v(t_1)$ :  $\mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}_2 = 0$

# Сведение задачи к гомотопии

В данном случае приходим к системе уравнений

$$F(z) = 0$$

где  $z = (\lambda_r(t_1), \lambda_v(t_1))$ ,  $F(z) = x(t_2) - x_2$ , а решение  $x(t_2)$  находится интегрированием ОДУ

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v & \dot{\lambda}_r &= \left( \frac{I_{3 \times 3}}{r^3} - \frac{3rr^T}{r^5} \right) \lambda_v \\ \dot{v} &= -r/r^3 + \lambda_v & \dot{\lambda}_v &= -\lambda_r \end{aligned}$$

с начальным условием  $(x_1, \lambda_r(t_1), \lambda_v(t_1))$ .

# Продолжение по гравитационному параметру

Пусть  $\mu(\lambda) = \mu_0 + (1 - \mu_0)\lambda$  где  $\mu_0$  – начальное значение гравитационного параметра, такое, что

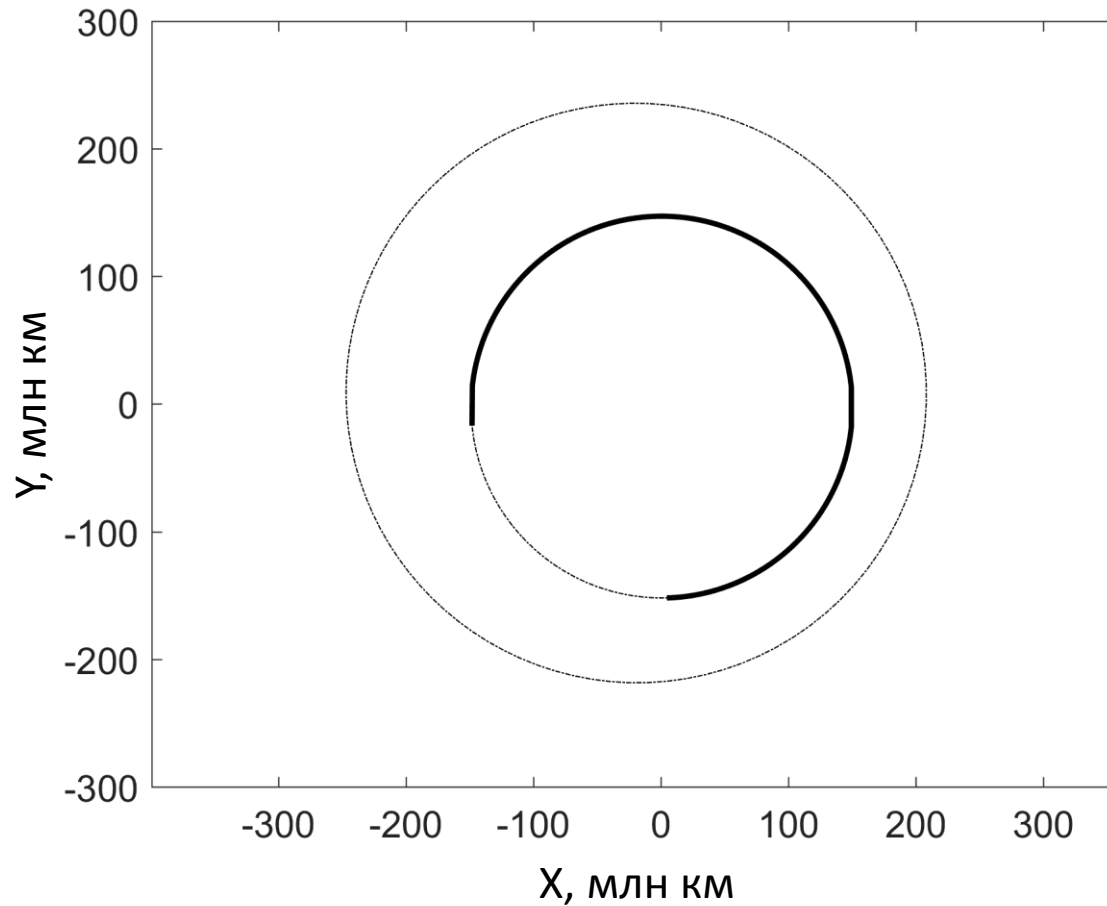
1. угловая дальность перелета одинакова для

$$\lambda = 0 \text{ и } \lambda = 1$$

2. случай  $\lambda = 0$  соответствует пассивному движению

Тогда 
$$\mu_0 = \frac{(M_2 + 2\pi N - M_1)^2 a^3}{T^2}$$

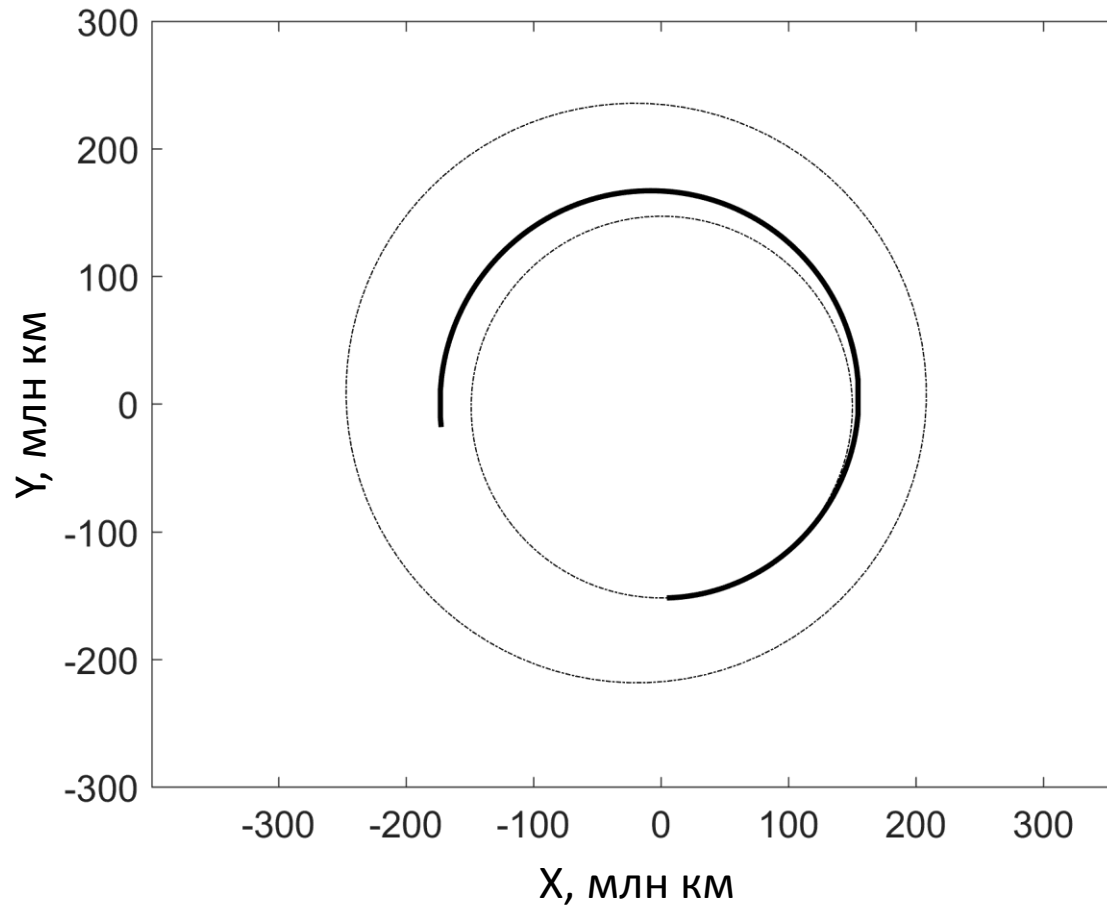
# Пример продолжения по гравитационному параметру: перелет от Земли к Марсу



$$\lambda = 0.00$$

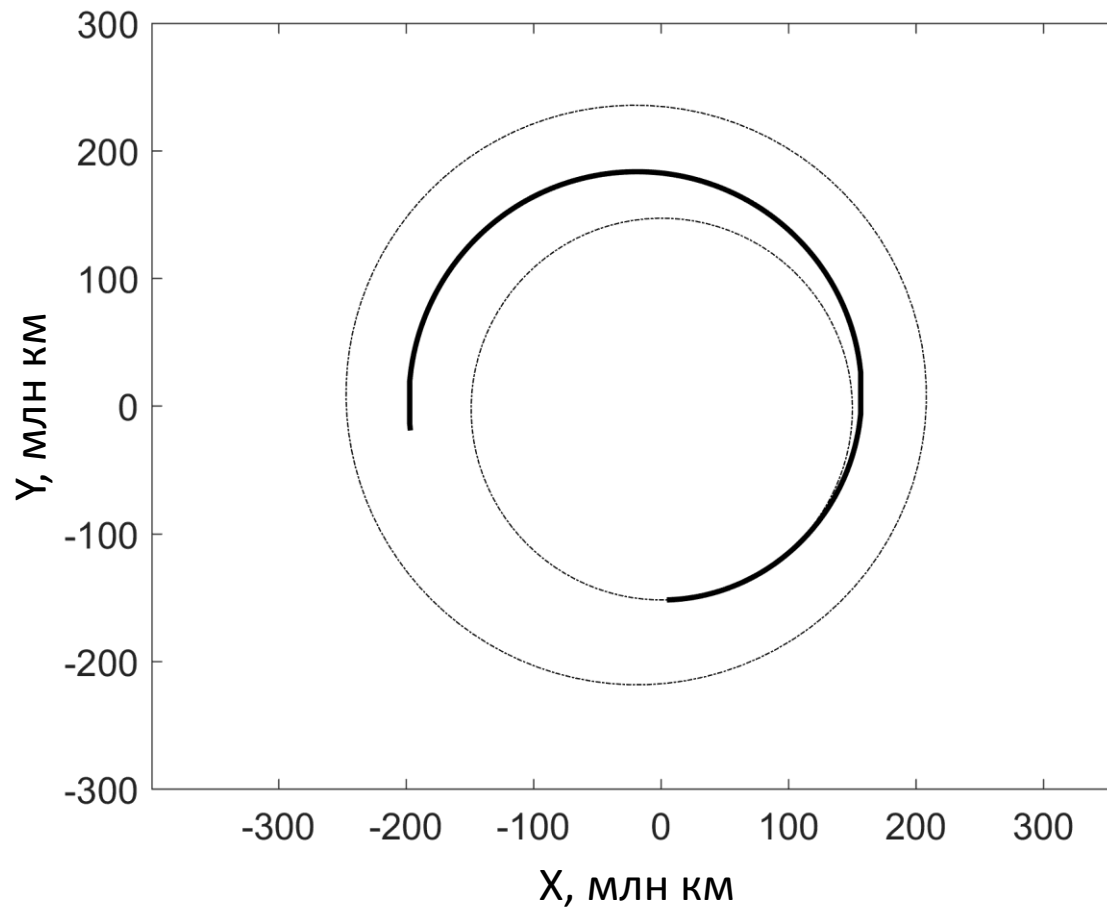


# Пример продолжения по гравитационному параметру: перелет от Земли к Марсу



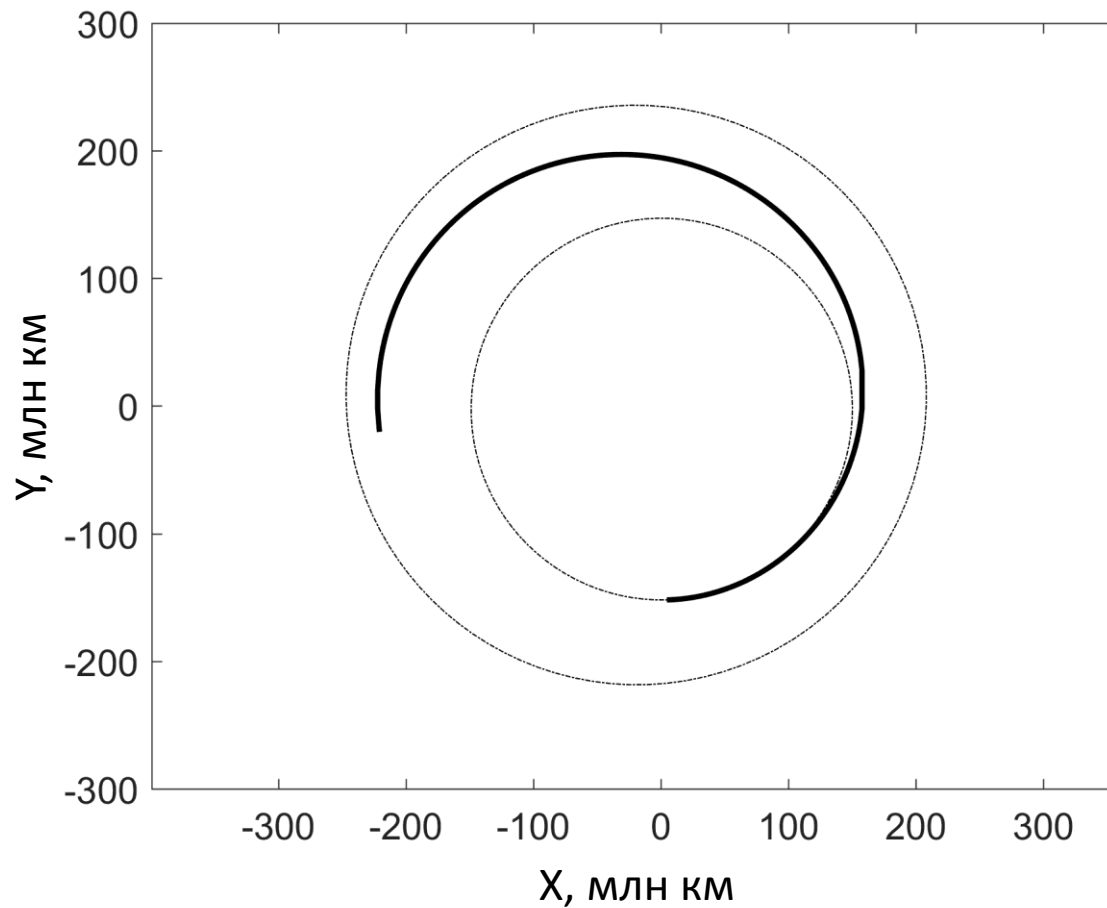
$$\lambda = 0.25$$

# Пример продолжения по гравитационному параметру: перелет от Земли к Марсу



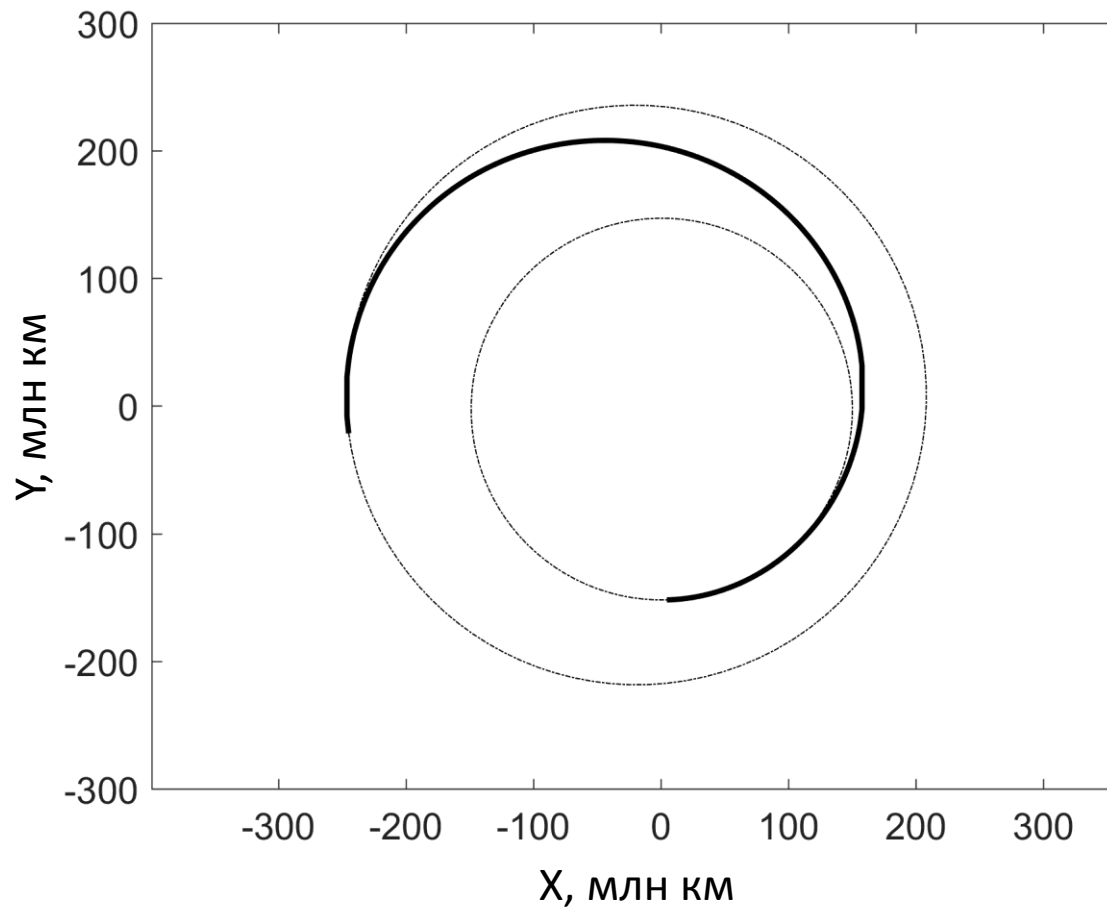
$$\lambda = 0.50$$

# Пример продолжения по гравитационному параметру: перелет от Земли к Марсу



$$\lambda = 0.75$$

# Пример продолжения по гравитационному параметру: перелет от Земли к Марсу



$$\lambda = 1.00$$

# Проблема сходимости и обход ветвлений на уровне численного метода

- Известны быстрые дифференциальные методы, не использующие обращение матриц (Liu, Atluri, 2012)
- Известны способы обхода ветвлений множества нулей функции гомотопии (Allgower, Georg, 1992; Евстигнеев 2019)

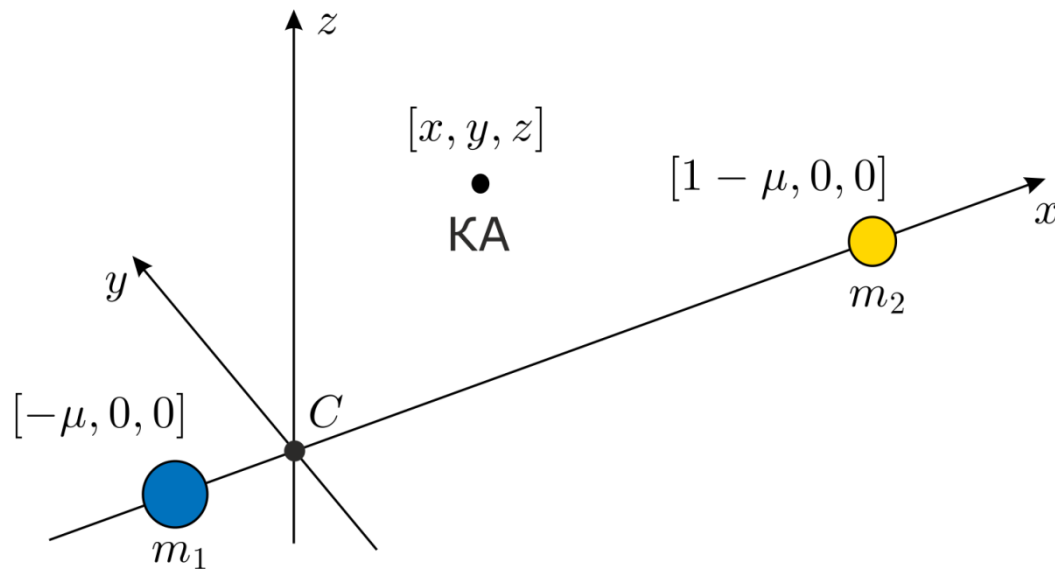
# Заключение

- Дискретные методы продолжения помогают восстанавливать семейства орбит и за счет наличия иерархии моделей адаптировать движение к реалистичным моделям
- Дифференциальные методы применяются для оптимизации траекторий с малой тягой, но в этих задачах нужно решать проблему ветвления решений – есть способы на уровне задачи и на уровне численного метода

# Благодарности

Работа поддержана грантом РФФ 19-11-00256

# Круговая ограниченная задача трех тел (CR3BP)



Массовый параметр

$$\mu = m_2 / (m_1 + m_2)$$

Безразмерные единицы:

$$m_1 = 1 - \mu \quad x_{m_1} = -\mu$$

$$m_2 = \mu \quad x_{m_2} = 1 - \mu$$

$$\omega_0 = 1$$

Для системы Земля-Луна

$$\mu = 1.2150668 \cdot 10^{-2}$$

Для системы Солнце-Земля

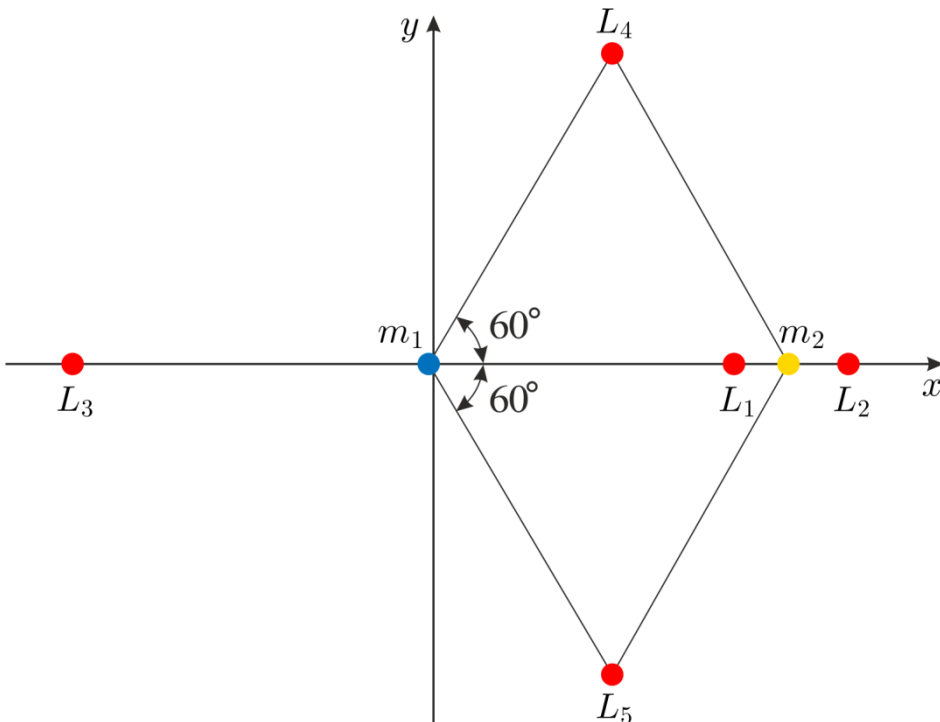
$$\mu = 3.0393890 \cdot 10^{-6}$$



# Уравнения движения

Уравнения движения:  $\ddot{x} - 2\dot{y} = U_x$ ,  $\ddot{y} + 2\dot{x} = U_y$ ,  $\ddot{z} = U_z$

где 
$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2}$$

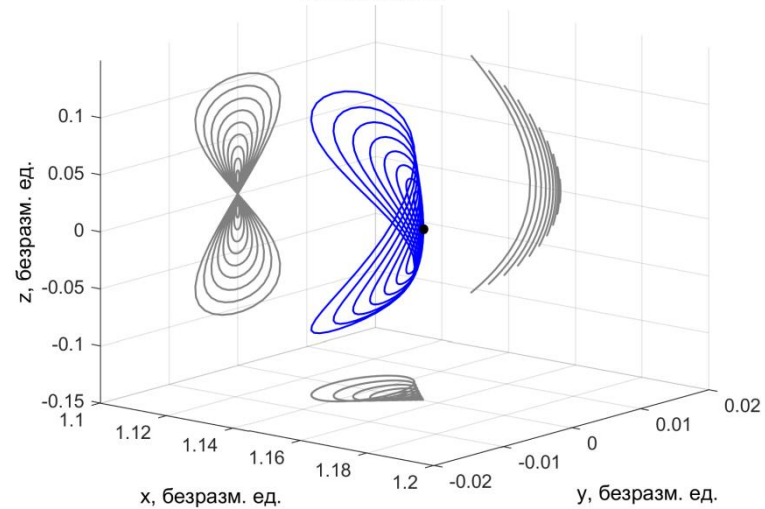
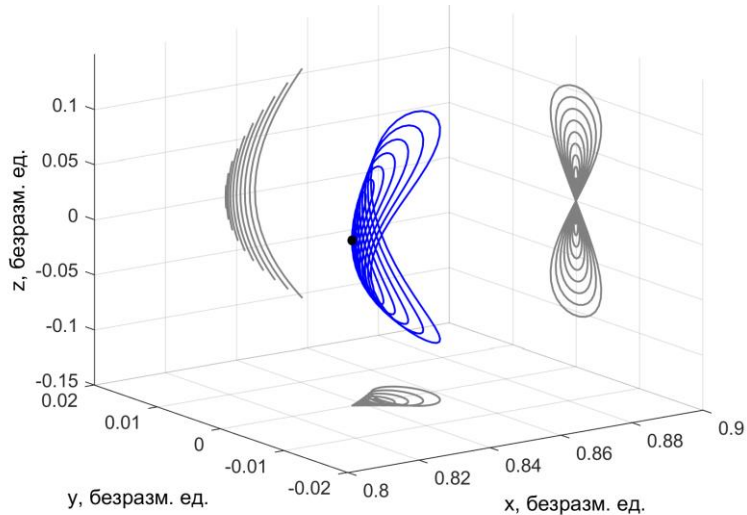
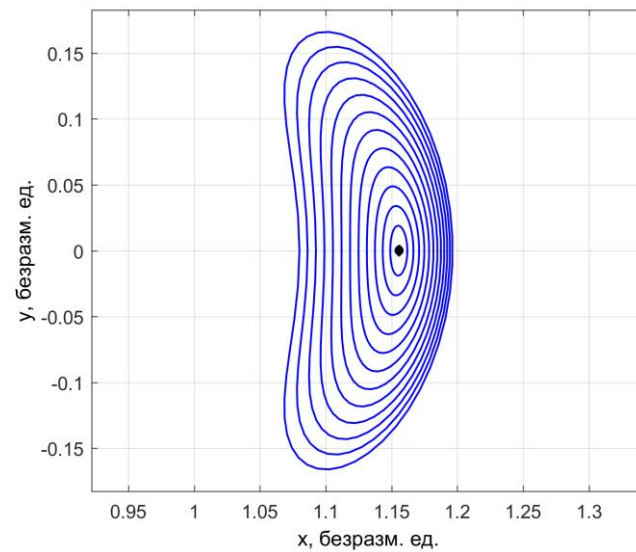
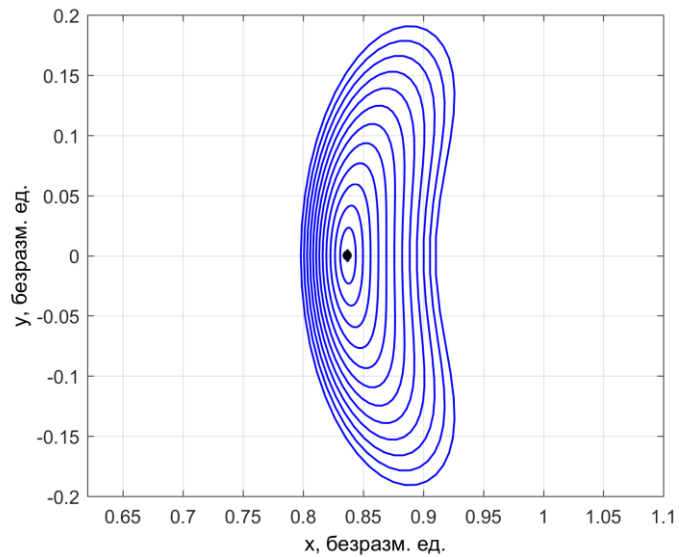


Положения равновесия  
соответствуют условиям

$$U_x = U_y = U_z = 0$$

и называются *точками  
либрации*

# Плоские и вертикальные орбиты Ляпунова вокруг точек L1 и L2 системы Земля-Луна



# Построение периодических орбит

Периодические орбиты сначала представляются в виде усеченных до требуемого порядка рядов Линдштедта-Пуанкаре<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{i,j=1}^N \left( \sum_{|k| \leq i+j} x_{ijk} \cos k\theta \right) \alpha^i \beta^j & \omega &= \omega_p \left( 1 + \sum_{i,j=1}^N d_{ij} \alpha^i \beta^j \right) \\y(t) &= \sum_{i,j=1}^N \left( \sum_{|k| \leq i+j} y_{ijk} \sin k\theta \right) \alpha^i \beta^j & \omega_p^2 - \omega_v^2 &= \sum_{i,j=1}^N f_{ij} \alpha^i \beta^j \\z(t) &= \sum_{i,j=1}^N \left( \sum_{|k| \leq i+j} z_{ijk} \cos k\theta \right) \alpha^i \beta^j & \theta &= \omega t + \varphi\end{aligned}$$

Приближенные решения уточняются в ходе дифференциальной коррекции методом простой пристрелки

<sup>1</sup>Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E., and Ross, S. D.: Dynamical Systems, the Three-body Problem and Space Mission Design. Springer, 2008.

# Continuation method for solving the optimal control problem

Consider  $\mathbf{z} = [\boldsymbol{\lambda}_r(t_1), \boldsymbol{\lambda}_v(t_1)]$  and a function

$$\varphi(\mathbf{z}, \mu, \mathbf{v}(t_1)) := \mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}_2(t_2)$$

Consider  $\mathbf{z}_0$  such that  $\varphi(\mathbf{z}_0, \mu_0, \sqrt{\mu_0}\mathbf{v}_1) = \mathbf{b}$

Consider a curve  $\mathbf{z}(\tau)$ ,  $\tau \in [0, 1]$  such that

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}(\tau), \tau) := \varphi(\mathbf{z}(\tau), \mu(\tau), \sqrt{\mu(\tau)}\mathbf{v}_1) = \mathbf{b}(1 - \tau)$$

Then

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = - \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tau} + \mathbf{b} \right), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

# Liu, Atluri, 2012

$$\dot{\mathbf{x}} = -\frac{\dot{Q}(t)}{2Q(t)} \frac{\|\mathbf{F}\|^2}{\mathbf{F}^T(\alpha\mathbf{B}\mathbf{R} + \beta\mathbf{B}\mathbf{p})} [\alpha\mathbf{R} + \beta\mathbf{p}],$$

$$\mathbf{p} = \left[ \mathbf{I}_n - \frac{\|\mathbf{R}\|^2}{\mathbf{R}^T\mathbf{C}\mathbf{R}} \mathbf{C} \right] \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} := \mathbf{B}^T\mathbf{F}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^T\mathbf{B}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

5. *Liu C.S., Atluri S.N.* A globally optimal iterative algorithm using the best descent vector  $\dot{x} = \lambda[\alpha_c F + B^T F]$ , with the critical value  $\alpha_c$ , for solving a system of nonlinear algebraic equations  $F(x) = 0$  // *Computer Modeling in Engineering and Sciences* **84:6** (2012), 575-601.

# Евстигнеев, 2019

- N. M. Evstigneev. “On the convergence acceleration, parallel implementation of continuation in disconnected bifurcation diagrams for large scale problems” // Параллельные и вычислительные технологии 2019, 2—4 апреля, Калининград.