



**Построение управления относительным движением группы
спутников на основе коммуникационных графов**
(бакалаврская квалификационная работа)

Студент: Дадашев Р.Р.
Научный руководитель: Шестаков С.А.

Москва, 2022

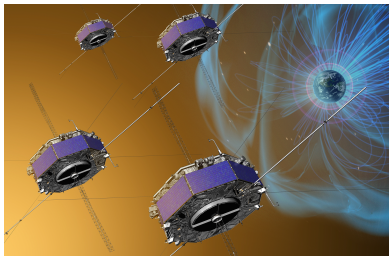
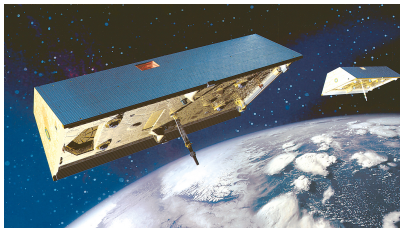
Содержание

- Введение и мотивация работы
- Управление относительным движением
- Метод на основе неориентированного графа
- Метод на основе ориентированного, взвешенного графа
- Заключение

Мотивация работы

Миссии:

- Magnetospheric Multiscale Mission (MMS).
- Миссия LISA.
- Миссия GRACE.



При групповом полете возникает разлёт спутников в группе.
Необходимо управление, удерживающее группу.

Постановка задачи

- В группе n спутников.
- Спутники бывают материнскими и дочерними. Материнские спутники больше дочерних и имеют возможность принимать сигнал на больших расстояниях, в отличие от дочерних.
- Спутники вращаются на околоземных, околокруговых, близких орбитах. Рассматривается движение тел с учетом влияния второй гармоники геопотенциала Земли.

Построить управление движением группы спутников, обнуляющее относительный дрейф.

Применение линейной модели

- Опорный аппарат не на круговой орбите.
- Существует точка на фиктивной круговой орбите удовлетворяющая условию близости для главного и ведомого аппарата. Относительно неё рассматриваются уравнения ХКУ. Движение описывается решением ХКУ. Уравнения линейны и однородны – разность двух решений есть решение.
- Использовать линейную модель нужно относительно опорного аппарата.

$$\ddot{x} + 2\omega\dot{z} = 0$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

$$\ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = 0$$

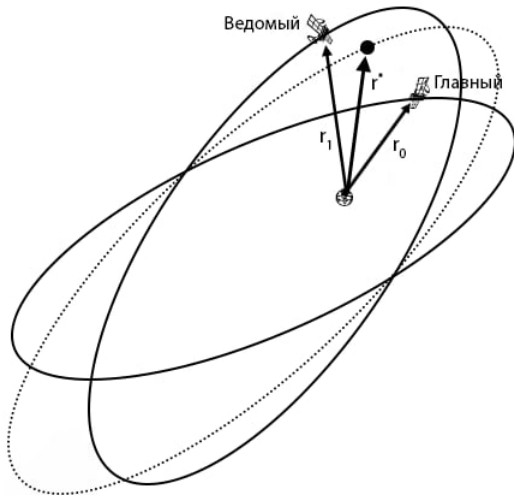
$$x(t) = -3C_1\omega t + 2C_2 \cos(\omega t) + 2C_3 \sin(\omega t) + C_4$$

$$y(t) = C_5 \cos(\omega t) + C_6 \sin(\omega t)$$

$$z(t) = 2C_1 + C_2 \sin(\omega t) - C_3 \cos(\omega t)$$

C_1 - параметр дрейфа

Применение линейной модели



Управление относительным движением одного спутника

Функция Ляпунова:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} = u_x \\ \ddot{y} + \omega^2 y = u_y \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = u_z \end{cases}$$
$$C_1 = \frac{\dot{x}}{\omega} + 2z \Rightarrow \dot{C}_1 = \frac{u_x}{\omega}$$

$$V = C_1^2 \Rightarrow \dot{V} = 2C_1\dot{C}_1 = 2C_1\frac{u_x}{\omega}$$

Теорема Барбашина-Красовского:

$$\dot{V} \leq 0 \Rightarrow \dot{V} = -kC_1^2$$

$$\dot{C}_1 = -kC_1$$

Формирование коммуникационных графов

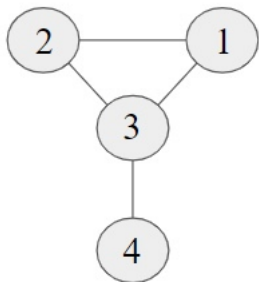
Параметр дрейфа необходимо сделать не 0, а одинаковым для всей группы, а значит спутникам необходимо учитывать параметры дрейфа других аппаратов в группе.

$$C_1 = (C_1^1, C_1^2, \dots, C_1^n)$$

Коммуникационный граф:

- Вершина - спутник
- Ребро - связь спутника с другим спутником (учёт в управлении параметров другого спутника)

Метод на основе неориентированного графа



$D(G)$ – матрица степеней вершин

$A(G)$ – матрица смежности

Лапласиан графа:
 $L(G) = D(G) - A(G)$

$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in V(i) \\ 0, & j \notin V(i) \end{cases}$$

Критерий сходимости

Лапласиан графа $L(G)$ симметричен и положительно полуопределен:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

G – связный $\Leftrightarrow \lambda_2 > 0$ [1]

$$\dot{C}_1 = -kC_1 \xrightarrow[\text{от одного спутника к группе аппаратов}]{\text{переход}} \dot{C}_1 = -kLC_1$$

Полученное управление обеспечивает асимптотическую устойчивость движения.

[1] Mehran Mesbahi, Magnus Egerstedt. "Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks"

Управление по среднему арифметическому дрейфов

$$[2] S_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{N_i}, & i \neq j, j \in V_i \\ 0, & i \neq j, j \notin V_i \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Нормализованный лапласиан:

$$Q = D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}}$$

Матрица управления:

$$S = D^{-\frac{1}{2}} Q D^{\frac{1}{2}}$$

Собственные значения матриц

Q и S совпадают

N_i – количество соседей i -го спутника.

V_i – множество соседей i -го спутника.

Нормализованный лапласиан симметричен и положительно полуопределен:

$$0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$$

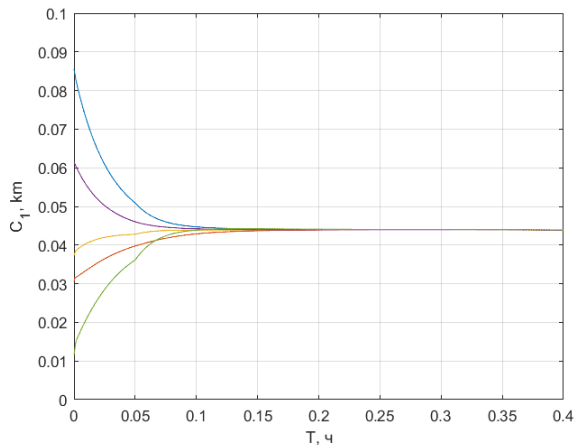
G – связный $\Leftrightarrow \mu_2 > 0$ [3]

[2] Uliana Monakhova, Danil Ivanov, Yaroslav Mashtakov, Sergey Shestakov. "Communication Area Estimation for Decentralized Control of Nanosatellites Swarm"

[3] Fan Chung. "Spectral Graph Theory"

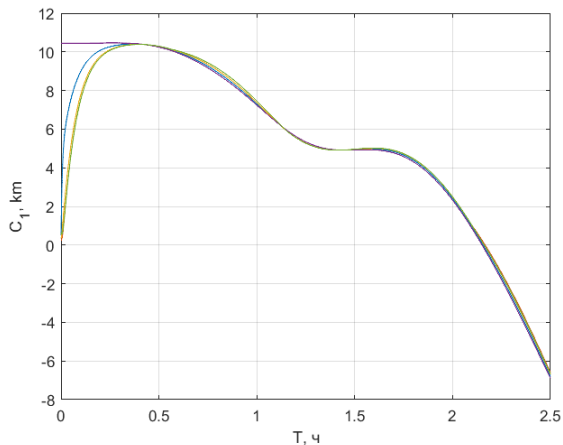
Начальные условия, при которых дрейф обнуляется

$$\left\{ \begin{array}{l} i_0 = 40^\circ \\ u_0 = 5^\circ \\ \Omega_0 = 20^\circ \\ R_0 = 500 \text{ км} \\ \sigma_{x,y,z} = \pm 10 \text{ м} \\ \sigma_{v_x, v_y, v_z} = \pm 0.001 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{array} \right.$$



Начальные условия, при которых дрейф не обнуляется

$$\left\{ \begin{array}{l} i_0 = 40^\circ \\ u_0 = 5^\circ \\ \Omega_0 = 20^\circ \\ R_0 = 500 \text{ км} \\ \sigma_{x,y,z} = \pm 1000 \text{ м} \\ \sigma_{v_x, v_y, v_z} = \pm 0.001 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{array} \right.$$



Метод на основе ориентированного графа

Матрица смежности:

$$A_{ij} = \begin{cases} -\alpha_{ij}, & j \in V_i \\ 0, & j \notin V_i \end{cases}$$

$$\alpha_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_{max}^i}$$

Матрица степеней вершин:

$$D_{ij} = \sum_j \alpha_{ij}$$

V_i – множество соседей i -го спутника

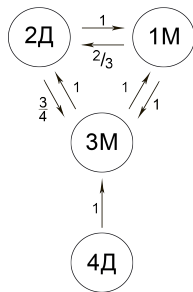
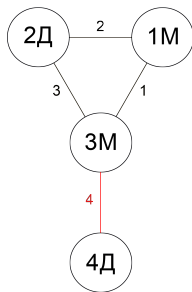
S_{ij} – расстояние между спутниками i и j

S_{max}^i – максимальное расстояние между i спутником и его соседями

Если i -ый и j -ый спутники главные, то: $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = 1$

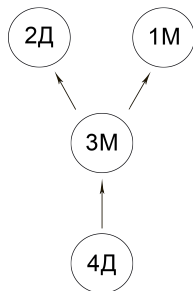
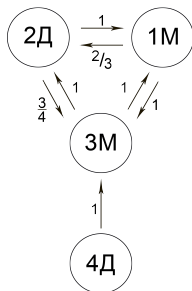
Лапласиан графа: $L(G) = D(G) - A(G)$

Пример формирования матрицы Лапласа



$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -1 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Критерий сходимости



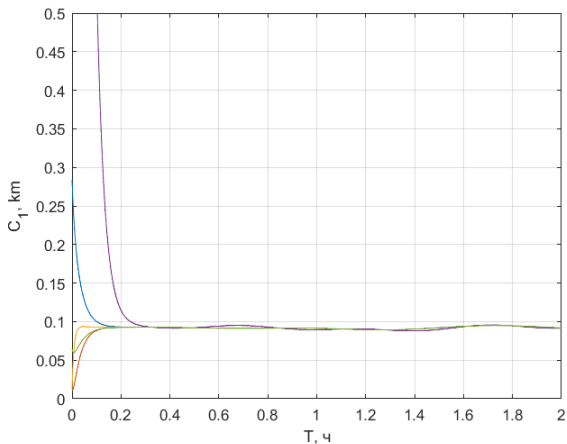
Если ориентированный граф имеет корневое дерево [1]

$$\dot{C}_1 = -kLC_1$$

[1]Mehran Mesbahi, Magnus Egerstedt. "Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks"

Управление на основе ориентированного графа обнуляет дрейф

$$\left\{ \begin{array}{l} i_0 = 40^\circ \\ u_0 = 5^\circ \\ \Omega_0 = 20^\circ \\ R_0 = 500 \text{ км} \\ \sigma_{x,y,z} = \pm 1000 \text{ м} \\ \sigma_{v_x, v_y, v_z} = \pm 0.001 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{array} \right.$$



Относительные орбиты в ОСК

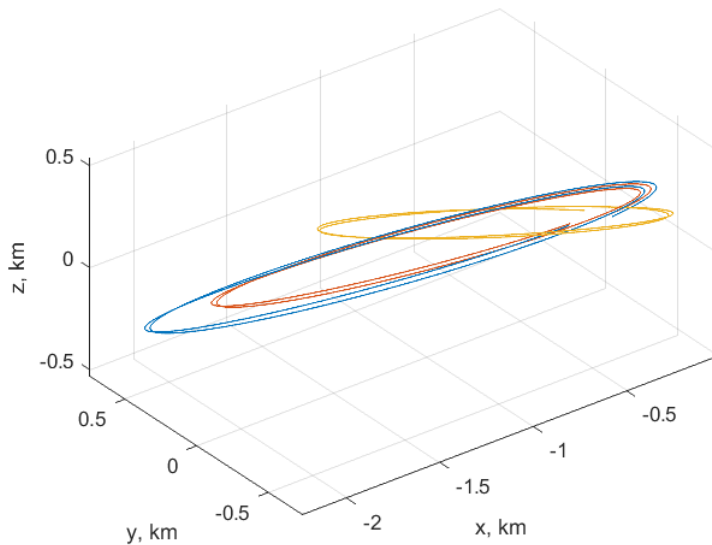


График функции разности неориентированного и ориентированного графа

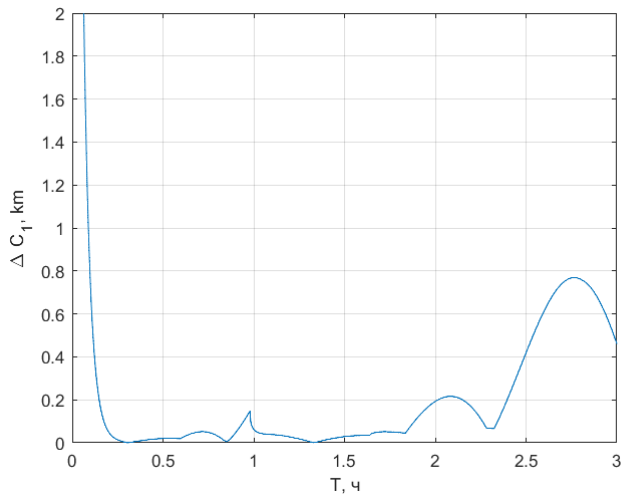
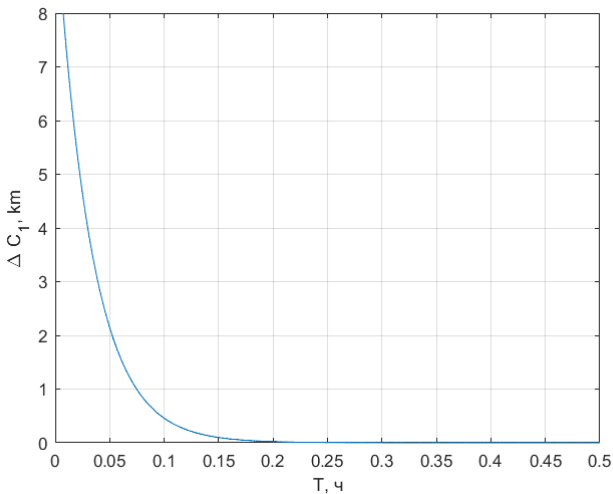
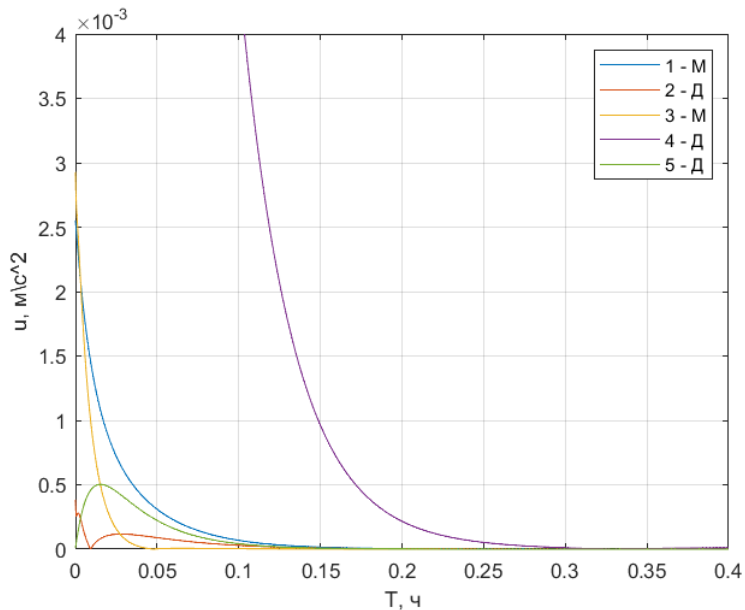


График функции разности неориентированного и ориентированного графа



Управляющее воздействие



Заключение

- Промоделировано управление на основе неориентированного графа
- Получено и исследовано управление на основе ориентированного графа
- Найдены необходимые и достаточные условия для обеспечения сходимости дрейфа к нулю в управляемом движении

Найдены конфигурации, для которых управление на основе ориентированного графа обеспечивает сходимость дрейфа к нулю, а управление на основе неориентированного графа не обеспечивает

Проблемы метода ориентированного графа

