XLV Академические чтения по космонавтике

28-31 января 2020

Управление относительным движением космического аппарата при захвате объекта космического мусора в заданной точке на его поверхности

М. Р. Ахлумади, Д.С. Иванов

Московский физико-технический институт (ГУ)

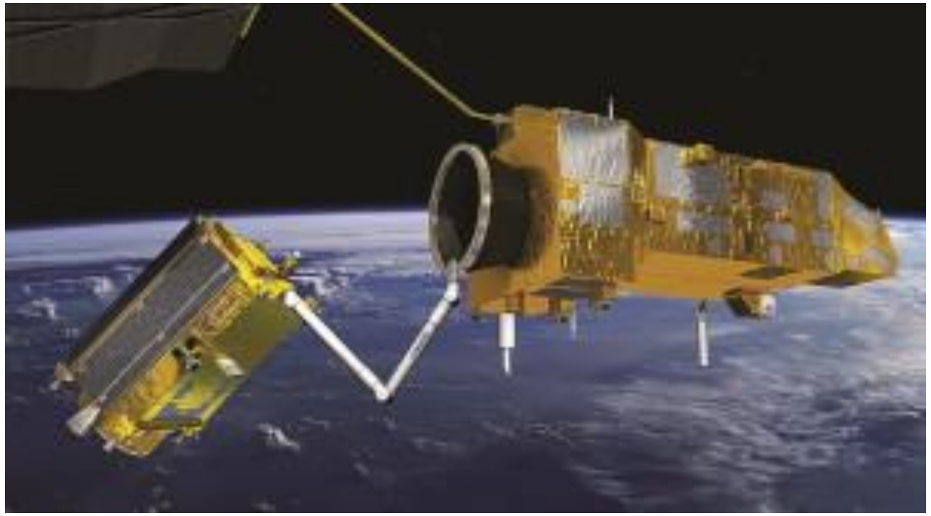
Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН

Оглавление

- Введение
- Постановка задачи
- Уравнения относительного движения
- Алгоритм управления
- Результаты численного исследования
- Заключение

Способы решения проблемы космического мусора

- Защита космических аппаратов
- Уничтожение мусора с помощью лазера
- Увод космического мусора с орбиты
  - Естественный увод
  - Активный увод с помощью специальных «аппаратов-дворников»



Концепт миссии «e.Deorbit»
Credit: ESA

Постановка задачи

Рассматривается:

- Произвольно вращающийся некооперирующий объект космического мусора
- Относительное поступательное и угловое движение объекта считаются известными
- Космический аппарат, оснащенный
  - двигателями непрерывной тяги для управления движением центра масс
  - маховичной системой для управления угловым движением
  - системой захвата объекта (например, роботизированный манипулятор)

Необходимо:

- Построить управление относительным движением космического аппарата для выполнения условий для захвата объекта
- Обеспечить заданное положение системы захвата аппарата относительно точки захвата на поверхности объекта

Уравнения относительного углового движения

Относительная угловая скорость

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_S - \boldsymbol{\omega}_T$$

$$\frac{d^I \boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^I \boldsymbol{\omega}_S}{dt} - \frac{d^I \boldsymbol{\omega}_T}{dt}$$

$$\left(\frac{d^I \boldsymbol{\omega}}{dt}\right)^T = \mathbf{D}_S^T \left(\frac{d^I \boldsymbol{\omega}_S}{dt}\right)^S - \left(\frac{d^I \boldsymbol{\omega}_T}{dt}\right)^T$$

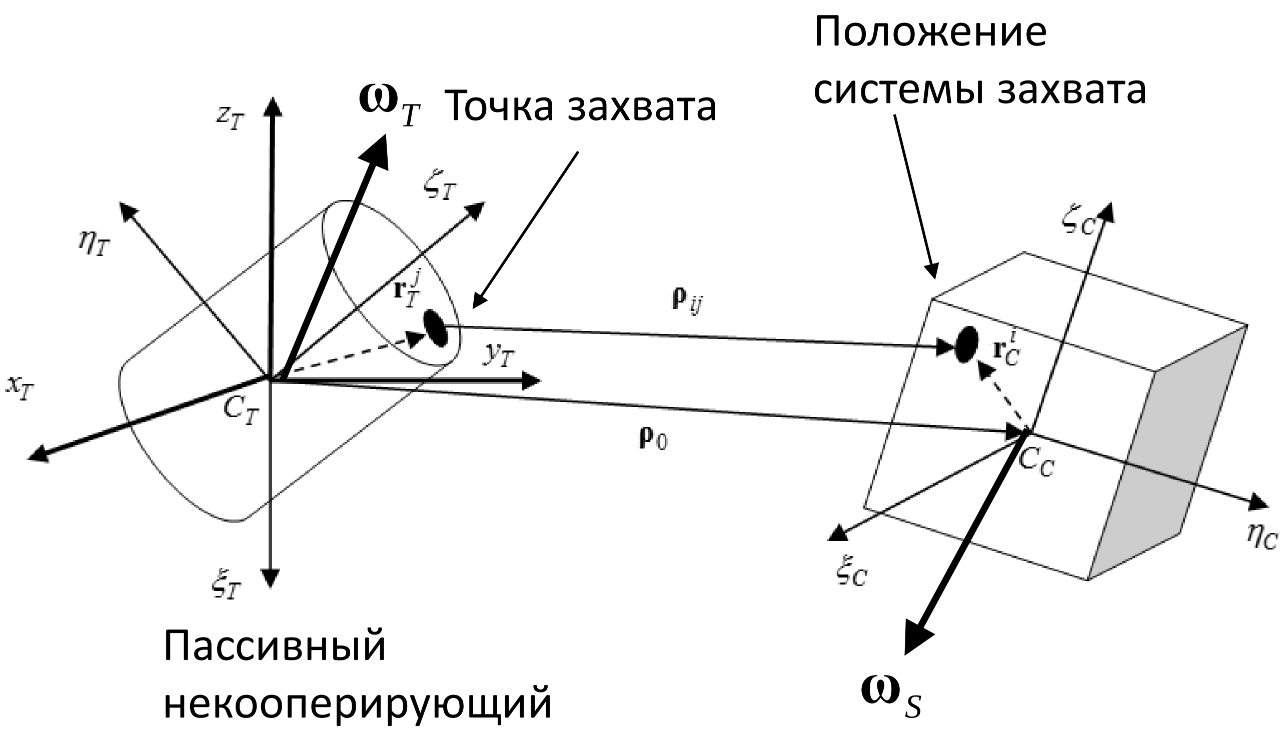
Кинематические уравнения

$$\dot{\mathbf{D}}_S^T = [\boldsymbol{\omega}]_\times \mathbf{D}_S^T$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q}\boldsymbol{\omega}^S$$

Производная относительной угловой скорости

$$\left(\frac{d^T \boldsymbol{\omega}}{dt}\right)^T = \left[(\boldsymbol{\omega})^T\right]_\times \mathbf{D}_S^T(\boldsymbol{\omega}_S) + \mathbf{D}_S^T \frac{d^T \boldsymbol{\omega}_S}{dt} - \frac{d^T \boldsymbol{\omega}_T}{dt}$$



Пассивный некооперирующий объект

Активный космический аппарат

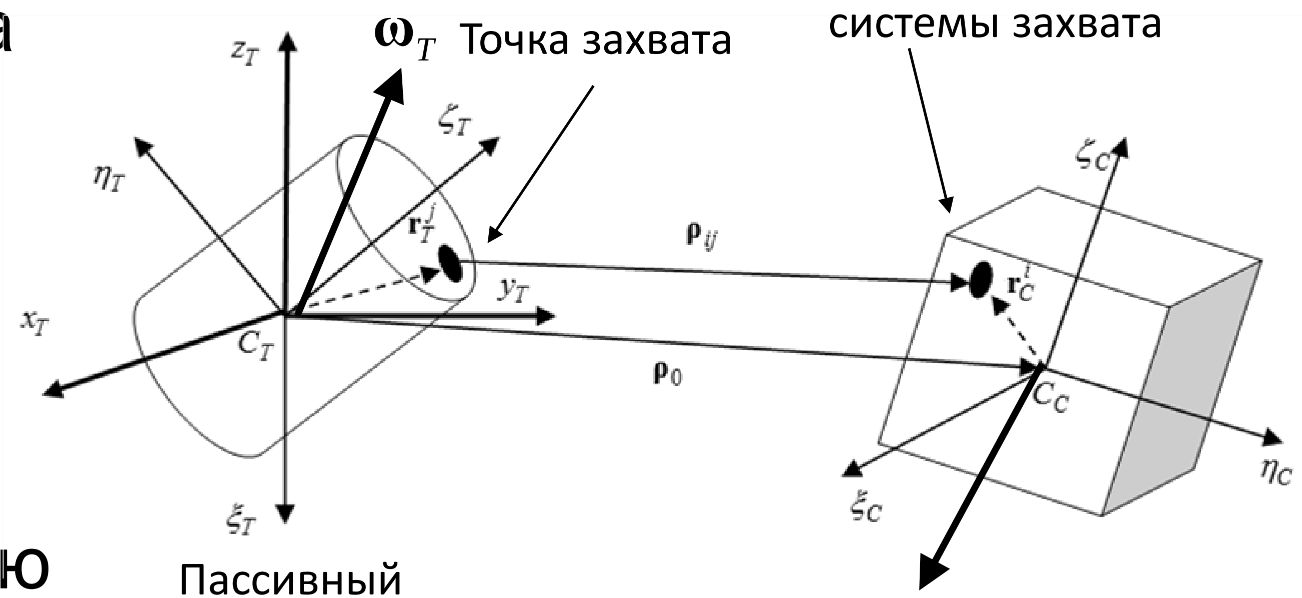
Динамические уравнения относительного углового движения

- Динамические уравнения Эйлера

$$\left.\frac{d\mathbf{H}_S}{dt}\right|_I = \left.\frac{d\mathbf{H}_S}{dt}\right|_S + \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{H}_S = \mathbf{N}_C + \mathbf{T}_C$$

$$\left.\frac{d\mathbf{H}_T}{dt}\right|_I = \left.\frac{d\mathbf{H}_T}{dt}\right|_T + \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{H}_T = \mathbf{N}_T$$

- После подстановки в производную относительной угловой скорости



$$\mathbf{I}_T\dot{\boldsymbol{\omega}}^T = \mathbf{I}_T\mathbf{D}(q)\mathbf{I}_C^{-1}[-\mathbf{D}(\mathbf{q})^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}^T + \boldsymbol{\omega}_T^T\right)\times\mathbf{I}_C\mathbf{D}(\mathbf{q})^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}^T + \boldsymbol{\omega}_T^T\right) - \ldots$$

$$-\mathbf{D}(\mathbf{q})^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}^T + \boldsymbol{\omega}_T^T\right)\mathbf{h}_{WC} - \dot{\mathbf{h}}_{WC} + \mathbf{T}_C + \mathbf{N}_C] - \mathbf{I}_T\boldsymbol{\omega}_T^T \times \boldsymbol{\omega}^T + [\boldsymbol{\omega}_T^T \times \mathbf{I}_T\boldsymbol{\omega}_T^T]$$

Относительное поступательное движение

- Уравнения относительного поступательного движения

$$\ddot{x}_{ij} - 2\omega_{OT}\dot{y}_{ij} - \dot{\omega}_{OT}y_{ij} - 3\omega_{OT}{}^{2}x_{ij} = a_x + d_x$$

$$\ddot{y}_{ij} + 2\omega_{OT}\dot{x}_{ij} + \dot{\omega}_{OT}x_{ij} = a_y + d_y$$

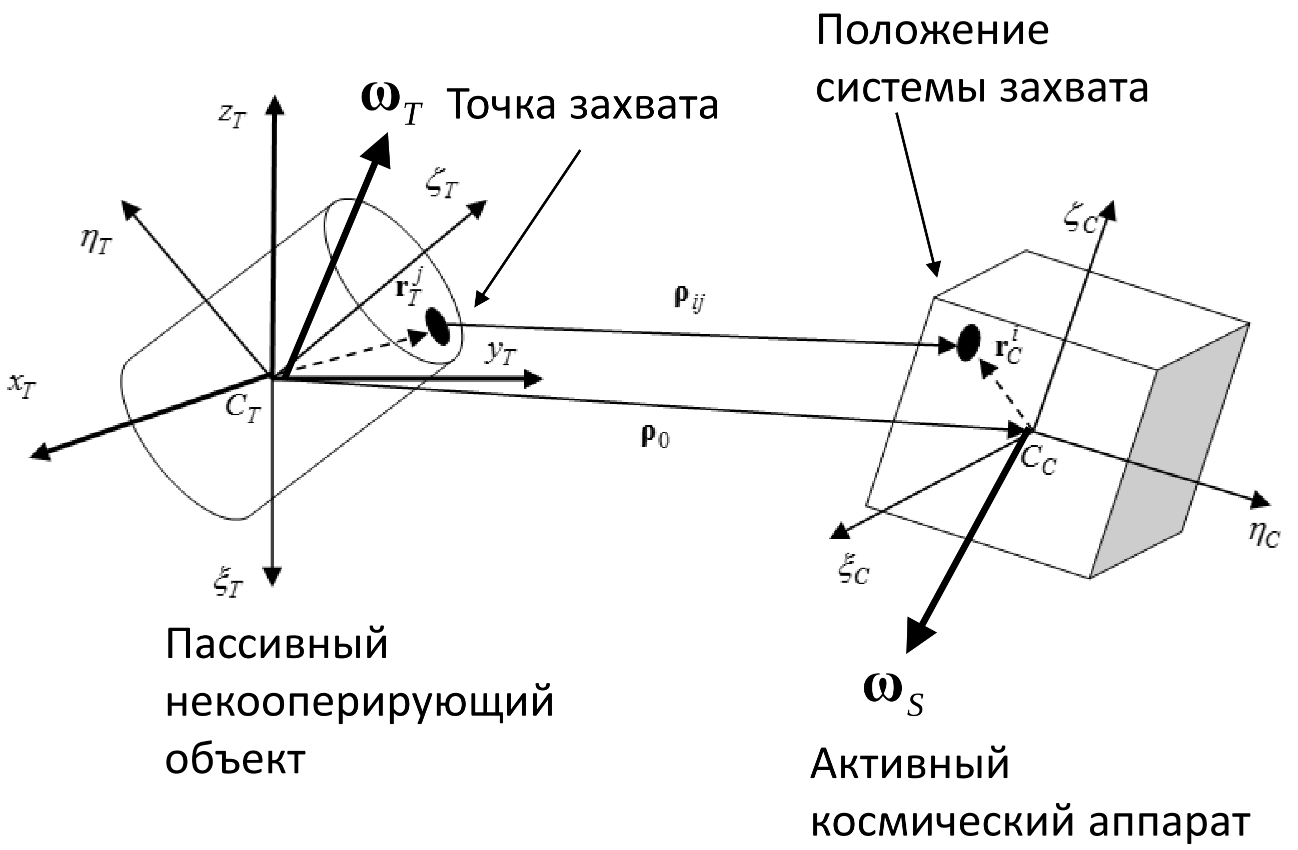
$$\ddot{z}_{ij} + \omega_{OT}^{2}z_{ij} = a_z + d_z$$

- Относительное положение точек

$$\boldsymbol{\rho}_{ij} = \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{r}_C^i - \mathbf{r}_T^j$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_{ij} = \dot{\boldsymbol{\rho}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C^i$$

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{ij} = \ddot{\boldsymbol{\rho}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_C^i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C^i)$$



Требуемое относительное положение для захвата

- Угловое положение

$$\mathbf{e}^T = \mathbf{D}_S^T \mathbf{e}_S^S + \mathbf{e}_T^T, \quad \mathbf{e}_S = \frac{\mathbf{r}_C^i}{\left|\mathbf{r}_C^i\right|}, \ \mathbf{e}_T = \frac{\mathbf{r}_T^j}{\left|\mathbf{r}_T^j\right|}$$

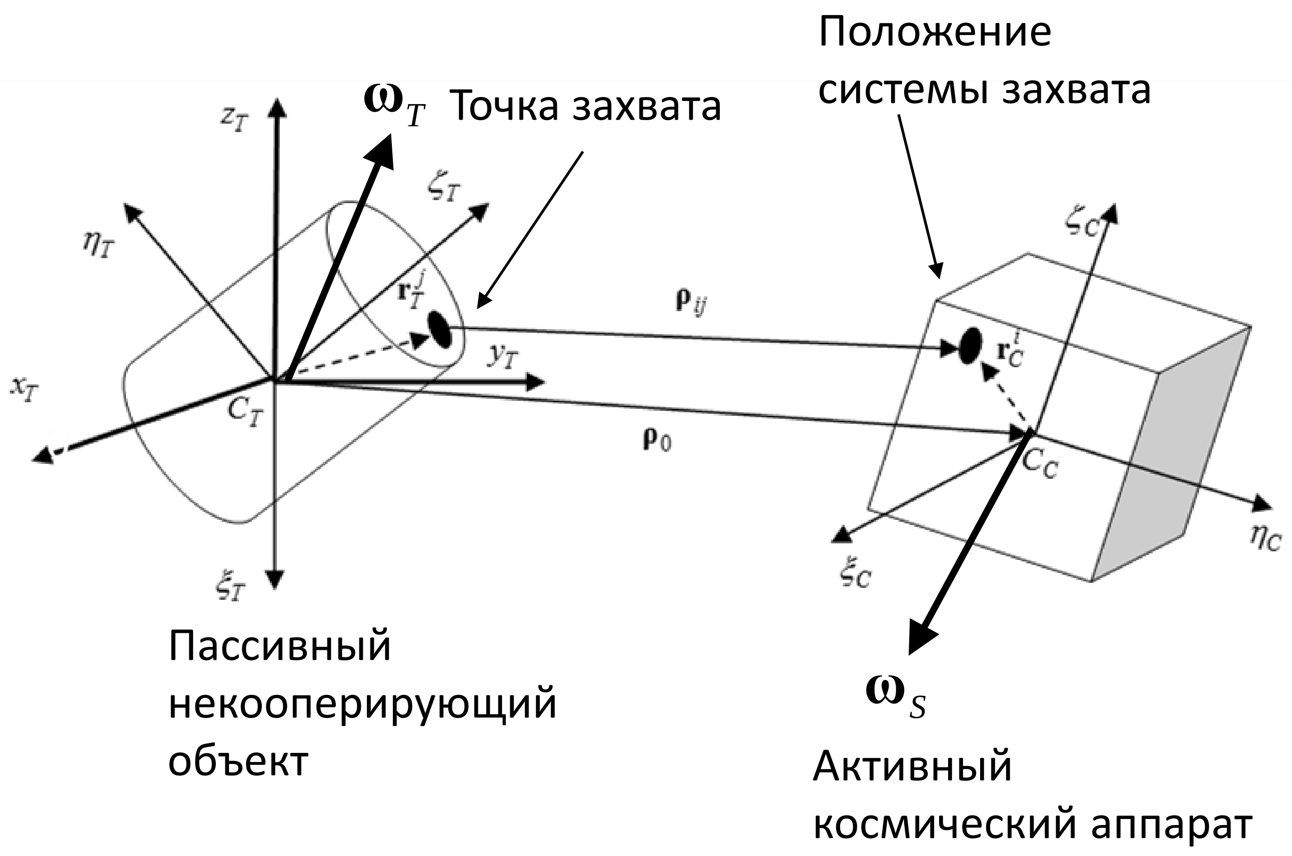
При захвате должно выполняться:

$$\mathbf{e} = 0 \ \text{ и } \ \dot{\mathbf{e}} = 0$$

- Положение центра масс

$$\boldsymbol{\rho}_d^T = K \cdot \mathbf{e}_T^T, \quad K > \left|\mathbf{r}_C^i\right| + \left|\mathbf{r}_T^j\right|$$

- Динамические уравнения



$$\left(\frac{d^2\mathbf{e}}{dt^2}\right)^T = \left(\dot{\boldsymbol{\omega}}^\times + \boldsymbol{\omega}^\times\boldsymbol{\omega}^\times\right)\left(\mathbf{e}^T - \mathbf{e}_T^T\right) \qquad \ddot{\boldsymbol{\rho}}_d^T = \dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times \boldsymbol{\rho}_d^T + \boldsymbol{\omega}_T \times \left(\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}_d^T\right)$$

Алгоритм управления на основе State-Dependent Riccati Equation (SDRE)

- Нелинейная динамическая система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

- После линеаризации

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

- Уравнение Риккати

$$\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \\ - \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q} = 0$$

- Минимизируемый функционал

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Q}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T\mathbf{R}\,\mathbf{u}(t)\right]dt$$

- Управление

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x})\right)\mathbf{x}$$

Уравнения управляемого движения

- Для углового движения

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \ddot{\mathbf{e}} \end{bmatrix}_{6\times1} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ \left((\dot{\boldsymbol{\omega}})^{\times} + \boldsymbol{\omega}^{\times}\boldsymbol{\omega}^{\times}\right) & 0 \end{bmatrix}_{6\times6} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix}_{6\times1} + \begin{bmatrix} 0 \\ (\mathbf{e}^{T} - \mathbf{e}_{T}^{T})^{\times}\mathbf{D}\mathbf{I}_{S}^{-1} \end{bmatrix}_{6\times3} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{C} \end{bmatrix}_{3\times1}$$

- Для поступательного движения

$$\Delta\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}_d$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\boldsymbol{\rho}} \\ \Delta\ddot{\boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix}_{6\times1} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ \mathbf{N} & \mathbf{M} \end{bmatrix}_{6\times6} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\rho} \\ \Delta\dot{\boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix}_{6\times1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{E}/m \end{bmatrix}_{6\times3} [\mathbf{a}]_{3\times1} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_T \times \boldsymbol{\rho}_d^T - \boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}_d^T)$$

Управляемость нелинейных систем

- Пусть система имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

- Скобки Ли и сопряженные функции

$$[f,g](\mathbf{x}) = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = \nabla g\, f - \nabla f\, g$$

- Сопряженные функции

$$ad_f^0 g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$$

$$ad_f^1 g(\mathbf{x}) = [f,g](\mathbf{x})$$

$$ad_f^2 g(\mathbf{x}) = \left[f,[f,g]\right](\mathbf{x})$$

$$\dots$$

$$ad_f^n g(\mathbf{x}) = \left[f\dots, f,\left[f,\left[f,[f,g]\right]\right]\right](\mathbf{x})$$

- Условие управляемости

$$1)\ rank\left[g \quad ad_f^1 g(\mathbf{x}) \ \dots \ ad_f^n g(\mathbf{x})\right] = n$$

$$2)\left[g \quad ad_f^1 g(\mathbf{x}) \ \dots \ ad_f^n g(\mathbf{x})\right] \text{ инволютивная}$$

- Управляемость по вектору $\mathbf{e}$ не выполняется при

$$\Rightarrow \dot{\boldsymbol{\omega}}^\times = \boldsymbol{\omega}^\times \boldsymbol{\omega}^\times \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_x^2 + \omega_y^2 = 0, \dot{\omega}_z = \omega_x\omega_y = -\omega_x\omega_y \\ \omega_x^2 + \omega_z^2 = 0, \dot{\omega}_y = \omega_x\omega_z = -\omega_x\omega_z \\ \omega_y^2 + \omega_z^2 = 0, \dot{\omega}_x = \omega_y\omega_z = -\omega_y\omega_z \end{array}$$

$$\mathbf{DI}_S^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}_S^S \times \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega}_S^S\right) = \mathbf{I}_T^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}_T^T \times \mathbf{I}_T \boldsymbol{\omega}_T^T\right) \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_T^T = 0$$

Пример моделирования

- Характеристики космического аппарата и начальные условия

$a = 7128$ км; $e = 0.03$; $i = 70^\circ$; $\Omega = 50^\circ$; $\omega = 80^\circ$

$I_T = diag\left(1.1, 1.2, 1.3\right)$ кг $\cdot$ м^2

$I_C = diag\left(1.2, 1.3, 1.4\right)$ кг $\cdot$ м^2

$m = 45$ кг

$q_0 = [1, 0, 0, 0]^T$

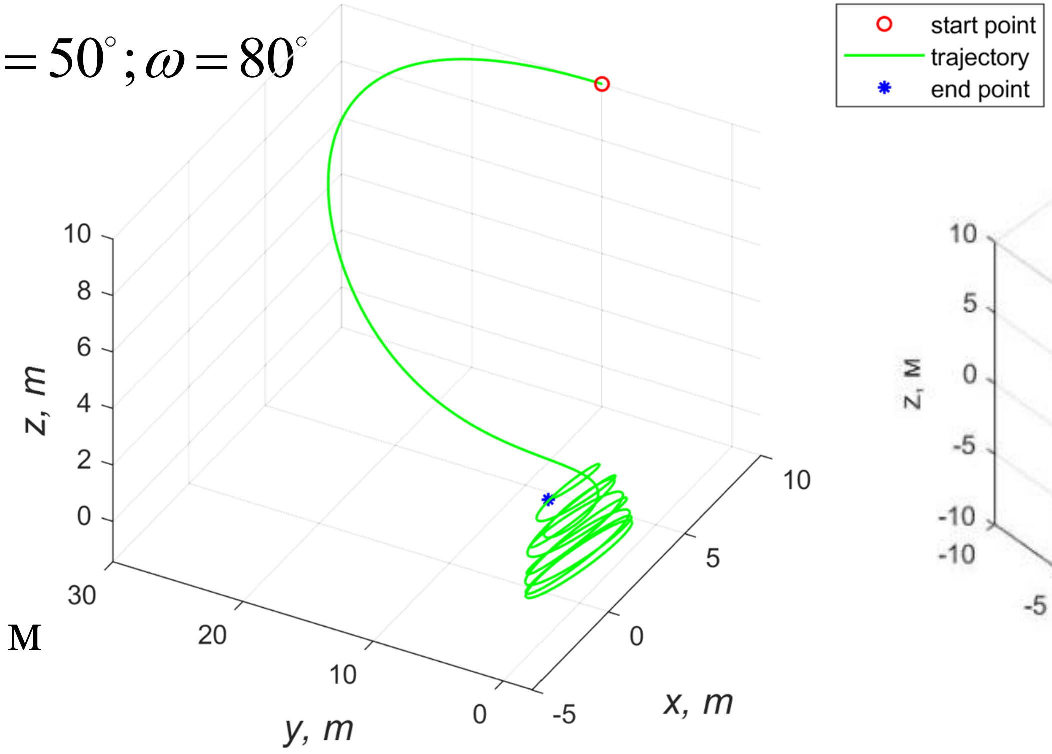
$\omega_T^T = [1, 2, 3]^T$ град/с

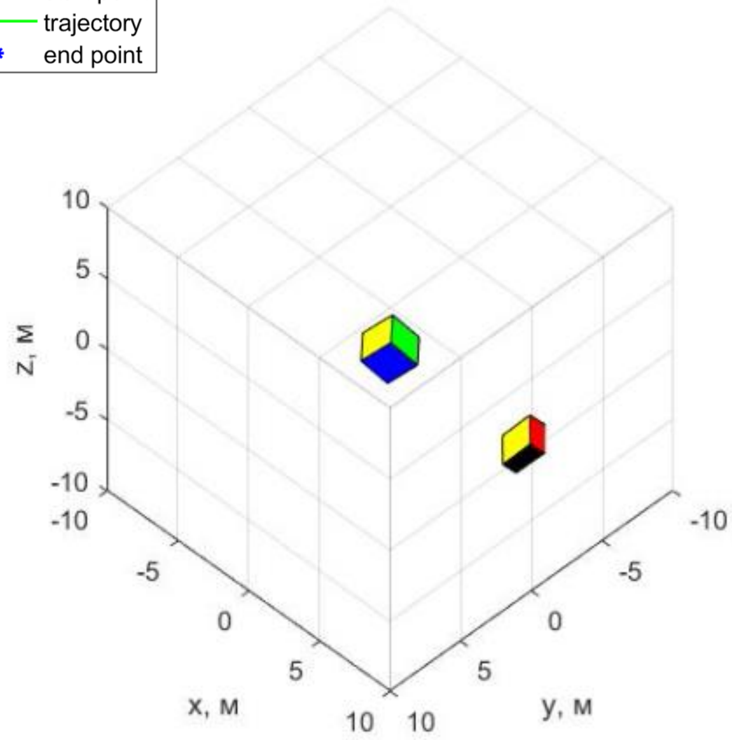
$\rho_0 = r_0 = [x_0, y_0, z_0]^T = [10, 10, 10]^T$ м

$\dot{\rho}_0 = \dot{r}_0 = [0, 2, 0]^T$ м/с

$\rho_{i1} = [1, 1, 1]^T$ м

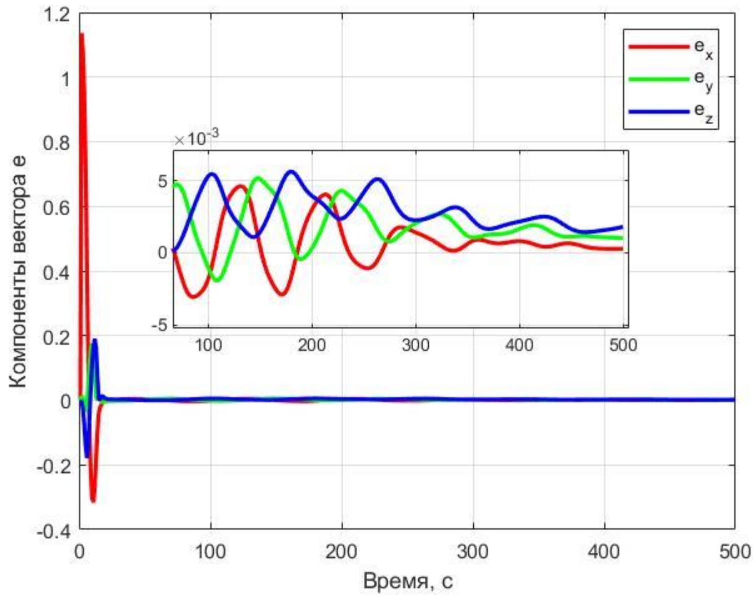
$\rho_{jo} = [1, 1, 1]^T$ м



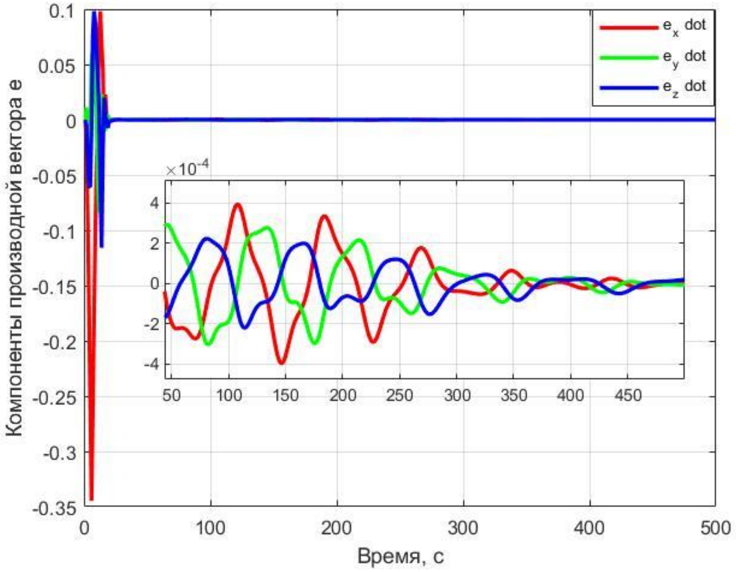


Вектор захвата и его скорость

- Управление приводит к асимптотической устойчивости вектора $\mathbf{e} \to 0$, т.е. условия для захвата достигаются



Компоненты вектора захвата e



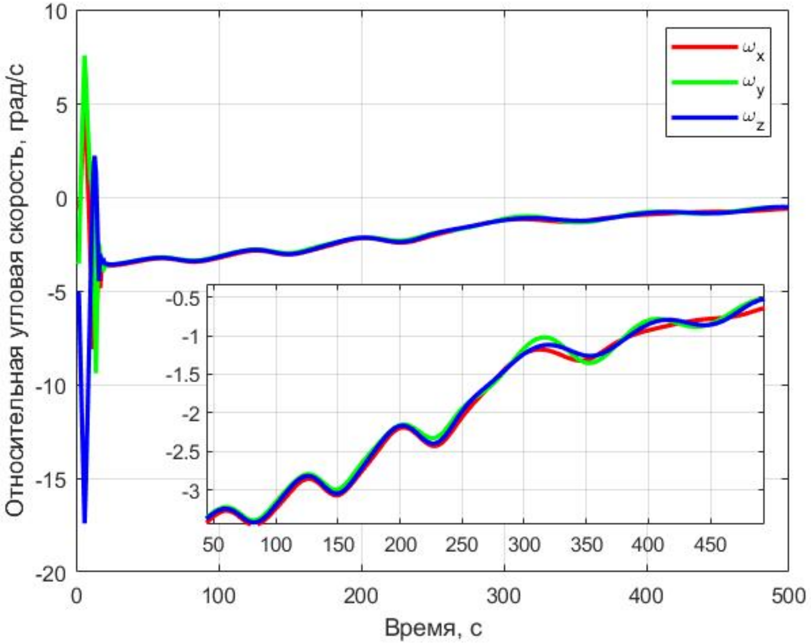
Компоненты скоростей вектора захвата e

Относительное угловое движение

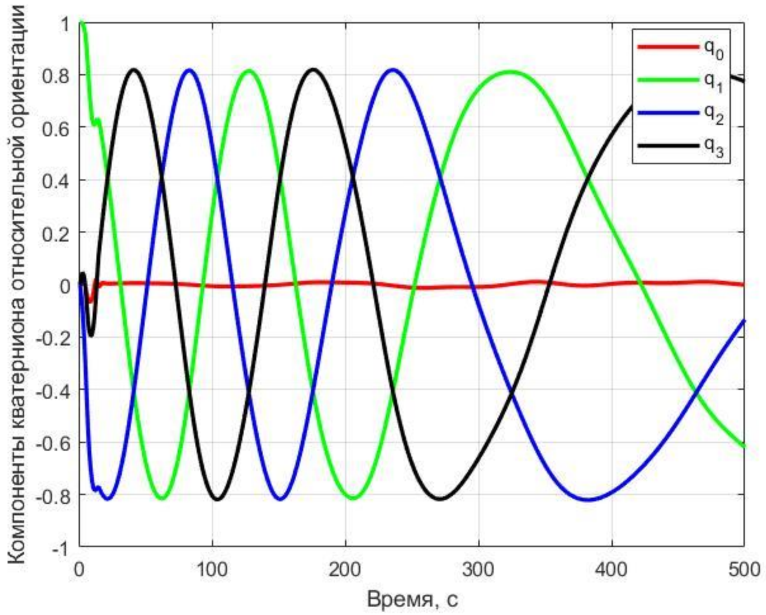
Так как вектор захвата выбран

$$\mathbf{r}_T^j = [1,1,1]^T \text{ м}, \quad \mathbf{e}_T = \frac{\mathbf{r}_T^j}{\left|\mathbf{r}_T^j\right|}$$

то при $\mathbf{e} \to 0$ компоненты относительной угловой скорости в проекции на вектор $\mathbf{e}_T$ остаются ненулевыми и равны между собой



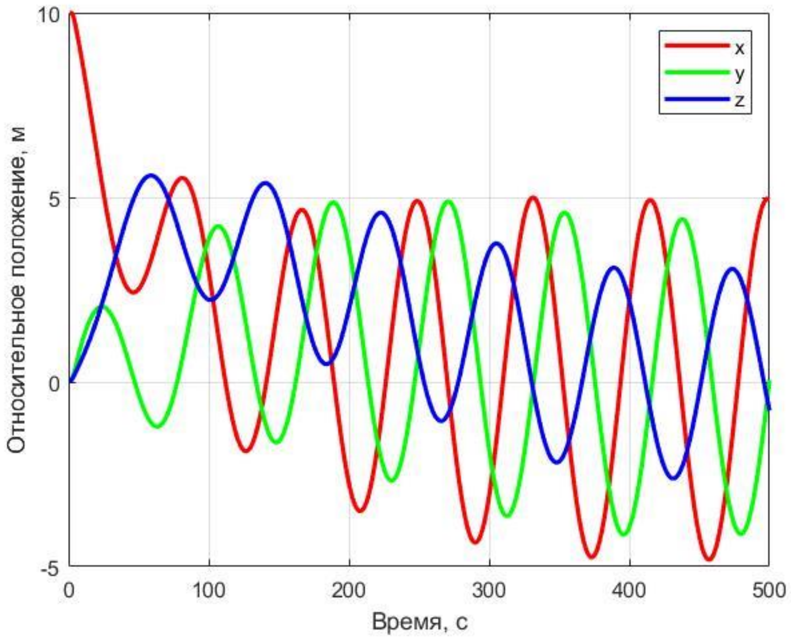
Компоненты относительной угловой скорости



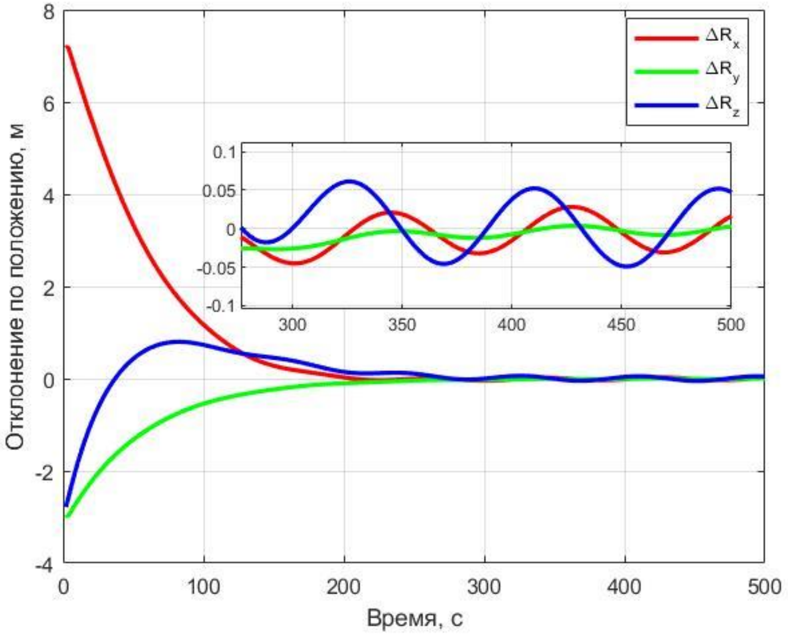
Компоненты относительного кватерниона

Относительное поступательное движение

Вследствие прецессионного движения объекта космического мусора требуется постоянное управление положением центра масс КА для обеспечения условий для захвата



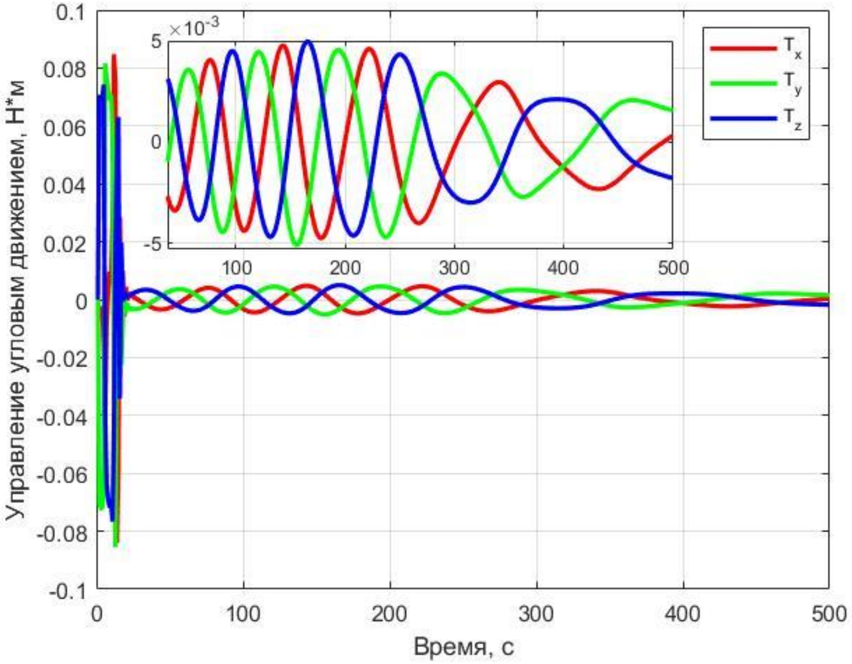
Компоненты радиус-вектора



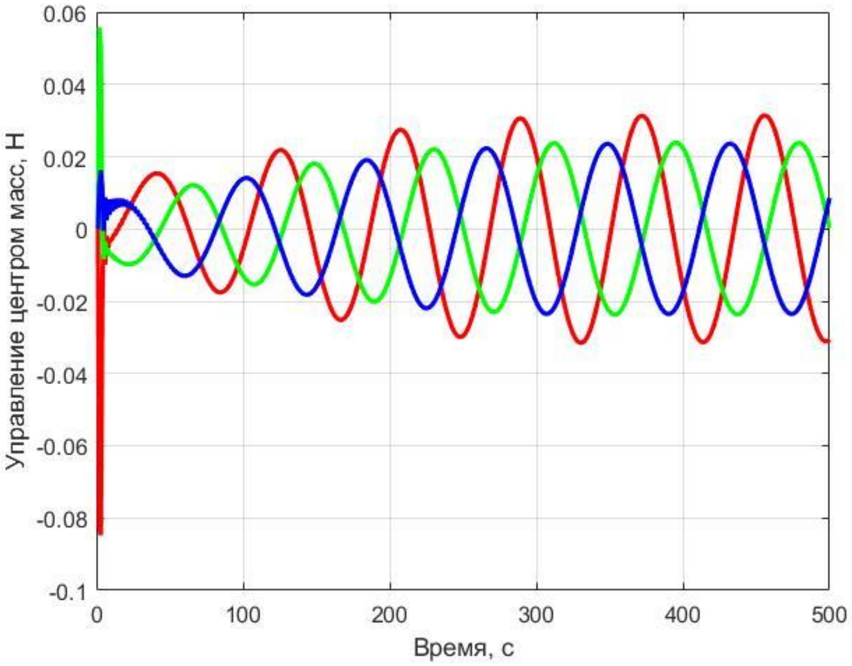
Компоненты вектора отклонения

Управление движением

Требуемое для захвата движение центра масс и относительно центра масс обеспечивается постоянным управлением



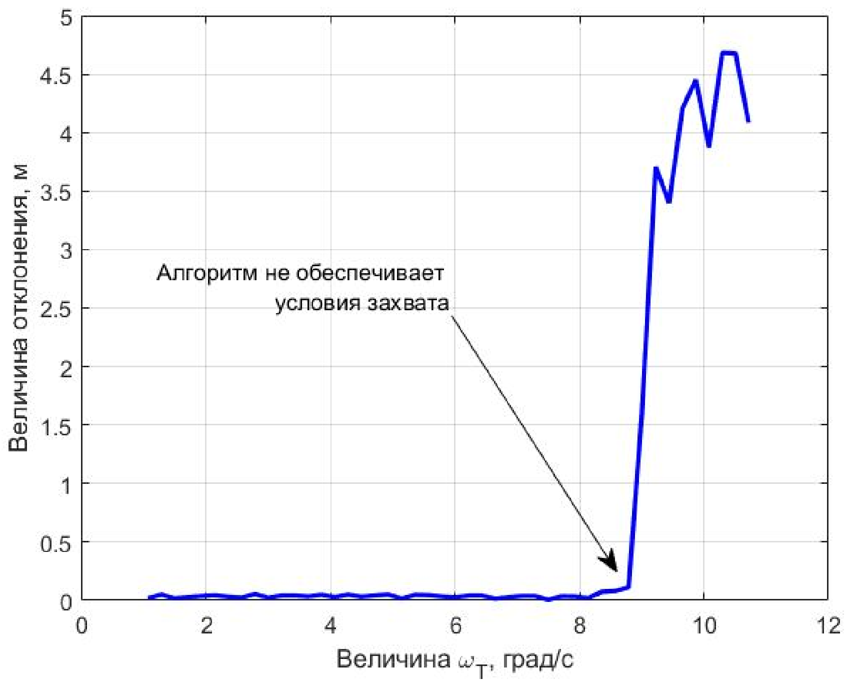
Управление угловым движением



Управление поступательным движением

Параметры, влияющие на управление

- При ограничении на максимальную величину управляющего момента, кинетического момента маховиков, а также на величину тяги двигателей предложенный алгоритм может не обеспечить условия для захвата
- Чем больше угловая скорость объекта космического мусора, тем больше требуется ресурс управления



Пример зависимости отклонения положения от начальной угловой скорости объекта при ограничении на максимальную тягу в 0.1 Н

Заключение

- Предложен алгоритм для сближения с целью стыковки с некооперирующим объектом космического мусора на околоземной орбите
- Алгоритм обеспечивает достижение необходимых для стыковки условий для относительного положения и ориентации космического аппарата
- При ограничениях на величину управления достижение требуемого положения может не быть достигнуто с помощью предложенного алгоритма в зависимости от углового движения объекта

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-31-90072

Спасибо за внимание!