

Оптимизация траекторий перелета между либрационными орбитами различных систем трех тел с использованием инвариантных многообразий

Студент 572 группы:
Шипицин Виктор Владимирович

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., Широбоков Максим Геннадьевич

02 июля 2019 г.

- 1 Цель работы
- 2 Постановка задачи
- 3 Оптимизация в простой модели
- 4 Адаптация траектории к высокоточной модели
- 5 Заключение

Цель работы

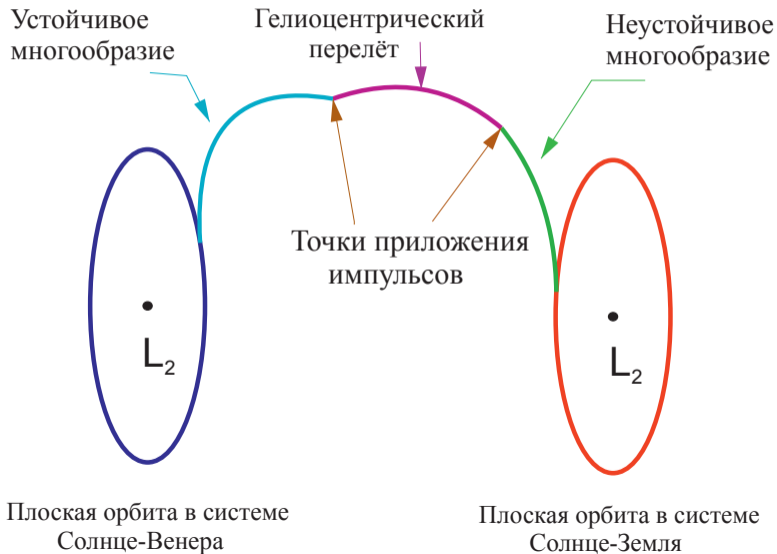
Цель работы – проектирование оптимальных по затратам топлива траекторий между орбитами Ляпунова **различных** систем трёх тел с помощью инвариантных многообразий.

Lo, M.W. and Ross, S.D. *The Lunar L_1 Gateway: Portal to the Stars and Beyond*, AIAA Space 2001 Conference, Albuquerque, New Mexico, USA, August 28-30, 2001.

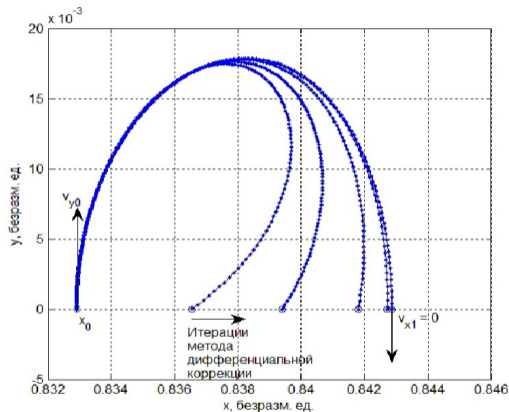
Alonso, G.P. *The Design of System-to-System Transfer Arcs Using Invariant Manifolds in the Multi-Body Problem*, Ph.D. Thesis, Purdue University, 2006.

Finocchietti, C., Pergola, P. and Andrenucci, M. *Venus transfer design by combining invariant manifolds and low-thrust arcs*, *Acta Astronautica*, 2014, Vol. 94, pp. 351–362.

Схема построения траектории



Построение плоской орбиты Ляпунова



В линейном приближении

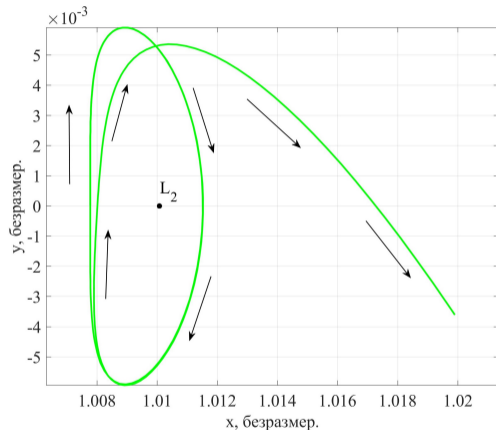
$$r(t) = \begin{bmatrix} \alpha \cos(\omega_p t + \phi_1) + \gamma e^{\lambda t} + \bar{\gamma} e^{-\lambda t} \\ -k_2 \alpha \sin(\omega_p t + \phi_1) + k_1 (\gamma e^{\lambda t} - \bar{\gamma} e^{-\lambda t}) \\ \beta \cos(\omega_v t + \phi_2) \end{bmatrix}$$

Плоские периодические орбиты получаются при $\alpha \neq 0, \beta = \gamma = \bar{\gamma} = 0$

Для коррекции начального приближения решается система

$$\begin{cases} y(T_{1/2}) = 0 & \text{где } T_{1/2} - \text{ момент} \\ \dot{x}(T_{1/2}) = 0 & \text{пересечения } y = 0 \end{cases}$$

Построение многообразий



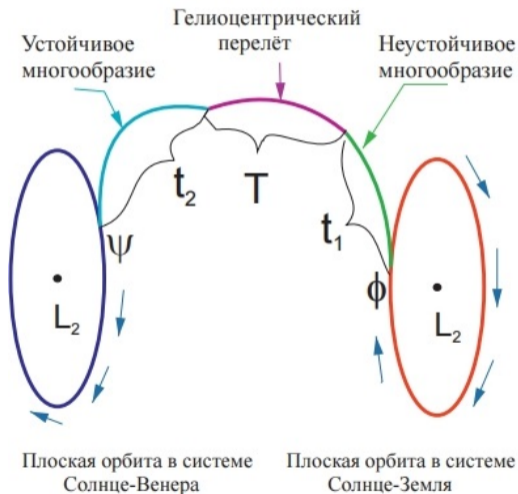
Для проектирования траектории многообразия сначала совместно решается система уравнений движения и уравнений в вариациях на периоде орбиты

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), & \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \\ \frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial t} \Phi(t, t_0), & \Phi(t_0, t_0) = I_{6 \times 6} \end{cases}$$

В результате получим так называемую матрицу монодромии $\mathbf{M} = \Phi(t_0 + T, t_0)$ с собственными значениями:

$$\lambda_1 > 1, \lambda_2 = \lambda_1^{-1} < 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 1 \\ \lambda_5 = \lambda_6^*, |\lambda_5| = |\lambda_6| = 1$$

Постановка оптимизационной задачи



Плоскости орбит Земли и Венеры считаются совпадающими

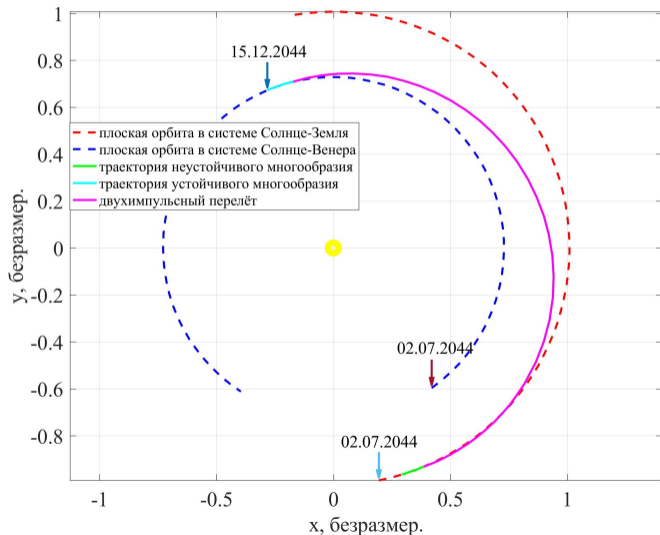
Переменные оптимизации: ϕ и ψ – параметры, характеризующие точки на плоских орбитах; t_1 и t_2 – времена полёта по соответствующему многообразию; T – время двухимпульсного перелёта

Функционалом является

$$J = \| \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_{1corr} \|_2 + \| \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_{2corr} \|_2$$

Все времена полёта ограничены соответствующими периодами плоских орбит

Результаты в простой модели



Для решения задачи используется метод Sequential Quadratic Programming (SQP).

Метод сошёлся за 9 итераций с точностью 10^{-8} .

Суммарная характеристическая скорость составила 6.49 км/с.

При гомановском переходе между круговыми компланарными орбитами та же величина – 5.20 км/с

Высокоточная модель

- Построенная в рамках простой модели траектория может рассматриваться как начальное приближение для перелёта в единой высокоточной модели.
- При этом, мы считаем, что инерциальная система координат – это Международная Небесная Система Координат (МНСК) с центром в центре масс Солнца.
- В высокоточной модели учитываются центральные гравитационные поля Солнца, Земли, Венеры, Марса и Юпитера.
- Для моделирования движения планет Солнечной системы были выбраны эфемериды Jet Propulsion Laboratory (JPL) DE430.

Адаптация к высокоточной модели

Адаптация выполняется методом параллельной пристрелки:

- Разобьём отрезок $[t_1, t_f]$ на N промежутков: $t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1}$
- Решение в момент t_{i+1} системы уравнений на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$

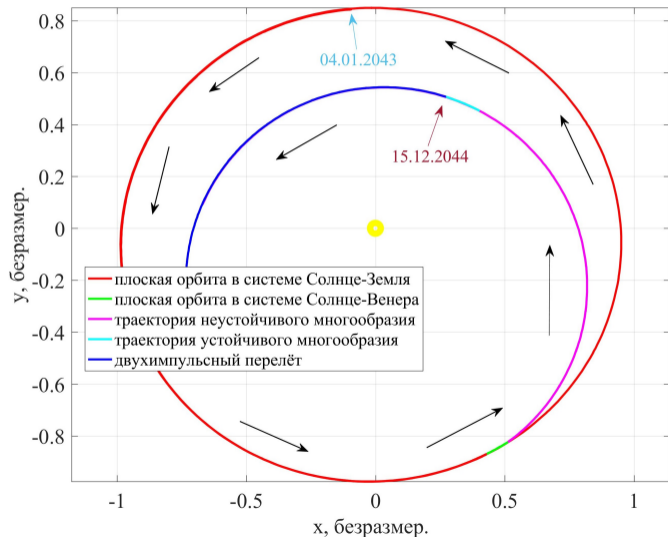
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i$$

обозначим как \mathbf{x}_i^t ; здесь $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ – правая часть уравнений движения в высокоточной модели

- Потребуем всюду непрерывность траектории в фазовом пространстве, кроме точек приложения импульсов
- Решим задачу оптимизации
$$\begin{cases} J = \|\Delta \mathbf{v}_1\|_2 + \|\Delta \mathbf{v}_2\|_2 \rightarrow \min \\ \mathbf{F}(\mathbf{s}) = 0 \end{cases}$$

где \mathbf{s} – переменные оптимизации, а $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ – вектор невязок.

Результаты в высокоточной модели



Для решения задачи используется метод Sequential Quadratic Programming (SQP)

Суммарная характеристическая скорость составила 4.04 км/с

Результат может быть улучшен при более всеобъемлющем переборе начальных значений переменных оптимизации и даты старта

Заключение

- Построены плоские периодические орбиты вокруг коллинеарных точек либрации систем трех тел Солнце–Земля и Солнце–Венера
- Построены связанные с орбитами устойчивые и неустойчивые многообразия
- Поставлена и решена оптимизационная задача в рамках простой модели
- Выполнена адаптация траектории к высокоточной модели, основанной на эфемеридном движении планет Солнечной системы

Уравнения движения в задаче трёх тел

Положение $\mathbf{R} = [X, Y, Z]$ и скорость $\mathbf{V} = [\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}]$ КА¹ в ИСК² связаны с положением $\mathbf{r} = [x, y, z]$ и скоростью $\mathbf{v} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$ в ВСК³ следующим образом:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

¹Космический аппарат

²Инерциальная система координат

³Вращающаяся система координат

Уравнения движения в задаче трёх тел

Введём функцию Лагранжа как

$$L = \frac{1}{2}V^2 + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (1)$$

После подстановки в уравнения Эйлера-Лагранжа получим уравнения движения в ВСК:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= U_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= U_y \\ \ddot{z} &= U_z \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (3)$$

Построение плоских орбит

- 1 Выберем некоторую коллинеарную точку либрации, имеющую координаты $[x_L, 0, 0]$
- 2 Линеаризуем относительно $x_L = [x_L, 0, 0, 0, 0, 0]$ систему

$$\dot{x} = f(x) \quad (4)$$

где $f(x) = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, U_x + 2\dot{y}, U_y - 2\dot{x}, U_z]$

- 3 Линейное приближение для радиус-вектора будет равно

$$r(t) = \begin{bmatrix} \alpha \cos(\omega_p t + \phi_1) + \gamma e^{\lambda t} + \bar{\gamma} e^{-\lambda t} \\ -k_2 \alpha \sin(\omega_p t + \phi_1) + k_1 (\gamma e^{\lambda t} - \bar{\gamma} e^{-\lambda t}) \\ \beta \cos(\omega_v t + \phi_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

- 4 Плоские периодические орбиты получаются при $\alpha \neq 0, \beta = \gamma = \bar{\gamma} = 0$

Построение плоских орбит

Начальное приближение для фазового вектора в момент времени $t = 0$

$$[x(0) + x_L; 0; 0; 0; \dot{y}(0); 0]$$

для полупериода

$$T_{1/2}^0 = \pi/\omega_p$$

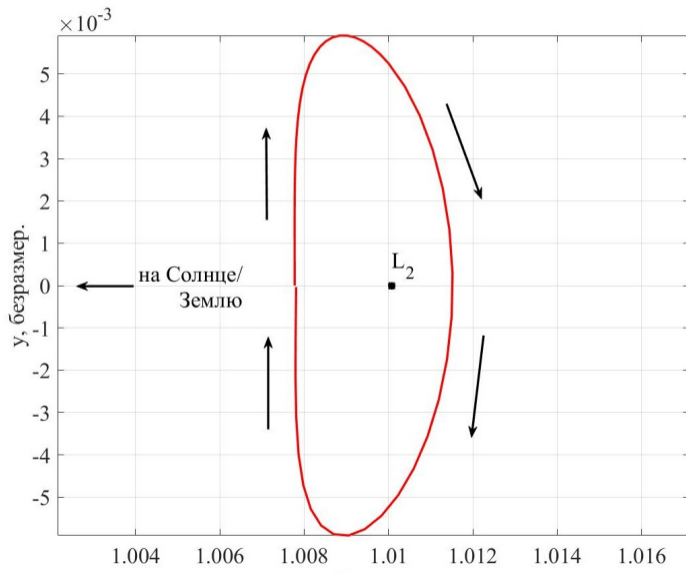
Скорректировать скорость $\dot{y}(t = 0)$ в начальный момент времени и полупериод орбиты $T_{1/2}$ можно, решив систему

$$y(T_{1/2}) = 0$$

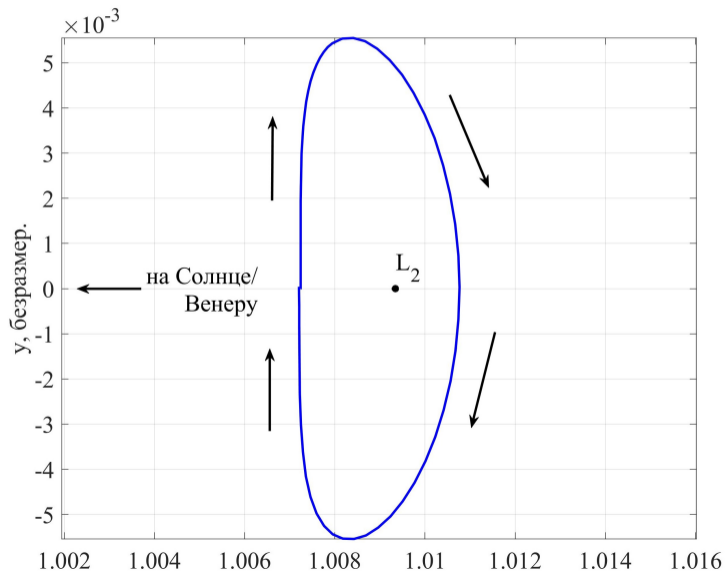
$$\dot{x}(T_{1/2}) = 0$$

Далее интегрируем уравнения движения на всём периоде орбиты.

Плоская орбита в системе Солнце–Земля



Плоская орбита в системе Солнце–Венера



Построение многообразий

- 1 Выберем некоторую точку на орбите $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$
- 2 Линеаризуем относительно орбиты $\mathbf{x}_p(t)$ систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, U_x + 2\dot{y}, U_y - 2\dot{x}, U_z]$

- 3 Решение линеаризованной системы выражается через матрицу перехода $\Phi(t, t_0)$ которая находится из решения уравнений движения и уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \\ \dot{\Phi}(t, t_0) &= \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{aligned} \quad (7)$$

Построение многообразий

Проинтегрировав систему на периоде орбиты T , получим матрицу монодромии $M = \Phi(t_0 + T, t_0)$ с собственными значениями:

$$\lambda_1 > 1, \quad \lambda_2 = \lambda_1^{-1} < 1, \quad |\lambda_3| = |\lambda_4| = |\lambda_5| = |\lambda_6| = 1$$

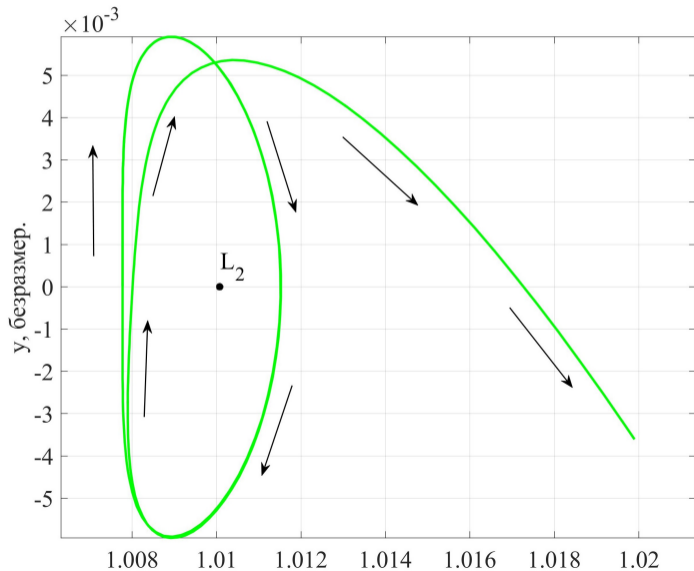
Взяв собственные векторы \mathbf{v}_u и \mathbf{v}_s , соответствующие λ_1 и λ_2 , получим начальные приближения к траектории неустойчивого/устойчивого многообразия:

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_u$$

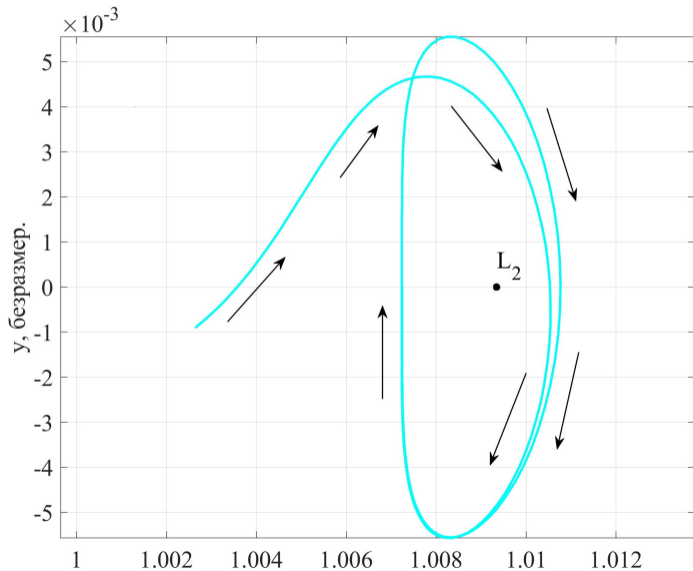
$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_s$$

где ε – некоторое малое значение.

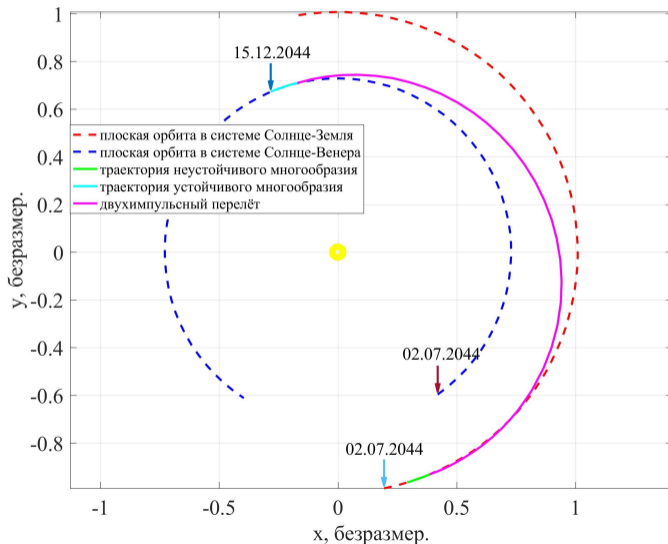
Неустойчивое многообразие в системе Солнце–Земля



Устойчивое многообразие в системе Солнце–Венера



Траектория в простой модели



Эфемеридное движение

Перевод траектории в эфемеридную модель в проекциях на оси Международной Небесной Системы Координат (МНСК) и с центром в местоположении Солнца:

- Сместим начало координат в центр масс Солнца.
- Введём мгновенный базис

$$\mathbf{e}_1(t) = \frac{\mathbf{R}(t)}{|\mathbf{R}(t)|}, \quad \mathbf{e}_3(t) = \frac{\mathbf{R}(t) \times \mathbf{V}(t)}{|\mathbf{R}(t) \times \mathbf{V}(t)|}, \quad \mathbf{e}_2(t) = \mathbf{e}_3(t) \times \mathbf{e}_1(t)$$

и мгновенную угловую скорость

$$\Omega(t) = \frac{|\mathbf{R}(t) \times \mathbf{V}(t)|}{|\mathbf{R}(t)|^2}$$

где радиус-вектор $\mathbf{R}(t)$ и скорость $\mathbf{V}(t)$ получены из эфемерид движения Земли/Венеры относительно Солнца.

Эфемеридное движение

- Получим искомый фазовый вектор $\mathbf{X}(t)$ путём преобразования:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \Omega e_{12} & -\Omega e_{11} & 0 & e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ \Omega e_{22} & -\Omega e_{21} & 0 & e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ \Omega e_{32} & -\Omega e_{31} & 0 & e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + \mu \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

где $\mathbf{e}_1 = [e_{11}, e_{21}, e_{31}]$, $\mathbf{e}_2 = [e_{12}, e_{22}, e_{32}]$, $\mathbf{e}_3 = [e_{13}, e_{23}, e_{33}]$.

- Для моделирования движения планет Солнечной системы были выбраны эфемериды Jet Propulsion Laboratory (JPL) DE430.

Уравнения движения

На промежутке $[t_1, t_f]$ решается следующая задача

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

где $\mathbf{x} = [\mathbf{r}, \mathbf{v}]$ – фазовый вектор, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = [\dot{\mathbf{v}}, \sum_i \mathbf{F}_i]$ – функция правых частей уравнений движения в сложной модели с учётом центральных гравитационных полей тел Солнечной системы, то есть

$$\mathbf{F}_i = -\mu_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|^3} + \mu_i \frac{\mathbf{R}_i}{|\mathbf{R}_i|^3}$$

где μ_i – массовый параметр i -ой планеты, \mathbf{R}_i – радиус-вектор, полученный согласно эфемеридам i -ой планеты.

Метод параллельной пристрелки

- Разобъём отрезок $[t_1, t_f]$ на N промежутков: $t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1}$
- Решение в момент t_{i+1} системы уравнений на отрезке $[t_i; t_{i+1}]$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i$$

обозначим как \mathbf{x}_i^t

- Потребуем всюду гладкость траектории, кроме точек приложения импульсов
- Сформируем вектор неизвестных переменных

$$\mathbf{s} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \Delta \mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}_2]$$

где $\Delta \mathbf{v}_1$ и $\Delta \mathbf{v}_2$ – разности скоростей между точками многообразий и двухимпульсного перелёта

Метод параллельной пристрелки

- Сформируем вектор невязок

$$F(s) = \begin{bmatrix} x_1^t - x_1 \\ \dots \\ r_k^t - r_k \\ v_k^t - v_k - \Delta v_1 \\ \dots \\ r_m^t - r_m \\ v_m^t - v_m - \Delta v_2 \\ \dots \\ x_N^t - x_{N+1} \end{bmatrix}$$

- Решим задачу минимизации функционала

$$J = \|\Delta v_1\|_2 + \|\Delta v_2\|_2$$

с ограничениями $F(s) = 0$.

Ускорение и уточнение численного счёта

Из уравнений движения и уравнений в вариациях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i^t}{\partial \mathbf{x}_i} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i^t}{\partial \mathbf{x}_i} \right)$$

$$\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i, \quad \frac{\partial \mathbf{x}_i^t}{\partial \mathbf{x}_i}(t_i) = \mathbf{I}_{6 \times 6}$$

можно получить матрицы перехода $\frac{\partial \mathbf{x}_i^t}{\partial \mathbf{x}_i}$, участвующие в вычислении матрицы Якоби

Матрица Якоби

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_1^t}{\partial \mathbf{x}_1} & -I_{6 \times 6} & O_{6 \times 6} & \dots & \dots & \dots & O_{6 \times 6} & O_{6 \times 3} & O_{6 \times 3} \\ O_{6 \times 6} & \frac{\partial \mathbf{x}_2^t}{\partial \mathbf{x}_2} & -I_{6 \times 6} & \dots & \dots & \dots & O_{6 \times 6} & O_{6 \times 3} & O_{6 \times 3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \frac{\partial \mathbf{x}_k^t}{\partial \mathbf{x}_k} & -I_{6 \times 6} & \dots & \dots & O_{6 \times 6} & O_{3 \times 3} & O_{6 \times 3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -I_{3 \times 3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \mathbf{x}_m^t}{\partial \mathbf{x}_m} & -I_{6 \times 6} & \dots & O_{6 \times 6} & O_{6 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -I_{3 \times 3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \mathbf{x}_N^t}{\partial \mathbf{x}_N} & O_{6 \times 3} & O_{6 \times 3} \end{bmatrix}$$

Траектория в сложной модели

