# Полуаналитические методы проектирования квазиспутниковых орбит

Студент: Адыгезалов Н. Э. [1]

Научный руководитель: Широбоков М. Г. [2]

[1]Московский физико-технический институт

[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

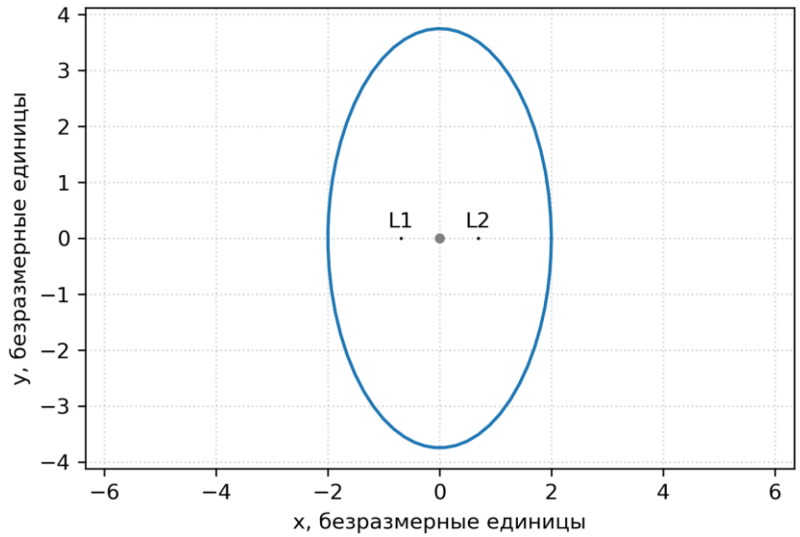
# Содержание

- Введение и цель работы
- Метод Хори–Депри
- Задача Хилла и переход к новым переменным
- Применение метода Хори–Депри для построения квазиспутниковых орбит в модели задачи Хилла
- Заключение

# Введение

- Квазиспутниковыми орбитами называют орбиты в рамках ограниченной задачи трех тел, расположенные вне сферы Хилла тела меньшей массы и с ретроградным движением вокруг тела меньшей массы

- Такие траектории не имеют простых методов проектирования и компактных аналитических выражений, что делает сложным решение оптимизационных задач с их участием



# Различные подходы к проектированию квазиспутниковых орбит

- *М.Л. Лидов* и *М.А. Вашковьяк* рассматривали построение квазиспутниковых орбит в эллиптической ограниченной задаче трех тел, применяя метод Хори–Деприи

- *M. Lara* также использовал  этот метод, а также метод Линдштедта–Пуанкаре в задаче Хилла и построил возмущенное решение до высоких порядков

- *D. Benest* использовал метод вариации параметров для исследования квазиспутниковых орбит в плоской задаче Хилла

# Цели работы

- Описать метод Хори–Деприи и применить его для построения квазиспутниковых орбит

- С помощью средств компьютерной алгебры получить выражения координат для построения квазиспутниковых орбит

- Сравнение этих выражений с квазиспутниковыми орбитами построенными численно

# Метод Хори–Депри

Есть гамильтониан системы:

$$H = H_0 + D = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_{m,0}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

Каноническое преобразование переменных:

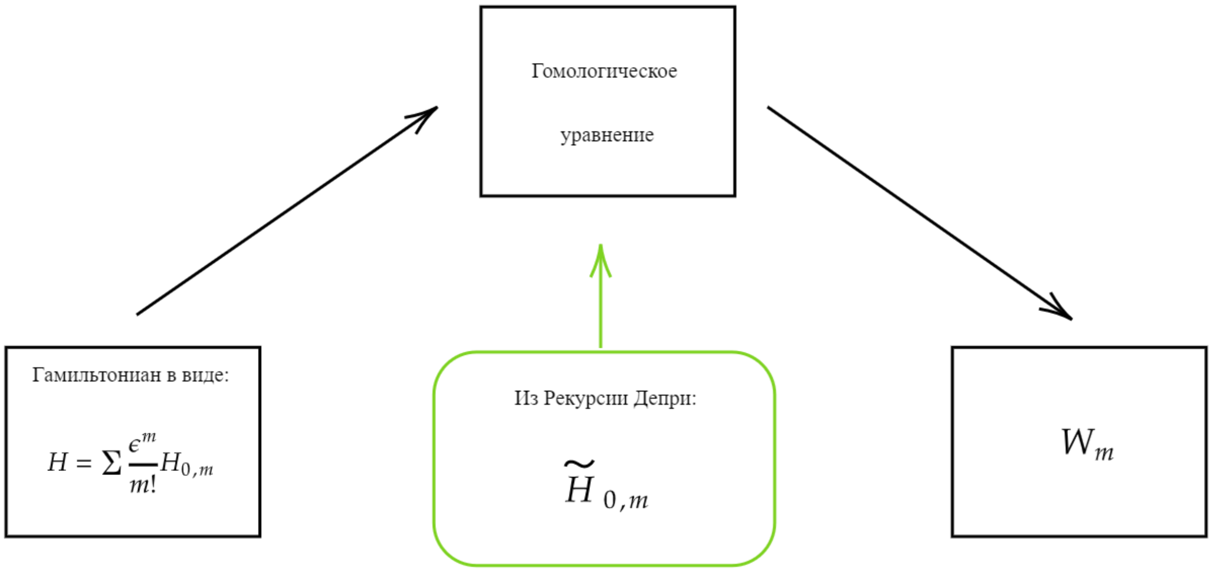
$$\varphi : (q, p) \to (Q, P; \epsilon)$$

Результат действия описанного канонического преобразования:

$$\varphi \circ H = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_{0,m}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$$

Порядок нижних индексов будет важен

# Схема метода




$L(W_m) = \widetilde{H}_{0,m} - H_{0,m}$ – гомологическое уравнение

$F_{n,q} = F_{n+1,q-1} + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \{F_{n-m,q-1}; W_{m+1}\}$ – рекурсия Депри

$H_{0,m}$ – выбирается

# Задача Хилла

Гамильтониан: $$H = H_0 - \frac{\mu}{r} = \frac{(p_x+\omega y)^2}{2} + \frac{(p_y-\omega x)^2}{2} - \frac{3\omega^2 x^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

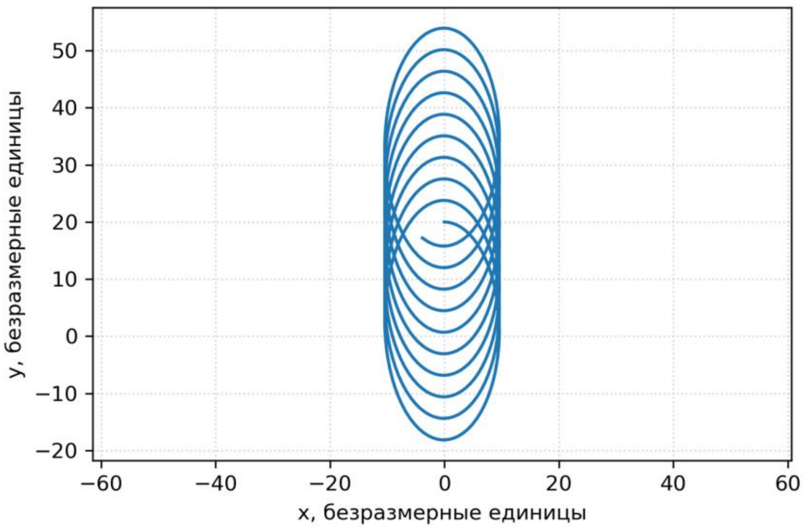
Замена координат: $$(x, y, p_x, p_y) \to (\phi, q, p_\phi, p_q; \omega, k) : \begin{cases} x = a\xi + b\sin\phi \\ y = a\eta + a\cos\phi \\ p_x = -2B\eta - B\cos\phi \\ p_y = -B\xi - B\sin\phi \end{cases}$$

$$a = 2b,\ b = \sqrt{2p_\phi\omega},\ B = \omega b,\ \xi = \frac{p_q}{2kB},\ \eta = \frac{kq}{b}$$

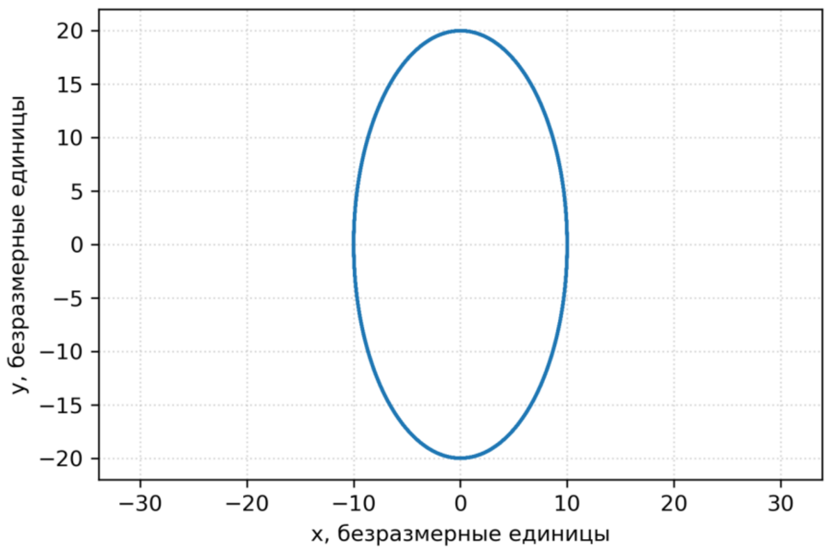
Гамильтониан в новых переменных без возмущения: $$H_0 = \omega p_\phi - \frac{3}{8}\left(\frac{p_q}{k}\right)^2$$

Решения уравнений Гамильтона: $$\phi = \phi_0 + \omega t \qquad q = q_0 - \frac{3}{4k^2}p_q t$$

# Дрейф центра эллипса




Начальные условия: [0,20,10,-0.2]




Начальные условия: [0.1,20,10,-0.2]

Условие периодичности: $p_q = v_y + 2\omega x \quad \longrightarrow \quad v_{y0} = -2\omega x_0$

# Гамильтониан в новых переменных

$$H = \omega p_\phi \ (1 - 3\xi^2 - \ \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta^2 + \xi \sin\phi + 2\eta\cos\phi + \xi^2 + \eta^2}})$$

$$\Delta = \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\phi} \qquad \gamma = \frac{\mu}{a\omega p_\phi}$$

В нашем случае $H_{0,0} = \omega p_\phi$ .

Из гомологического уравнения: $L(W_m) = \omega \frac{\partial W_m}{\partial \phi} = \widetilde{H}_{0,m} - H_{0,m} \to W_m = \frac{1}{\omega}\int \widetilde{H}_{0,m} - H_{0,m} \ d\phi.$

$$\eta = \mathcal{O}(\epsilon),\ \xi = \mathcal{O}(\epsilon^2),\ \gamma = \mathcal{O}(\epsilon^4) \qquad \epsilon \to 0$$

```
In [1]: import sympy as smp
        import numpy as np
```

```
In [3]: def poissonbracket(f,g,pa,qa): # функция реализующая скобку Пуассона в определенном базисе импульсов и координат
            n = pa.shape[0]
            pba=smp.zeros(1,n)
            for i in range(n):
                pba[i]=(smp.diff(f,pa[i])*smp.diff(g,qa[i]))-(smp.diff(f,qa[i])*smp.diff(g,pa[i]))
            pb = np.sum(pba)
            return pb
```

**Пример:**

```
In [4]: p1,p2,p3,q1,q2,q3 = smp.symbols('p1,p2,p3,q1,q2,q3')
        pa= smp.Matrix([p1,p2,p3])
        qa= smp.Matrix([q1,q2,q3])
        f, g = smp.symbols('f g', cls=smp.Function)
        f = p1**2+p2**2+p3**2
        g = q1**2+q2**2 * p2**2 + q3**2
        poissonbracket(f,g,pa,qa)
```

Out[4]: $4p_1q_1 + 4p_2^3q_2 + 4p_3q_3$

В наших выкладках и в целом $H_{0,m}$ часто выбирается как $\langle \widetilde{H}_{0,m} \rangle$ по определенной переменной.

```
In [5]: def average(function,variable,T): # функция реализуюшая осреднение функции по переменной
            avg=(1/T)*(smp.integrate(function, (variable,0, T)))
            return avg
```

**Пример:**

```
In [5]: sp1=smp.sin(p1)
        pi = smp.pi
        d = (1 - smp.Rational(3,4)*sp1**2)
        average(1/(d)**(1/2),p1,2*pi)
```

Out[5]: $\frac{2K\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi}$

# Задача Хилла

# Преобразованный гамильтониан

Гамильтониан после преобразований:
$$H' = \omega P_\phi - \frac{1}{2}\left(P_q^2 + \Omega^2 Q^2\right)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mu}{b^3}\left(\widetilde{K} - \widetilde{E}\right)}$$

Уравнения Гамильтона принимают вид:
$$\frac{dQ}{dt} = -P_q$$

$$\frac{dP_q}{dt} = \Omega^2 Q$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_\phi}$$

# Полученные уравнения

Решения уравнений Гамильтона:

$$Q = Q_0 \cos \Omega t - \frac{P_{q0}}{\Omega} \sin \Omega t$$

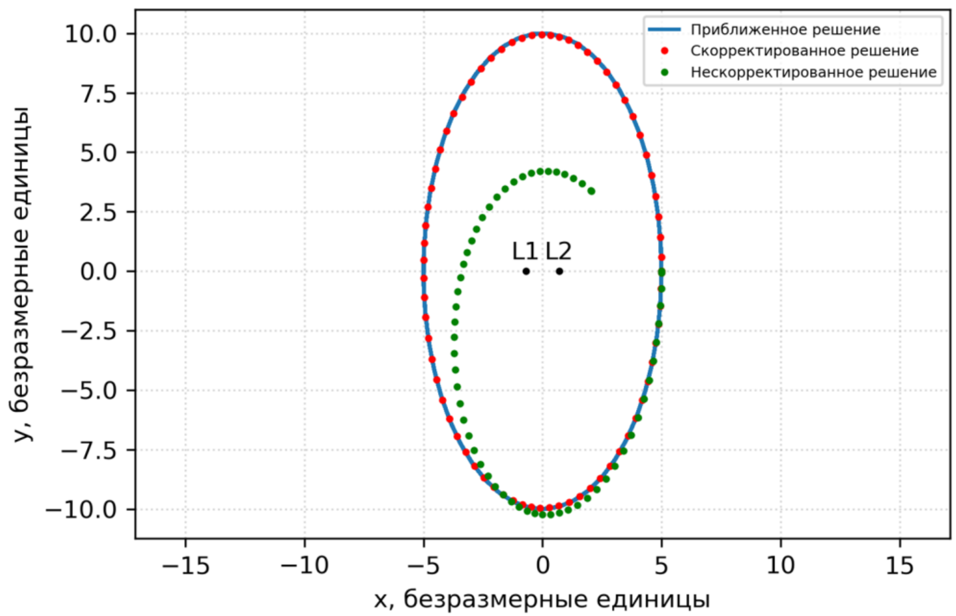
$$P_q = P_{q0} \cos \Omega t - Q_0 \Omega \sin \Omega t$$

$$\Phi = \Phi_0 + \omega(1+\delta)t + \frac{\Omega}{\omega}\left(p(t) - p(0)\right)$$

$$\delta = \frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(\frac{\widetilde{K}}{\widetilde{K} - \widetilde{E}} + \frac{Q_0^2 + (Q_0/\Omega)^2}{4b^2}\right)$$

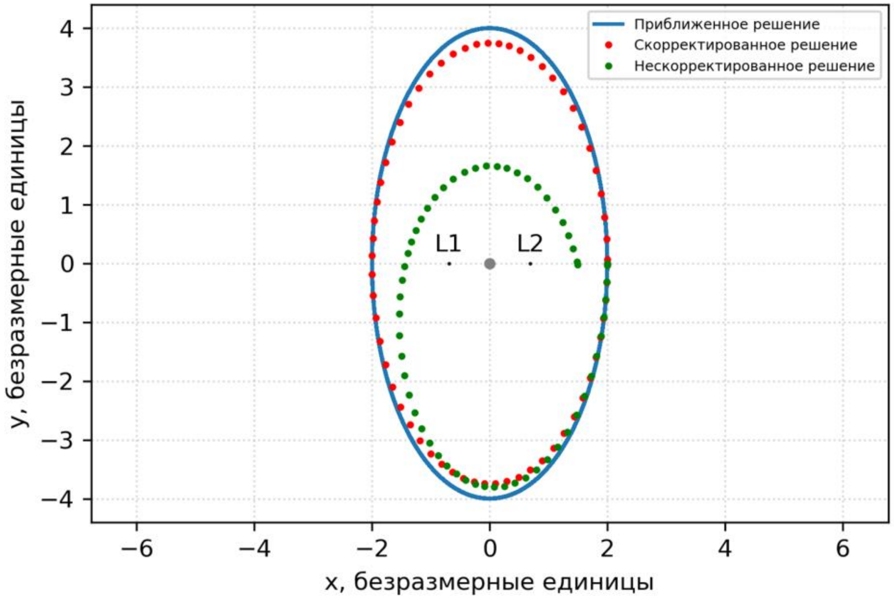
$$p = \frac{3Q_0 P_{q0}}{4b^2\Omega} \cos 2\Omega t + \frac{Q_0^2 - (P_{q0}/\Omega)^2 P_{q0}}{8b^2} \sin 2\Omega t$$

# Пример квазиспутниковой орбиты




Начальные условия:
[5,0,0,-10]– для приближенного решения
[5,0,0,-10.01998553]– для скорректированного решения

# Пример квазиспутниковой орбиты вокруг Луны




Начальные условия:
[2,0,0,-4.12326815]– для скорректированного решения
[2,0,0,-4]– для приближенного решения

1 безразмерная единица расстояния ≈ 88449.05 км
1 безразмерная единица времени ≈ 4,35 суток

# Заключение

- Освоен метод Хори–Деприт для построения квазиспутниковых орбит в задаче Хилла

- Получены выражения для возмущенного решения до 7-го порядка

- На языке Python продемонстрирован вывод необходимых разложений

- Сравнены квазиспутниковые орбиты построенные численно с начальными условиями уточненными методом дифференциальной коррекции и квазиспутниковые орбиты построенные по приближенным выражениям

# Рекурсия Депри

При дальнейших выкладках будет полезна формула так называемой рекурсии Депри:

$$F_{n,q+1} = F_{n+1,q} + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \{F_{n-m,0}; W_{m+1}\}$$

Примеры :

$$F_{1,1} = F_{2,0} + \binom{1}{0} \{F_{1,0}; W_1\} + \binom{1}{1} \{F_{0,0}; W_2\}$$

$$F_{0,1} = F_{1,0} + \{F_{0,0}; W_1\}$$

В наших выкладках роль функции $F$ будет играть $H$ :

$$H_{0,1} = H_{1,0} + \{H_{0,0}; W_1\} \Rightarrow \{W_1; H_{0,0}\} = \widetilde{H}_{0,1} - H_{0,1}$$

# Треугольник Депри

$$
\textbf{Известны}\left\{
\begin{array}{lllll}
F_{0,0} & \multicolumn{3}{l}{\overbrace{F_{0,1} \quad F_{0,2} \quad F_{0,3}}^{\textbf{Требуется найти}}} & \cdots \\
F_{1,0} & F_{0,3} & F_{0,3} & \cdots & \\
F_{1,0} & F_{0,3} & \cdots & & \\
F_{3,0} & \cdots & & &
\end{array}
\right.
$$

$$\vdots$$

$$F_{1,1} = F_{2,0} + \binom{1}{0}\{F_{1,0}; W_1\} + \binom{1}{1}\{F_{0,0}; W_2\}$$

$$F_{0,1} = F_{1,0} + \{F_{0,0}; W_1\}$$

# Гомологическое уравнение

В этой формуле $H_{0,0}$ и $\widetilde{H}_{0,1} = H_{1,0}$ известные функции $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , но $H_{0,1}$ выбирается нами для упрощения выкладок, а вот $W_1$ выражается после раскрытия скобки Пуассона и решения уравнения в частных производных.

Обобщением данной формулы является так называемое гомологическое уравнение :

$$L(W_m) = \widetilde{H}_{0,m} - H_{0,m}$$

Здесь $L(\cdot) = \{\cdot; H_{0,0}\}$ – производная Ли, правда, $\widetilde{H}_{0,m}$ будут выглядеть не так просто.

# Система интегрируемая численно

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 2v_y + 3x - \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -2v_x - \frac{y}{r^3}$$

**L1 –** $(-3^{1/3}, 0)$

**L2 –** $(3^{1/3}, 0)$

Безразмерная система единиц, такая что $\mu = 1$ и $\omega = 1$.

Единица длины $\left(\frac{\mu}{n^2}\right)^{1/3}$

Единица времени $1/n$

Формулы для перевода: $v_x = p_x + \omega y$

$$v_y = p_y - \omega x$$

$$p_q = v_y + 2\omega x$$

$$2\omega p_\phi = v_x^2 - (2v_y + 3\omega x)^2$$

# Разложение возмущения

Возмущающая часть гамильтониана: $$D = \omega p_\phi(-3\xi^2 - \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta^2 + \xi s + 2\eta c + \xi^2 + \eta^2}})$$

Первые члены разложения: $$H_{1,0} = H_{2,0} = H_{3,0} = 0$$

Далее разложение осуществим с помощью SymPy, которая является библиотекой Python для выполнения символьных вычислений