

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ–ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени бакалавра  
по направлению 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,  
профиль подготовки «Математическое моделирование,  
вычислительная математика и физика»

## **Метод Чебышева–Пикара для решения краевых задач астродинамики**

Выполнила:  
студентка группы 771  
*Мыльникова*  
*Ольга Михайловна*

---

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент  
*Широбоков*  
*Максим Геннадьевич*

---

Москва, 2021

## **Аннотация**

Работа посвящена разработке неградиентного варианта метода параллельной пристрелки на основе метода Чебышева–Пикара решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Описаны актуальность и новизна предлагаемого подхода для механики космического полета, приводится алгоритм предлагаемого метода параллельной пристрелки. Работа метода Чебышева–Пикара демонстрируется на примерах решения краевых задач механики космического полета, в частности – на примере задачи Ламберта и на примере адаптации низкоэнергетической траектории перелета от Земли к Луне в рамках высокоточной модели движения космического аппарата.

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>1. Метод Чебышева–Пикара</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1. Описание алгоритма для системы ОДУ 1-го порядка . . . . .	7
1.2. Описание алгоритма для системы ОДУ 2-го порядка . . . . .	9
1.3. Реализация метода . . . . .	12
<b>2. Метод параллельной пристрелки</b> . . . . .	<b>14</b>
2.1. Обновление положения и скорости . . . . .	14
2.2. Описание алгоритма . . . . .	16
<b>3. Применение</b> . . . . .	<b>19</b>
3.1. Задача Ламберта . . . . .	19
3.2. Адаптация WSB-траектории перелета от Земли к Луне . . . . .	21
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>Приложение</b> . . . . .	<b>27</b>
А. Итерации Пикара . . . . .	27
Б. Полиномы Чебышева . . . . .	28

## Введение

Оптимизация межпланетных перелетов часто сводится к численному решению краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Существующие методы решения краевых задач, такие как метод конечных разностей и методы пристрелки, хотя и доказали эффективность в ряде задач, тем не менее обладают своими недостатками. Проблемы возникают в том случае, когда гравитационное поле небесного тела, около которого движется космический аппарат (КА), имеет достаточно сложный вид. К таким объектам можно отнести Луну, представляющую в настоящее время особый интерес для исследований. Применение метода конечных разностей для решения данной задачи требует формирования сетки высокой плотности и, как следствие, обращения матриц больших размеров, в результате чего задействуются дополнительные вычислительные ресурсы компьютера. В методах пристрелки приходится сталкиваться с проблемой расчета градиента функций правых частей уравнений движения. Слишком грубая оценка производных не позволяет достичь требуемой точности решения задачи.

Вычислительные трудности в конечноразностных методах и сложности формирования градиента в методах пристрелки заставляют искать новые пути решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Это наводит на мысли о том, что неплохо было бы иметь неградиентный метод решения систем нелинейных уравнений, к которым сводятся краевые задачи для уравнений движения космического аппарата. Класс методов, основанный на принципе сжимающих отображений – главный и практически единственный класс методов, подходящий под это описание. Среди методов, которые опираются на принцип сжимающих отображений, важное место занимает метод Чебышева–Пикара. Этот метод позволяет решать не только краевые задачи, но и задачи Коши и уже оправдал ожидания в астродинамике.

В 1963 году появилось первое упоминание о методе Чебышева–Пикара, основная идея которого состоит в том, чтобы аппроксимировать правые части уравнений суммой из полиномов Чебышева первого рода, а затем проинтегрировать систему уравнений в итерациях Пикара [1]. С тех пор метод изучался и разрабатывался в различных направлениях. Существует множество работ, в

которых поднимаются вопросы скорости сходимости метода, производится сравнение в эффективности с другими методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 3, 4]. Существует и векторно-матричная формулировка метода Чебышева–Пикара [5], что подчеркивает его параллельную структуру и позволяет сократить вычислительное время при использовании графических процессоров [6, 7]. Продемонстрированы результаты работы метода на конкретных краевых задачах и задачах Коши в области космической механики [8, 9, 10]. Последние исследования показывают, что метод Чебышева–Пикара представляет интерес и по сей день.

Главным недостатком метода Чебышева–Пикара является ограниченная область сходимости. В литературе можно встретить модификацию метода с использованием регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля [11]. Это позволяет расширить область сходимости с одной трети витка орбиты до почти полного витка орбиты. Расчеты проводились на примере возмущенной задачи Ламберта.

В данной работе изучается другой способ борьбы с проблемой ограниченности области сходимости метода Чебышева–Пикара. Метод параллельной пристрелки (в методе Чебышева–Пикара) в целях расширения области сходимости не встречается в литературе, но представляется наиболее привлекательным, так как это бы соединило высокую эффективность метода параллельной пристрелки и «неградиентность» метода Чебышева–Пикара. Работа [12] по применению метода к дифференциальной коррекции идейно близка к тому, что хотелось бы сделать, но в ней метод Чебышева–Пикара используется лишь для расширения области сходимости метода пристрелки, который в свою очередь требует рассчитывать градиент функций уравнений движения.

Целью настоящей работы является разработка и реализация неградиентного варианта метода параллельной пристрелки на основе метода Чебышева–Пикара. Работа алгоритма демонстрируется на примере модельной задачи Ламберта в невозмущенной постановке задачи двух тел и на примере адаптации низкоэнергетической траектории перелета от Земли к Луне в рамках высокоточной модели движения космического аппарата.

Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка исполь-

зованной литературы. В первой главе подробно описан алгоритм метода Чебышева–Пикара для решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Во второй главе представлено описание неградиентного варианта метода параллельной пристрелки, разработанного на основе метода Чебышева–Пикара. В последней главе представлено приложение метода к модельным и реальным задачам космической механики. В заключении сделаны выводы о проделанной работе.

# 1. Метод Чебышева–Пикара

В данной главе рассказывается об основной идее метода Чебышева–Пикара – об использовании полиномов Чебышева в итерациях Пикара. Формальное описание алгоритма проводится для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, а затем обобщается для систем второго порядка. Реализация метода Чебышева–Пикара рассматривается на примере модельной задачи Ламберта в невозмущенной постановке задачи двух тел. Общие теоретические сведения об итерациях Пикара и полиномах Чебышева вынесены в Приложение.

## 1.1 Описание алгоритма для системы ОДУ 1-го порядка

Рассматривается алгоритм работы метода Чебышева–Пикара на примере решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (1.1.1)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (1.1.2)$$

Шаг 1 (преобразование времени): выполняется переход от переменной  $t \in [t_0, t_f]$  к переменной  $\tau \in [-1, 1]$ , так как полиномы Чебышева первого рода определены в этом интервале

$$t = \omega_1 + \omega_2\tau, \quad \omega_1 = \frac{t_0 + t_f}{2}, \quad \omega_2 = \frac{t_f - t_0}{2}, \quad \tau \in [-1, 1], \quad (1.1.3)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \omega_2.$$

Тогда задача Коши (1.1.1)–(1.1.2) преобразуется

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{g}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) \equiv \omega_2 \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \tau \in [-1, 1], \quad (1.1.4)$$

$$\mathbf{x}(-1) = \mathbf{x}_0. \quad (1.1.5)$$

Шаг 2 (итерации Пикара): записывается последовательность решений задачи Коши в итерациях Пикара (А.3)

$$\mathbf{x}^i(\tau) = \mathbf{x}_0 + \int_{-1}^{\tau} \mathbf{g}(s, \mathbf{x}^{i-1}(s)) ds. \quad (1.1.6)$$

Шаг 3 (полиномы Чебышева): функции правых частей аппроксимируются  $N$  первыми полиномами Чебышева первого рода (Б.1)

$$\mathbf{g}(s, \mathbf{x}^{i-1}(s)) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{F}_k^{i-1} T_k(s) \quad (1.1.7)$$

в  $(M + 1)$  временных узлах (Б.3)

$$\tau_j = -\cos \frac{j\pi}{M}, \quad k = 0, 1, \dots, M. \quad (1.1.8)$$

Используется свойство ортогональности полиномов Чебышева первого рода в дискретном случае (Б.2), чтобы вычислить коэффициенты разложения (Б.6)–(Б.7)

$$\mathbf{F}_k^{i-1} = \sum_{j=0}^M V_{kj} W_{kj} \mathbf{g}(\tau_j, \mathbf{x}^{i-1}(\tau_j)) T_k(\tau_j), \quad (1.1.9)$$

где  $W = \text{diag}\{\frac{1}{2}, 1, \dots, 1, \frac{1}{2}\}$ ,  $V = \text{diag}\{\frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \dots, \frac{2}{M}, \frac{1}{M}\}$  при  $M = N$  или  $V = \text{diag}\{\frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \dots, \frac{2}{M}, \frac{2}{M}\}$  при  $M > N$ .

При интегрировании функций правых частей порядок аппроксимации решения повышается на единицу. Решение аппроксимируется  $(N + 1)$  первыми полиномами Чебышева первого рода

$$\mathbf{x}^i(\tau) = \sum_{k=0}^N \beta_k^i T_k(\tau) = \mathbf{x}_0 + \int_{-1}^{\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{F}_k^{i-1} T_k(s) ds. \quad (1.1.10)$$

Используется свойство интегрирования полиномов Чебышева первого рода (Б.4), чтобы связать неизвестные коэффициенты разложения  $\beta_k^i$  по уже найденным  $\mathbf{F}_k^{i-1}$

$$\beta_0^i = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \beta_k^i, \quad (1.1.11)$$

$$\beta_1^i = \frac{1}{2} (2\mathbf{F}_0^{i-1} - \mathbf{F}_2^{i-1}), \quad (1.1.12)$$

$$\beta_k^i = \frac{1}{2k} (\mathbf{F}_{k-1}^{i-1} - \mathbf{F}_{k+1}^{i-1}), \quad k = 2, 3, \dots, N-2, \quad (1.1.13)$$

$$\beta_{N-1}^i = \frac{\mathbf{F}_{N-2}^{i-1}}{2(N-1)}, \quad (1.1.14)$$

$$\beta_N^i = \frac{\mathbf{F}_{N-1}^{i-1}}{2N}. \quad (1.1.15)$$



По коэффициентам  $\beta_k^i$  по формуле (1.1.10) восстанавливается искомое решение  $x^i(\tau)$ .

Шаг 4 (начальное приближение и критерий остановки):

Метод Чебышева–Пикара является итерационным. Необходимо знать некоторое стартовое решение  $x^0(t)$ , с которого запускается итерационный процесс. Важно помнить, что проблема задания начального приближения для такого класса методов лежит вне описания алгоритма работы самого метода.

Итерации проводятся до тех пор, пока решение не будет получено с требуемой точностью  $\varepsilon$ . Для этого нужно задать точность итерационного метода и определить для него критерий остановки.

## 1.2 Описание алгоритма для системы ОДУ 2-го порядка

Алгоритм метода Чебышева–Пикара обобщается для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x} = f(t, \dot{x}(t), x(t)), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (1.2.1)$$

Можно задать краевые условия типа положение-положение, положение-скорость и скорость-положение

$$x(t_0) = r_0, \quad x(t_f) = r_f, \quad (1.2.2)$$

$$x(t_0) = r_0, \quad \dot{x}(t_f) = v_f, \quad (1.2.3)$$

$$\dot{x}(t_0) = v_0, \quad x(t_f) = r_f, \quad (1.2.4)$$

или поставить задачу Коши

$$x(t_0) = r_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0. \quad (1.2.5)$$

Шаг 1 (преобразование времени): см. (1.1.3)

Система ОДУ (1.2.1) преобразуется

$$\ddot{x} = g(\tau, \dot{x}(\tau), x(t)) \equiv \omega_2^2 f(t, \dot{x}(t), x(t)), \quad \tau \in [-1, 1]. \quad (1.2.6)$$

Вводится обозначение  $v = \dot{x}$ .

Краевые (1.2.2)–(1.2.4) и начальные (1.2.5) условия принимают вид

$$x(-1) = r_0, \quad x(1) = r_f, \quad (1.2.7)$$

$$\mathbf{x}(-1) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(1) = \mathbf{v}_f, \quad (1.2.8)$$

$$\mathbf{v}(-1) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{r}_f, \quad (1.2.9)$$

$$\mathbf{x}(-1) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(-1) = \mathbf{v}_0. \quad (1.2.10)$$

Шаг 2 (итерации Пикара): см. (1.1.6)

$$\mathbf{v}^i(\tau) = \mathbf{v}(-1) + \int_{-1}^{\tau} \mathbf{g}(q, \mathbf{v}^{i-1}(q), \mathbf{x}^{i-1}(q)) dq, \quad (1.2.11)$$

$$\mathbf{x}^i(\tau) = \mathbf{x}(-1) + \int_{-1}^{\tau} \left( \mathbf{v}(-1) + \int_{-1}^s \mathbf{g}(q, \mathbf{v}^{i-1}(q), \mathbf{x}^{i-1}(q)) dq \right) ds. \quad (1.2.12)$$

Шаг 3 (полиномы Чебышева): см. (1.1.10)

$$\mathbf{v}^i(\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k^i T_k(\tau) = \mathbf{v}(-1) + \int_{-1}^{\tau} \sum_{k=0}^{N-2} \mathbf{F}_k^{i-1} T_k(q) dq, \quad (1.2.13)$$

$$\mathbf{x}^i(\tau) = \sum_{k=0}^N \alpha_k^i T_k(\tau) = \mathbf{x}(-1) + \int_{-1}^{\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k^i T_k(s) ds. \quad (1.2.14)$$

Функции правых частей аппроксимируются  $(N - 1)$  первыми полиномами Чебышева первого рода. После интегрирования порядок аппроксимации скорости становится равным  $N$ , а положения  $-(N + 1)$ .

Коэффициенты  $\mathbf{F}_k^{i-1}$  рассчитываются по формуле (1.1.9).

Коэффициенты  $\beta_k^i$  рассчитываются по формулам

$$\beta_0^i = \mathbf{v}(-1) + \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k+1} \beta_k^i, \quad (1.2.15)$$

$$\beta_1^i = \frac{1}{2} (2\mathbf{F}_0^{i-1} - \mathbf{F}_2^{i-1}), \quad (1.2.16)$$

$$\beta_k^i = \frac{1}{2k} (\mathbf{F}_{k-1}^{i-1} - \mathbf{F}_{k+1}^{i-1}), \quad k = 2, 3, \dots, N-3, \quad (1.2.17)$$

$$\beta_{N-2}^i = \frac{\mathbf{F}_{N-3}^{i-1}}{2(N-2)}, \quad (1.2.18)$$

$$\beta_{N-1}^i = \frac{\mathbf{F}_{N-2}^{i-1}}{2(N-1)}. \quad (1.2.19)$$

Коэффициенты  $\alpha_k^i$  рассчитываются по формулам

$$\alpha_0^i = \mathbf{x}(-1) + \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \alpha_k^i, \quad (1.2.20)$$

$$\alpha_1^i = \frac{1}{2}(2\beta_0^i - \beta_2^i), \quad (1.2.21)$$

$$\alpha_k^i = \frac{1}{2k}(\beta_{k-1}^i - \beta_{k+1}^i), \quad k = 2, 3, \dots, N-2, \quad (1.2.22)$$

$$\alpha_{N-1}^i = \frac{\beta_{N-2}^i}{2(N-1)}, \quad (1.2.23)$$

$$\alpha_N^i = \frac{\beta_{N-2}^i}{2N}. \quad (1.2.24)$$

По коэффициентам  $\beta_k^i$  восстанавливается скорость  $\mathbf{v}^i(\tau)$ , по коэффициентам  $\alpha_k^i$  восстанавливается положение  $\mathbf{x}^i(\tau)$ .

Если была поставлена задачи Коши (1.2.10), то решение явным образом находится из уравнений (1.2.15)–(1.2.24). Если была поставлена одна из краевых задач (1.2.5)–(1.2.9), то необходимо дополнить основные уравнения соответствующими условиями на краях

$$\mathbf{v}(-1) = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k^i T_k(-1), \quad (1.2.25)$$

$$\mathbf{v}(1) = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k^i T_k(1), \quad (1.2.26)$$

$$\mathbf{x}(-1) = \sum_{k=0}^N \alpha_k^i T_k(-1), \quad (1.2.27)$$

$$\mathbf{x}(1) = \sum_{k=0}^N \alpha_k^i T_k(1). \quad (1.2.28)$$

Шаг 4 (начальное приближение и критерий остановки): см. (1.2.29)

В данной работе используется следующий критерий остановки

$$\|\mathbf{x}^{i+1}(t) - \mathbf{x}^i(t)\| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{v}^{i+1}(t) - \mathbf{v}^i(t)\| < \varepsilon. \quad (1.2.29)$$

### 1.3 Реализация метода

Демонстрация работы алгоритма метода Чебышева–Пикара рассматривается на примере модельной задачи Ламберта в невозмущенной постановке задачи двух тел

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \\ \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f.\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

Расчеты выполняются на временном интервале  $[0, \pi/2]$  с краевыми условиями

$$\mathbf{r}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(t_f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\tag{1.3.2}$$

Порядок аппроксимации полиномами Чебышева первого рода и количество узлов по времени определяются

$$N = 10, \quad M = 10.\tag{1.3.3}$$

В качестве начального приближения необходимо подать матрицу положений и матрицу скоростей размера  $3 \times (M + 1)$  каждая. В данном случае подаются матрицы, компоненты которых являются равномерно распределенными случайными числами в интервале  $(0, 1)$ .

Используется безразмерная система единиц. За единицу измерения расстояния принимается радиус Земли  $R_0 = 6378.1$  км, а за единицу измерения скорости – первая космическая скорость  $V_0 = \sqrt{\mu/R_0} \approx 7.9$  км/с. Время измеряется в  $T_0 = R_0/V_0 \approx 806.8$  с.

Для демонстрации результатов работы метода Чебышева–Пикара на примере рассматриваемой задачи Ламберта (1.3.1)–(1.3.2) представлены графики, отражающие поведение положения и ошибки по положению лишь для нескольких первых итераций  $i = \overline{1, 6}$ . При увеличении числа итераций ошибка по положению становится порядка машинного нуля  $10^{-16}$ .

Ошибка численного метода высчитывается из разницы решения, полученного методом Чебышева–Пикара, и решения, которое выдает метод Дормана–Принса 5(4) (функция `ode45` в MATLAB) на интервалах  $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ ,  $j = \overline{0, M}$ , где в качестве начальных фазовых векторов берутся значения, полученные методом Чебышева–Пикара.

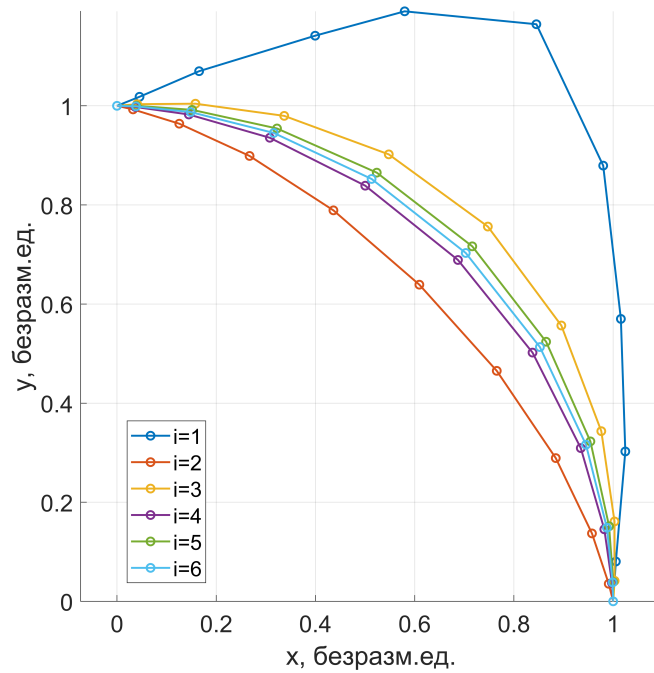


Рис. 1: Итерации метода Чебышева–Пикара для задачи Ламберта.

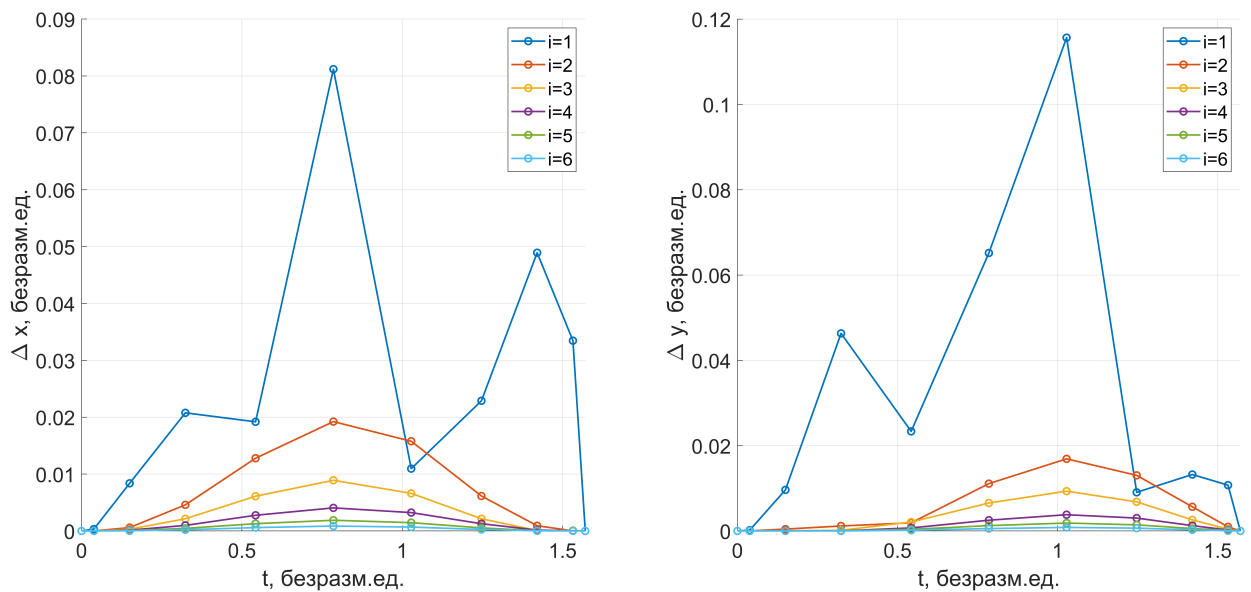


Рис. 2: Ошибки по положению в итерациях метода Чебышева–Пикара для задачи Ламберта.

Из Рис.2 можно сделать вывод, что использование метода Чебышева–Пикара обеспечивает в точности выполнение граничных условий (1.3.2) на каждой итерации алгоритма. Ошибка достигает максимума в серединной части интервала  $[t_0, t_f]$ . Стоит отметить, что даже для такой простой модель-

ной задачи метод Чебышева–Пикара сходится на временных интервалах не больше половины витка орбиты.

## 2. Метод параллельной пристрелки

В данной главе описан неградиентный вариант метода параллельной пристрелки, основанный на методе Чебышева–Пикара. Метод параллельной пристрелки рассматривается применительно к системам обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Заданы правила обновления положения и скорости, а также условие сшивки решения.

### 2.1 Обновление положения и скорости

Рассматривается краевая задача типа положение-положение

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t)), \quad (2.1.1)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{r}_f. \quad (2.1.2)$$

Вводятся обозначения  $\mathbf{r} = \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ .

Пусть на интервале  $[t_0, t_f]$  метод Чебышева–Пикара для конкретной задачи вида (2.1.1)–(2.1.2) не сходится. Расширение области сходимости путем использования метода параллельной пристрелки может разрешить ситуацию.

Шаг 0 (деление на подзадачи): временной интервал  $[t_0, t_f]$  делится на  $k$  частей

$$[t_0, t_f] : t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = t_f, \quad (2.1.3)$$

$$[t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (2.1.4)$$

Причем на каждом подынтервале (2.1.4) метод Чебышева–Пикара для краевых задач типа положение-положение, положение-скорость и скорость-положение (1.2.2)–(1.2.4) должен сходиться.

Шаг 1 (обновление скорости и сшивка по скорости): перед описанием шага необходимо ввести обозначения

$$\mathbf{v}_i^{i+1}(t_i) - \text{скорость вылета из точки } t_i \text{ в точку } t_{i+1}, \quad i = \overline{0, k-1},$$

$\mathbf{v}_i^{i-1}(t_i)$  – скорость влета в точку  $t_i$  из точки  $t_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

На каждом подынтервале  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0, k-1}$ , решается краевая задача типа положение-положение, в результате чего вычисляются  $\mathbf{v}_i^{i+1}(t_i)$  и  $\mathbf{v}_{i+1}^i(t_{i+1})$ . Правило обновления скорости можно представить в виде схемы (Рис.3).

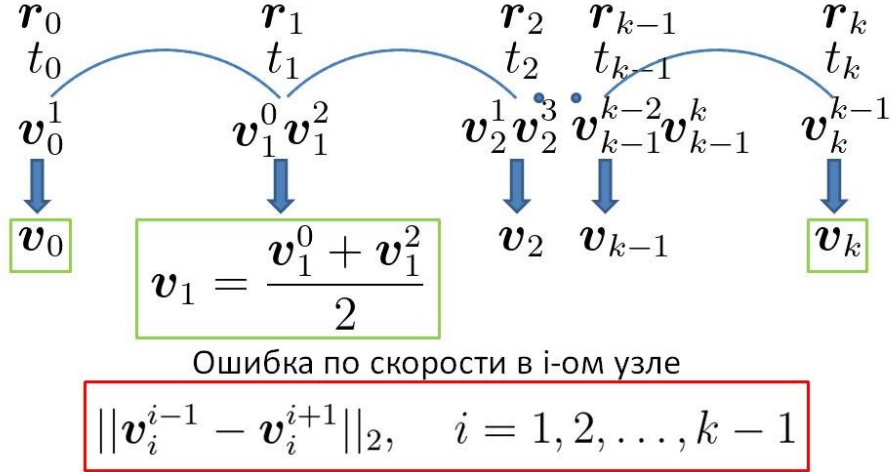


Рис. 3: Правило обновления скоростей.

В каждом внутреннем узле по времени считается евклидова норма (обозначается  $\|\cdot\|_2$ ) разности между скоростью влета и скоростью вылета

$$\|\mathbf{v}_i^{i-1} - \mathbf{v}_i^{i+1}\|_2, \quad i = 1, 2, \dots, k-1. \quad (2.1.5)$$

Условие сшивки решения по скорости с точностью  $\varepsilon$  можно записать как

$$\max_{i=\overline{1, k-1}} \|\mathbf{v}_i^{i-1} - \mathbf{v}_i^{i+1}\|_2 < \varepsilon. \quad (2.1.6)$$

Шаг 2 (обновление положения и сшивка по положению): перед описанием шага необходимо ввести обозначения

$\mathbf{r}_i^{i+1}(t_i)$  – положение КА, вылетающего из точки  $t_i$  в точку  $t_{i+1}$ ,  $i = \overline{0, k-1}$ ,

$\mathbf{r}_i^{i-1}(t_i)$  – положение КА, прилетающего в точку  $t_i$  из точки  $t_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

На каждом подынтервале  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0, k-1}$ , решаются две краевые задачи. Решение краевой задачи типа скорость–положение–положение дает  $\mathbf{r}_i^{i+1}(t_i)$ . Решение краевой задачи типа положение–скорость позволяет найти  $\mathbf{r}_{i+1}^i(t_{i+1})$ . Правило обновления положения можно представить в виде схемы (Рис.4).

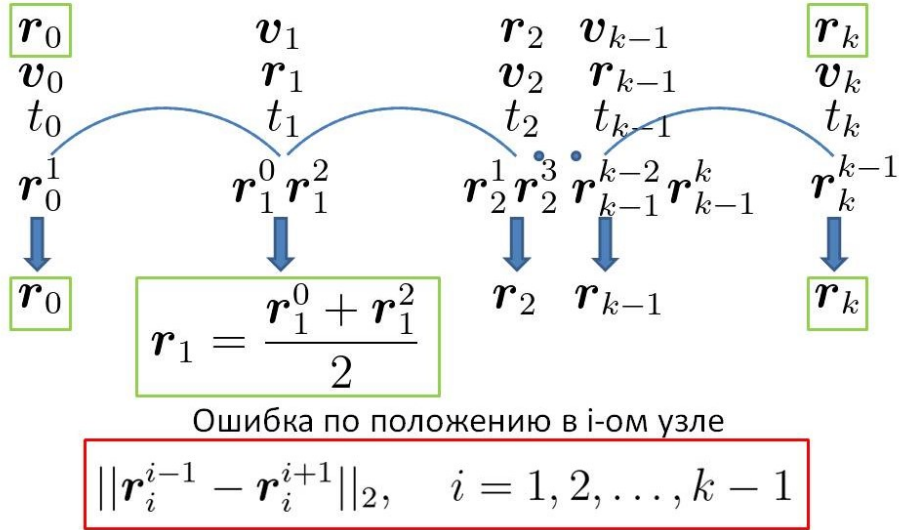


Рис. 4: Правило обновления положений.

В каждом внутреннем узле по времени считается евклидова норма разности между положением влета и положением вылета

$$\|\mathbf{r}_i^{i-1} - \mathbf{r}_i^{i+1}\|_2, \quad i = 1, 2, \dots, k - 1. \quad (2.1.7)$$

Условие сшивки решения по положению с точностью  $\varepsilon$  можно записать как

$$\max_{i=1, k-1} \|\mathbf{r}_i^{i-1} - \mathbf{r}_i^{i+1}\|_2 < \varepsilon. \quad (2.1.8)$$

Шаг 3 (условие сшивки): решение должно сшиваться и по скорости, и по положению одновременно (см. (2.1.6), (2.1.8))

## 2.2 Описание алгоритма

Правила обновления скорости и положения не гарантируют, что условие сшивки будет выполняться. Важно на каждой итерации следить за тем, чтобы максимальные среди всех внутренних узлов ошибки по скорости и по положению одновременно уменьшались. В данном параграфе представлен целостный алгоритм метода параллельной пристрелки.

Вводятся обозначения:

$R, V$  – массив векторов размера  $3 \times (M + 1)$ , столбцы которого определяют положения и скорости во временных узлах (2.1.3),



$\Delta R, \Delta V$  – массив размера  $1 \times (M + 1)$ , компоненты которого определяют ошибки по положению и по скорости (2.1.7), (2.1.5),

$lr$  (*learning rate*) – параметр скорости обучения, управляющий значением шага на каждой итерации, выбирается постоянным в интервале  $[0, 1]$ . Низкая скорость обучения (0.1, 0.3) соответствует малому значению шага. При этом чаще всего наблюдается уменьшение скорости сходимости и увеличение точности.

$$R \leftarrow R + (R_{new} - R) lr. \quad (2.2.1)$$

Правила обновления положений и скоростей:

*updating* – правило, согласно которому по массиву положений  $R$  обновляется массив скоростей  $V_{new}$  (Рис.3), по массиву положений  $R$  и массиву скоростей  $V$  обновляется массив положений  $R_{new}$  (Рис.4).

Далее будут описаны процедуры, позволяющие улучшить описанные правила обновления массива положений и массива скоростей:

*correction* – процедура коррекции массива положений или массива скоростей, согласно которой векторы положений или векторы скоростей обновляются только в тех узлах, где ошибка по положению (2.1.7) или по скорости (2.1.5) уменьшаются по сравнению с предыдущей итерацией,

*average* – процедура обновления массива положений и массива скоростей путем вычисления среднего значения решения за несколько последних итераций.

Условия проверки и сшивки:

*matching* – условие сшивки решения с требуемой точностью  $\varepsilon$

$$\|\Delta R\|_{\infty} = \max_{i=1, k-1} \Delta R_i < \varepsilon, \quad \|\Delta V\|_{\infty} = \max_{i=1, k-1} \Delta V_i < \varepsilon, \quad (2.2.2)$$

*check* – проверка уменьшения ошибки на каждой итерации

$$\|\Delta R_{new}\|_{\infty} < \|\Delta R\|_{\infty}, \quad \|\Delta V_{new}\|_{\infty} < \|\Delta V\|_{\infty}. \quad (2.2.3)$$

На каждой итерации алгоритма обновляется массив положений  $R$  и скоростей  $V$ , а также массив ошибок по положению  $\Delta R$  и по скорости  $\Delta V$ . Если правила обновления положений и скоростей (*updating*) или процедуры (*correction*), их улучшающие, не проходят проверку (*check*), то следует

остановка. В таком случае условие сшивки (*matching*) не выполняется с требуемой точностью  $\varepsilon$ . При необходимости в правиле обновления положения используется параметр  $lr$  (*learning rate*). Описание алгоритма метода параллельной пристрелки, основанного на методе Чебышева–Пикара, удобно представить в виде псевдокода.

---

**Algorithm 1** Parallel shooting based on Chebyshev–Picard method

---

$R, \Delta R, V, \Delta V, lr$

**while** *matching is false* **do**

$V_{new}, \Delta V_{new} \leftarrow \text{updating}(R)$

$R_{new}, \Delta R_{new} \leftarrow \text{updating}(R, V_{new}, lr)$

**if** *check is true* **then**

$R, \Delta R, V, \Delta V \leftarrow R_{new}, \Delta R_{new}, V_{new}, \Delta V_{new}$

**else**

$V_{correct} \leftarrow \text{correction}(V_{new})$

$R_{new}, \Delta R_{new} \leftarrow \text{updating}(R, V_{correct}, lr)$

$V_{new}, \Delta V_{new} \leftarrow \text{updating}(R_{new})$

**if** *check is true* **then**

$R, \Delta R, V, \Delta V \leftarrow R_{new}, \Delta R_{new}, V_{new}, \Delta V_{new}$

**else**

$R_{correct} \leftarrow \text{correction}(R)$

$V_{new}, \Delta V_{new} \leftarrow \text{updating}(R_{correct})$

$R_{new}, \Delta R_{new} \leftarrow \text{updating}(R_{correct}, V_{new}, lr)$

**if** *check is true* **then**

$R, \Delta R, V, \Delta V \leftarrow R_{new}, \Delta R_{new}, V_{new}, \Delta V_{new}$

**else**

$R_{average}, V_{average} \leftarrow \text{average}(R, V)$

$R_{new}, \Delta R_{new} \leftarrow \text{updating}(R_{average}, V_{average}, lr)$

$V_{new}, \Delta V_{new} \leftarrow \text{updating}(R_{new})$

---

---

```

if check is true then
     $R, \Delta R, V, \Delta V \leftarrow R_{new}, \Delta R_{new}, V_{new}, \Delta V_{new}$ 
else
    stop while
end if
end if
end if
end while
return  $R, \Delta R, V, \Delta V$ 

```

---

### 3. Применение

В данной главе рассматривается использование метода параллельной пристрелки на конкретных задачах из области космической механики. Результаты демонстрируются на примере задачи Ламберта, а также на примере адаптации низкоэнергетической траектории перелета от Земли к Луне в рамках высокоточной модели движения космического аппарата.

#### 3.1 Задача Ламберта

В параграфе 1.3 показана реализация метода Чебышева–Пикара для задачи Ламберта. Метод Чебышева–Пикара для такой модельной задачи не сходится даже на одном витке орбиты. Метод параллельной пристрелки позволяет расширить ограниченную область сходимости метода Чебышева–Пикара.

При численных расчетах используется безразмерная система единиц. Уравнение движения космического аппарата и краевые условия имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.2)$$

Количество подынтервалов, на которые разбивается временной интервал

$[0, \pi]$

$$K = 6. \quad (3.1.3)$$

Параметры, определяющие порядок аппроксимации полиномами Чебышева и количество временных интервалов, на которые разбивается каждый подынтервал

$$N = 10, \quad M = 10. \quad (3.1.4)$$

В качестве начального приближения необходимо подать матрицы положений и скоростей размеров  $3 \times (K + 1)$  каждая. В данной задаче рассматривается возмущенное истинное решение. Возмущение представляет из себя матрицу с нормально распределенными случайными компонентами.

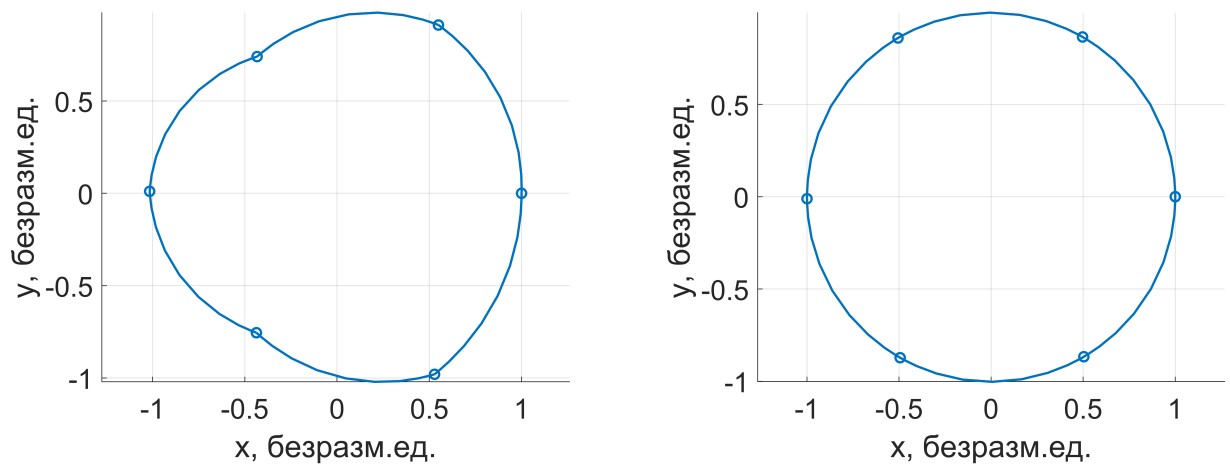


Рис. 5: Начальное приближение и конечная траектория.

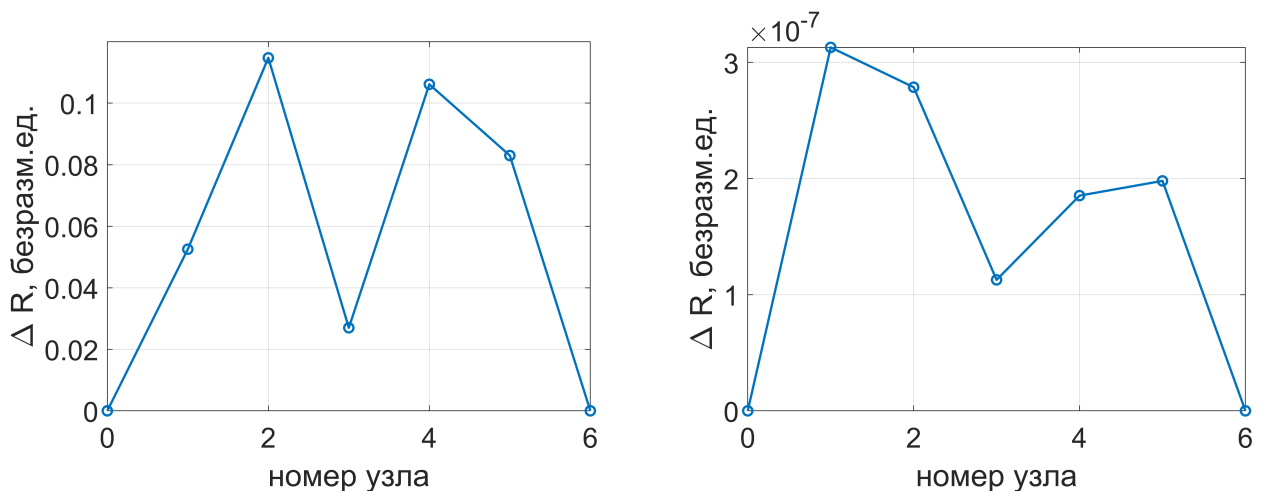


Рис. 6: Ошибки по положению первой и последней итерациях.

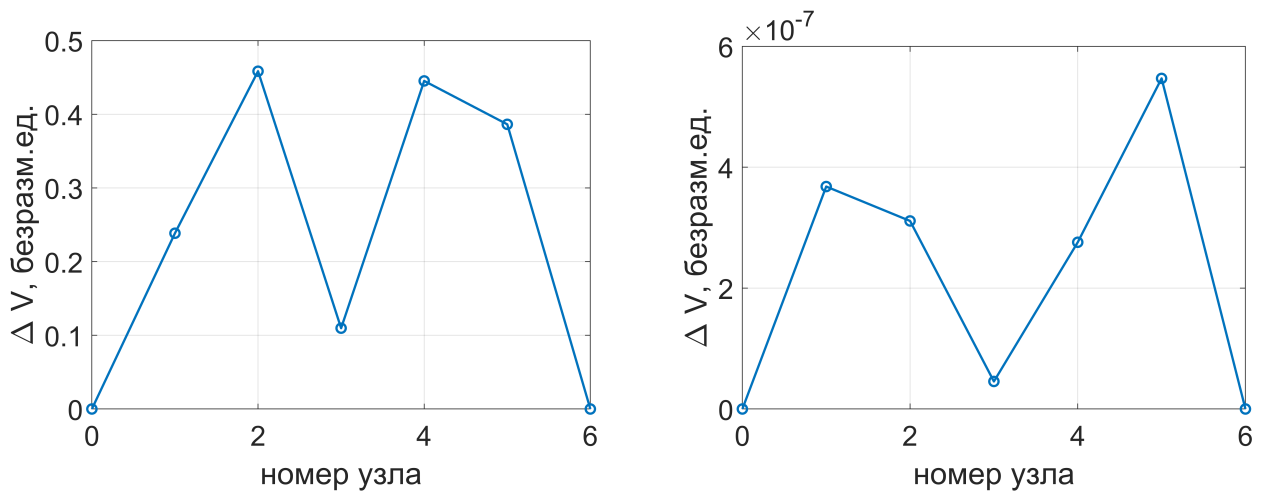


Рис. 7: Ошибка по скорости на первой и последней итерациях.

На графиках представлена траектория КА, а также ошибка по положению и по скорости в узлах сшивки на первой и последней итерации алгоритма. Максимальная ошибка становится порядка  $10^{-7}$  за 89 итераций.

### 3.2 Адаптация WSB-траектории перелета от Земли к Луне

Траектории отлета от Земли, которые характеризуются отрицательной кеплеровой энергией, называются низкоэнергетическими. В рамках задачи двух тел низкоэнергетические траектории представляют собой эллипс и задают ограниченное движение. В задаче многих тел такие траектории могут не быть ограниченными, в результате чего КА может удаляться на большие расстояния от Земли. В множестве низкоэнергетических траекторий имеются так называемые WSB (Weak Stability Boundary)-траектории [13]. Это траектории перелета от Земли к Луне, использующие гравитационное поле Солнца для увеличения перигея орбиты Земли. WSB-траектория перелета от Земли к Луне состоит из трех частей – движение из окрестности Земли в системе Земля–Луна (внутри орбиты Луны), движение в окрестности точки либрации  $L_1$  системы Солнце–Земля (здесь Солнце влияет на траекторию и ее характеристики), далее снова движение в системе Земля–Луна и подлет к Луне.

В данной работе задача ставится следующим образом. Имеется WSB-траектория перелета от Земли к Луне, спроектированная в рамках плоской бикруговой ограниченной задачи четырех тел («простой» модели движения

аппарата и небесных тел) [14]. Требуется адаптировать эту траекторию к высокоточной модели движения, в которой движение Земли, Луны и Солнца определяется их эфемеридами. При решении используется метод параллельной пристрелки.

Используется безразмерная система единиц. Параметры для метода Чебышева–Пикара при расчетах

$$N = 5, \quad M = 5. \quad (3.2.1)$$

Параметры для метода параллельной пристрелки при расчетах

$$K = 43, \quad lr = 0.2. \quad (3.2.2)$$

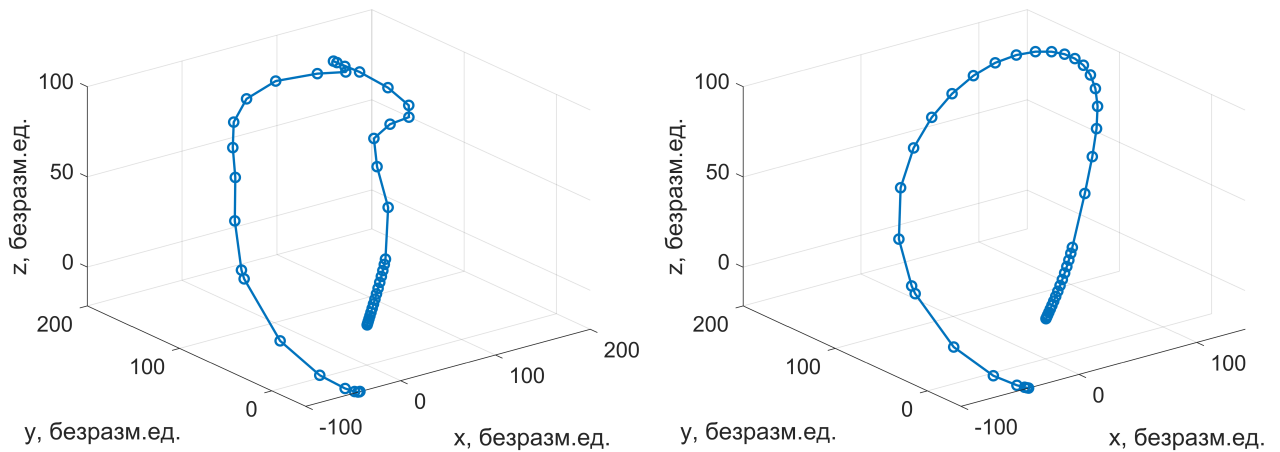


Рис. 8: Начальная и адаптированная WSB-траектория в геоцентрической международной системе координат.

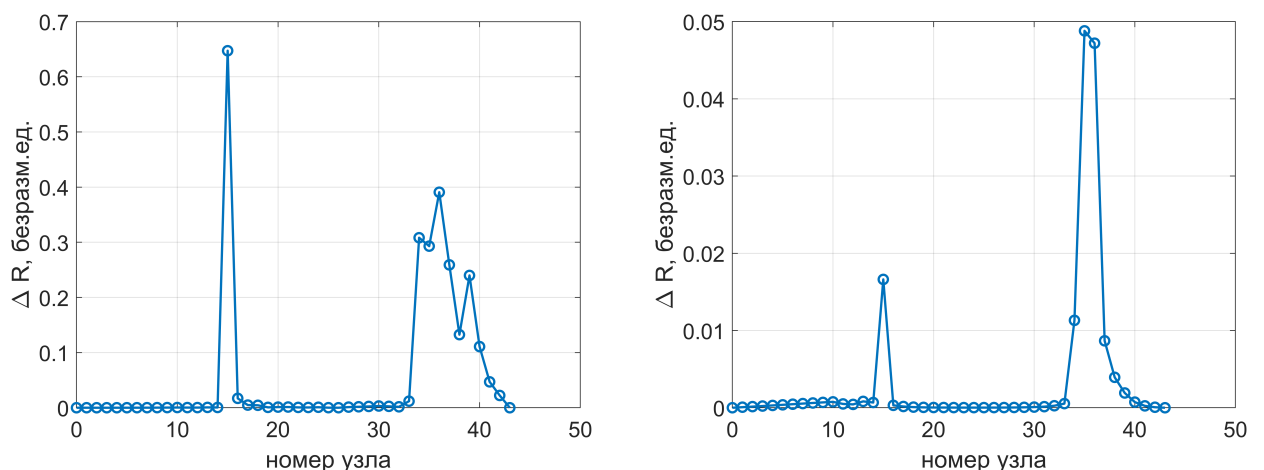


Рис. 9: Ошибка по положению на первой и последней итерациях.

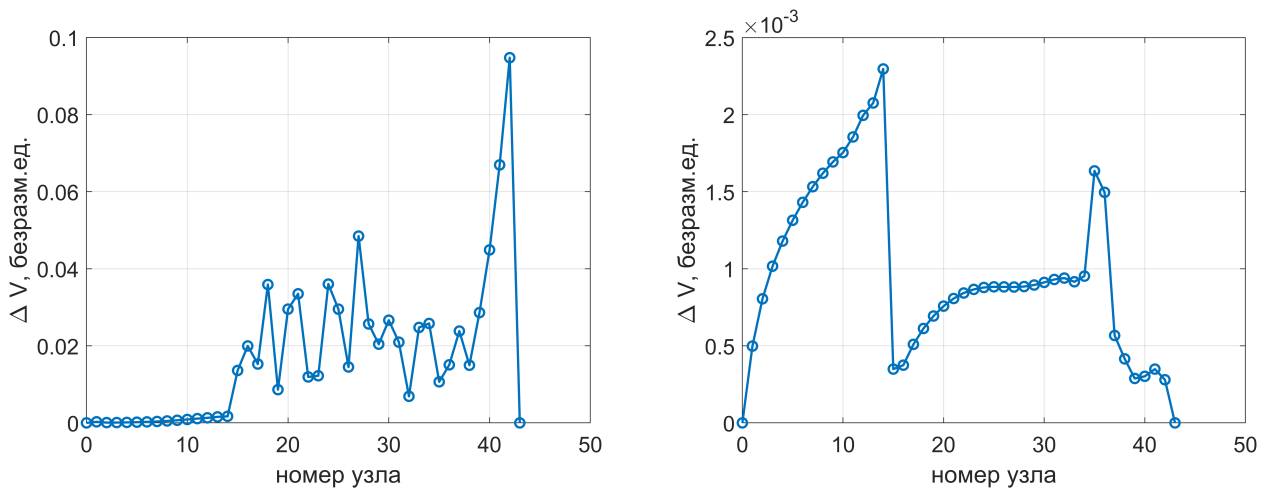


Рис. 10: Ошибка по скорости на первой и последней итерациях.

Результаты работы метода параллельной пристрелки изображаются для начального приближения и для адаптированной траектории. За 196 итераций максимальная ошибка по положению равна 310 км, а по скорости – 18 м/с.

Задача оптимизации затрат топлива полученной траектории не ставилась, так как неградиентный вариант метода параллельной пристрелки, разработанный в этой работе, решает системы уравнений, а не оптимизирует функционалы с ограничениями. Адаптация разработанного метода к решению задач оптимизации может быть разработана и изучена в будущем.

## **Заключение**

В работе представлена программная реализация метода Чебышева–Пикара на примере решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. На языке MATLAB подготовлена единая функция, позволяющая решать двухточечные краевые задачи всех типов. На основе метода Чебышева–Пикара разработан и реализован неградиентный вариант метода параллельной пристрелки. Показаны результаты работы на примере задачи Ламберта и на примере адаптации низкоэнергетической траектории перелета от Земли к Луне в рамках высокоточной модели движения космического аппарата.



## Список литературы

- [1] Clenshaw, C. W. and Norton, H. J. "The solution of nonlinear ordinary differential equations in Chebyshev series," *The Computer Journal*, Vol. 6, No. 1, 1963, pp. 88–92.
- [2] Norton, H. J. "The iterative solution of non-linear ordinary differential equations in Chebyshev series," *The Computer Journal*, 7, 1964, pp. 76–85.
- [3] Wright, K. "Chebyshev collocation methods for ordinary differential equations," *The Computer Journal*, Vol. 6, No. 4, 1964, pp. 358-365.
- [4] Nacozy, P. E. and Feagin, T. "Approximations of Interplanetary Trajectories by Chebyshev Series," *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 3, 1972, pp. 243-244.
- [5] Feagin, T. and Nacozy, P. "Matrix Formulation of the Picard Method for Parallel Computation," *Celestial Mechanics*, Vol. 29, No. 2, 1983, pp. 107-115.
- [6] Fukushima, T. "Vector integration of dynamical motions by the Picard-Chebyshev method", *The Astronomical Journal*, Vol. 113, No. 6, 1997, pp. 2325–2328.
- [7] Bai, X. "Modified Chebyshev-Picard Iteration Methods for Solution of Initial Value and Boundary Value Problems", Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, College Station, TX, 2010.
- [8] Junkins, J., Bani Younes, A., Woollands, R., and Bai, X., "Picard Iteration, Chebyshev Polynomial and Chebyshev Picard Methods: Application in Astrodynamics," *Journal of the Astronautical Sciences*, 2013.
- [9] Koblick, D. and Shankar, P., "Evaluation of the Modified Picard-Chebyshev Method for High-Precision Orbit Propagation," *Journal of Aerospace Engineering*, 2014.
- [10] Macomber, B.D. "Enhancements to Chebyshev-Picard Iteration Efficiency for Generally Perturbed Orbits and Constrained Dynamical Systems", Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, 2015.

- [11] Woollands, R.M. “Regularization and Computational Methods for Precise Solution of Perturbed Orbit Transfer Problems”, Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, 2016.
- [12] Swenson, T. et al. “Application of Modified Chebyshev Picard Iteration to Differential Correction for Improved Robustness and Computation Time”, *Journal of the Astronautical Sciences* 64, 2017, pp. 267–284.
- [13] Belbruno, E.A. and Miller, J.K. “Sun-Perturbed Earth-to-Moon Transfers with Ballistic Capture”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 4, 1993, pp. 770-775.
- [14] Tselousova, A., Shirobokov, M. and Trofimov, S. “Geometrical Tools for the Systematic Design of Low-Energy Transfers in the Earth–Moon–Sun System”, 2020 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, August 9–12, 2020.
- [15] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения (4-е изд.). М.: Наука, 1974, С. 165-168.

# Приложение

## А. Итерации Пикара

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{f} \in R^n, \quad (\text{A.1})$$

с начальным условием

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (\text{A.2})$$

Интегральное уравнение для поставленной задачи Коши имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds.$$

В данное уравнение входит интеграл от функций правых частей, зависящих от неизвестной искомой траектории  $\mathbf{x}(s)$ . Метод итераций Пикара для задачи Коши (A.1)–(A.2) сводится к получению последовательности решений

$$\mathbf{x}^i(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}^{i-1}(s)) ds \quad \rightarrow \quad \{\mathbf{x}^0(t), \mathbf{x}^1(t), \dots\}. \quad (\text{A.3})$$

Причем если в области

$$D = \{|t - t_0| \leq a, \max_{k=\overline{1, n}} |x_k - x_{0k}| \leq b\}$$

функция  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$  определена, непрерывна по  $t$  и по всем компонентам  $\mathbf{x}(t)$ , а также для любых  $(t, \mathbf{x}(t)), (t, \mathbf{y}(t))$  из  $D$  выполнено условие Липшица

$$\begin{aligned} \forall k = \overline{1, n} \quad & |f_k(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) - f_k(t, x_1(t), \dots, x_n(t))| \leq \\ & \leq L_1 |y_1(t) - x_1(t)| + \dots + L_n |y_n(t) - x_n(t)|, \end{aligned}$$

то последовательность (A.3) сходится к единственному и непрерывному решению задачи Коши (A.1)–(A.2) на интервале  $[t_0 - h, t_0 + h]$ , где  $h = \min(a, \frac{b}{M})$ ,  $M = \max_D \|f(t, \mathbf{x}(t))\|$  (см., например, [15]). Параметры  $L_1, L_2, \dots, L_n$  называются постоянными Липшица.

## Б. Полиномы Чебышева

Полиномы Чебышева первого рода  $T_k(\tau)$  имеют область определения  $\tau \in [-1, 1]$  и характеризуются рекуррентными соотношениями

$$T_0(\tau) = 1, \quad T_1(\tau) = \tau, \quad T_{k+1}(\tau) = 2\tau T_k(\tau) - T_{k-1}(\tau) \quad (\text{Б.1})$$

или тригонометрической формулой

$$T_k(\tau) = \cos(k \arccos(\tau)).$$

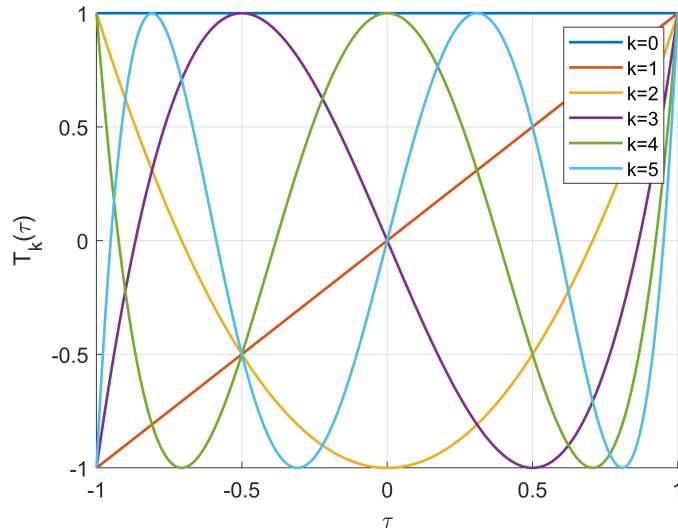


Рис. 11: Полиномы Чебышева первого рода.

Свойства полиномов Чебышева первого рода:

1) Ортогональность в непрерывном и дискретном случаях

$$\int_{-1}^1 T_n(\tau) T_m(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^N T_n(\tau_k) T_m(\tau_k) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ N, & n = m = 0, \\ \frac{N}{2}, & n = m \neq 0. \end{cases} \quad (\text{Б.2})$$

Знак суммирования с двумя чертами сверху обозначает, что первый и последний член берется с коэффициентом  $\frac{1}{2}$ .

Узлы Чебышева–Гаусса–Лобатто определяются следующим образом

$$\tau_k = \cos \frac{k\pi}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (\text{Б.3})$$

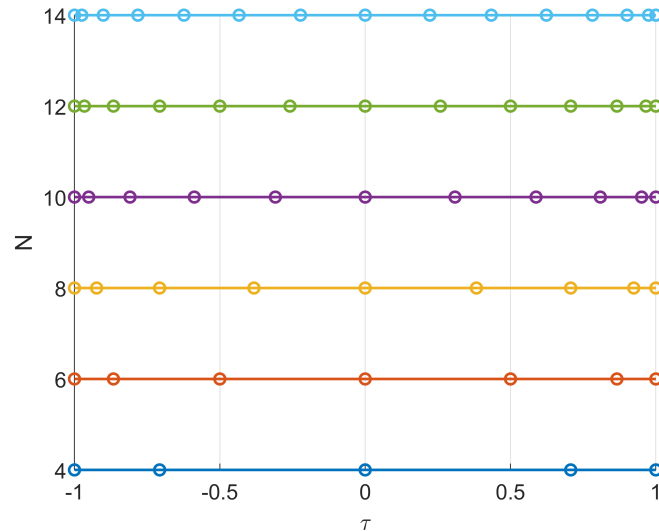


Рис. 12: Узлы Чебышева–Гаусса–Лобатто.

## 2) Неопределенный интеграл

$$\int T_k(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \left( \frac{T_{k+1}}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k-1} \right). \quad (\text{Б.4})$$

## 3) Связь с полиномами Чебышева второго рода $U_k(\tau)$

$$\frac{dT_k}{d\tau} = kU_{k-1},$$

$$U_0(\tau) = 1, \quad U_1(\tau) = 2\tau, \quad U_{k+1}(\tau) = 2\tau U_k(\tau) - U_{k-1}(\tau).$$

## 4) Аппроксимация функций полиномами Чебышева

Функция аппроксимируется полиномами Чебышева  $\{T_0(\xi), T_1(\xi), \dots, T_N(\xi)\}$  в узлах  $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_M\}$ , причем  $M \geq N$

$$f(\xi_j) = \sum_{k=0}^N \alpha_k T_k(\xi_j), \quad j = 0, 1, \dots, M. \quad (\text{Б.5})$$

Коэффициенты аппроксимации  $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  с некоторой весовой матрицей  $W = \text{diag}\{\frac{1}{2}, 1, \dots, 1, \frac{1}{2}\}$  выражаются в виде

$$\alpha_k = \frac{(T_k(\xi), f(\xi))}{(T_k(\xi), T_k(\xi))} = \frac{\sum_{j=0}^M W_j T_k(\xi_j) f(\xi_j)}{\sum_{j=0}^M W_j T_k^2(\xi_j)}. \quad (\text{Б.6})$$

При вычислении знаменателя используется свойство ортогональности

$$a_k = \sum_{j=0}^M W_j T_k^2(\xi_j) = \begin{cases} M, & k = 0, \\ \frac{M}{2}, & k = 1, 2, \dots, N - 1, \\ M, & k = N = M, \\ \frac{M}{2}, & k = N < M. \end{cases} \quad (\text{Б.7})$$