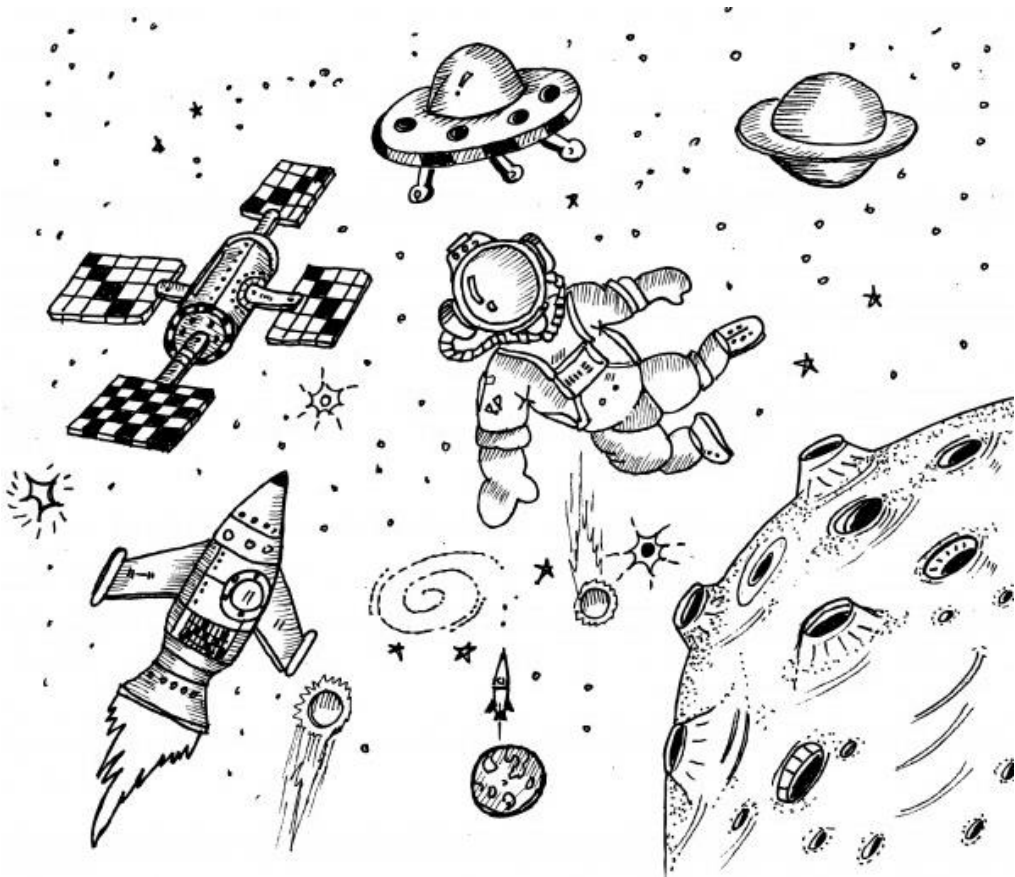


Численное исследование точности моделей относительного движения космических аппаратов в групповом полете



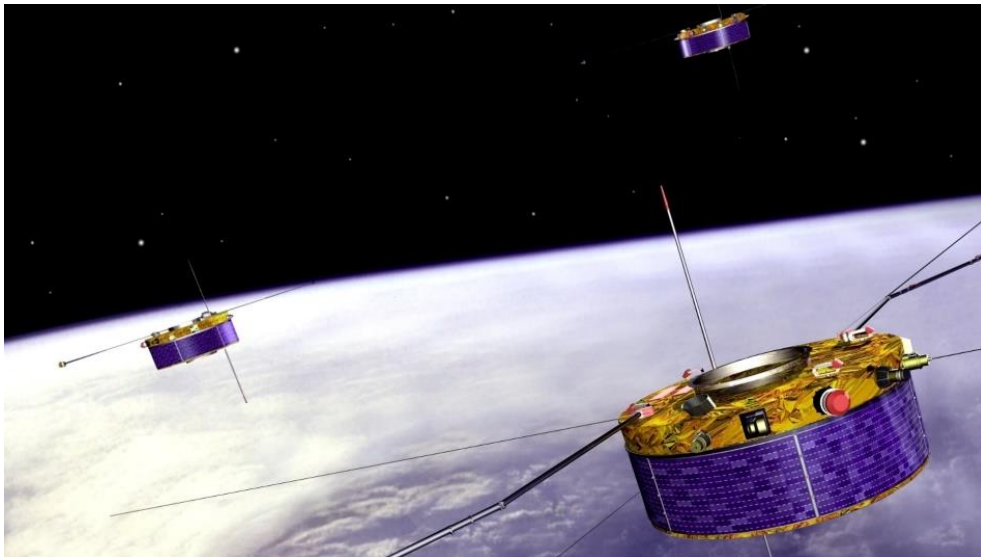
Студентка: И.А. Суслова, 4 курс ФПМИ
Научный руководитель: к.ф.-м.н. Я.В. Маштаков
Научный консультант: к.ф.-м.н. С.А. Шестаков

Введение

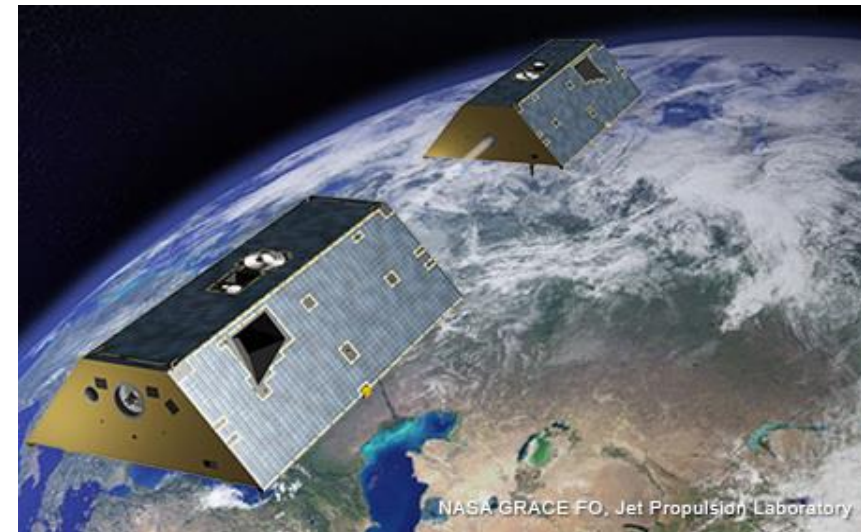
Использование нескольких аппаратов обладает рядом преимуществ

Большая популярность групповых полётов

Необходимость в моделях относительного движения



Cluster II



GRACE-FO



Цель работы



- Ознакомиться с простыми моделями относительного движения
- Научиться моделировать движение аппаратов
- Протестировать различные модели относительного движения в зависимости от некоторых факторов
- Получить результаты, позволяющие выбрать модель в различных случаях движения

Имеется:

- Два аппарата: главный и ведомый
- Движение по близким низким околокруговым орбитам
- Модель: центральное поле + J_2
- Модели относительного движения: Хилла-Клохесси-Уилтшира; Швайгарта-Седвика
- Время моделирования – 24 часа

Необходимо:

- Реализовать модели движения
- Промоделировать движение на нескольких размерах относительных орбит и наклонениях орбиты главного аппарата
- Численно оценить точность каждой модели

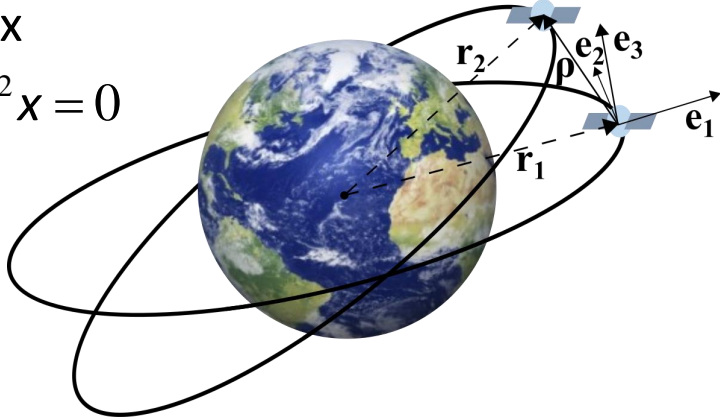
Уравнения ХКУ

- Уравнения в декартовых относительных координатах

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = 0$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = 0$$

$$\ddot{z} + n^2z = 0$$



- Здесь x, y, z – декартовые относительные координаты

В этих уравнениях: $n = \sqrt{\frac{\mu}{|r_1|^3}}$ – среднее движение

μ – гравитационный параметр

Предположения:

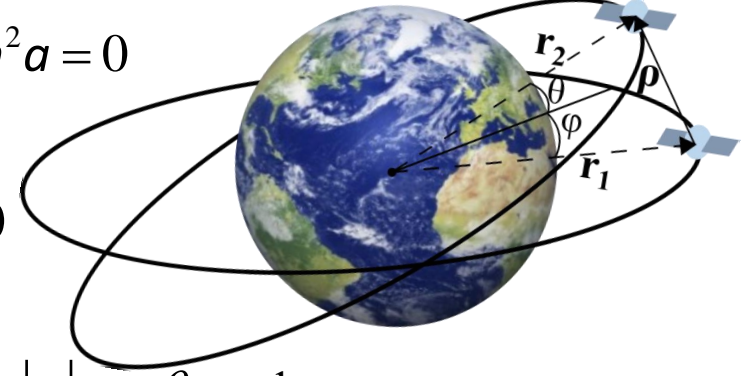
- 1) Модель движения: центральное гравитационное поле.
- 2) Орбита главного аппарата является круговой

- Уравнения в криволинейных координатах

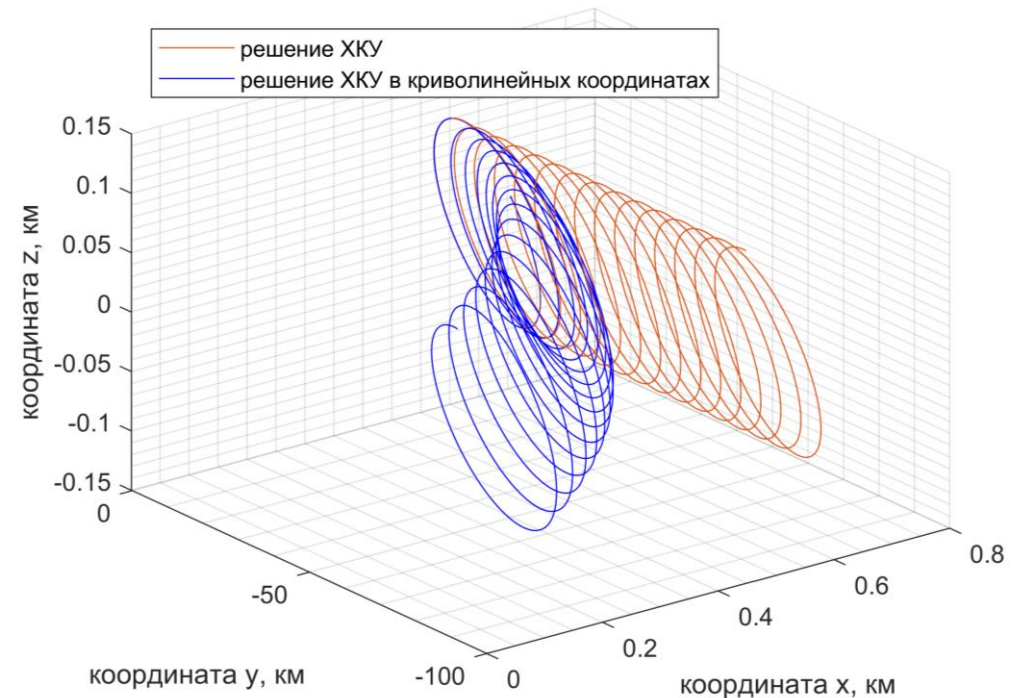
$$\ddot{a} - 2nr_1\dot{\phi} - 3n^2a = 0$$

$$r_1\ddot{\phi} + 2n\dot{a} = 0$$

$$r_1\ddot{\theta} + n^2r_1\theta = 0$$



- Здесь $a = |r_2| - |r_1|$, ϕ, θ – сферические углы

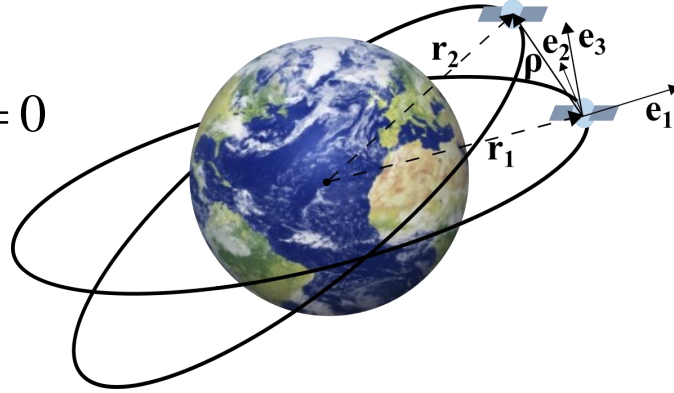


- Уравнения в декартовых относительных координатах:

$$\ddot{x} - 2nc\dot{y} - (5c^2 - 2)n^2x = 0$$

$$\ddot{y} + 2nc\dot{x} = 0$$

$$\ddot{z} + q^2z = 2lq\cos(qt + \beta)$$

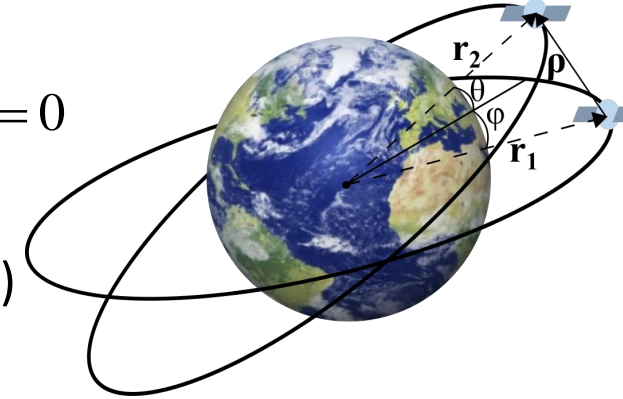


- Уравнения в криволинейных координатах:

$$\ddot{a} - 2ncr_1\dot{\phi} - (5c^2 - 2)n^2r_1\theta = 0$$

$$r_1\dot{\phi} + 2nca = 0$$

$$r_1\ddot{\theta} + q^2r_1\theta = 2lq\cos(qt + \beta)$$



Константа «с» близка к единице, константа «q» близка к «n».

Предположения:

- 1) Модель движения: центральное гравитационное поле и учет второй гармоники гравитационного потенциала J2
- 2) Орбита главного аппарата является круговой

- Решение модифицированных уравнений ХКУ в криволинейных координатах имеет вид:

$$a = C_{inplane} \sin \psi + 2C_{drift}$$

$$\dot{a} = C_{outplane} n \cos \psi$$

$$r_1 \varphi = 2C_{inplane} \cos \psi + C_{shift}$$

$$r_1 \dot{\varphi} = -2C_{inplane} n \sin \psi - 3C_{drift} n$$

$$r_1 \theta = C_{outplane} \sin \xi$$

$$r_1 \dot{\theta} = C_{outplane} n \cos \xi$$

Движение в
плоскости орбиты

Движение вне
плоскости орбиты

С помощью констант $C_{inplane}$, $C_{outplane}$, C_{drift} и переменных C_{shift} , ψ , ξ задаются начальные данные следующим образом:

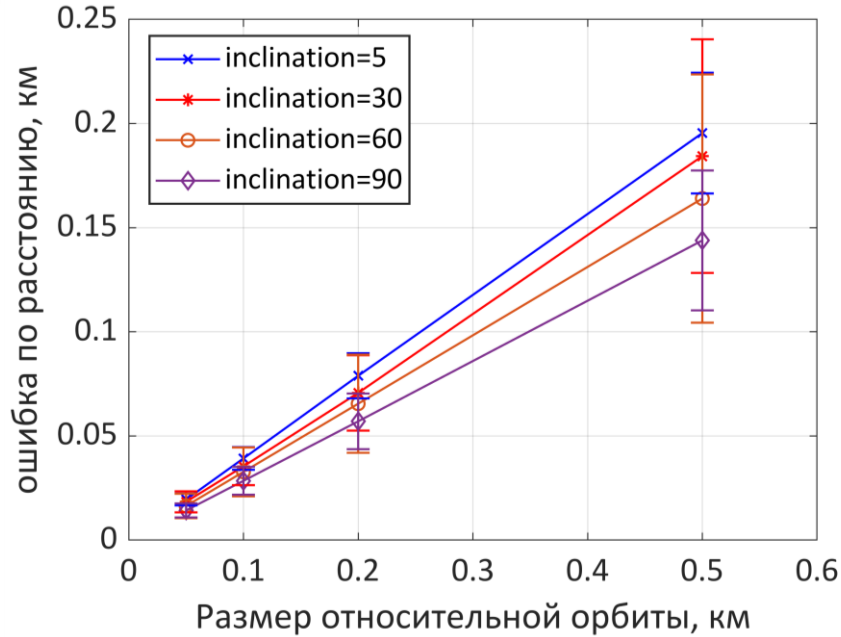
- 1) Задаются некоторые размер относительной орбиты b
- 2) Амплитуды берутся равным b
- 3) Фазы берем из равномерного распределения на отрезке $[0, 2\pi]$
- 4) Сдвиг берем случайно из равномерного распределения на отрезке $[-b, b]$
- 5) Дрейф обнулим

Методика оценивания

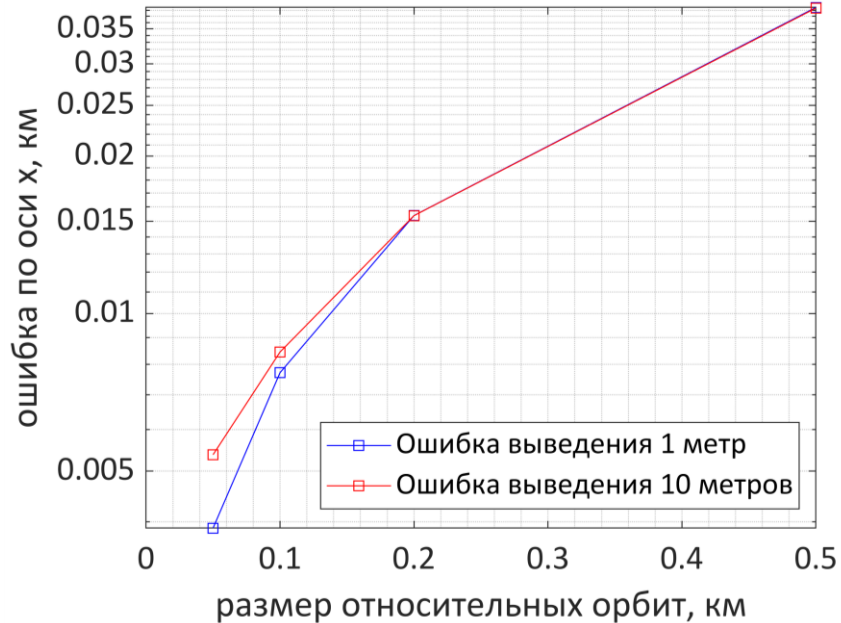
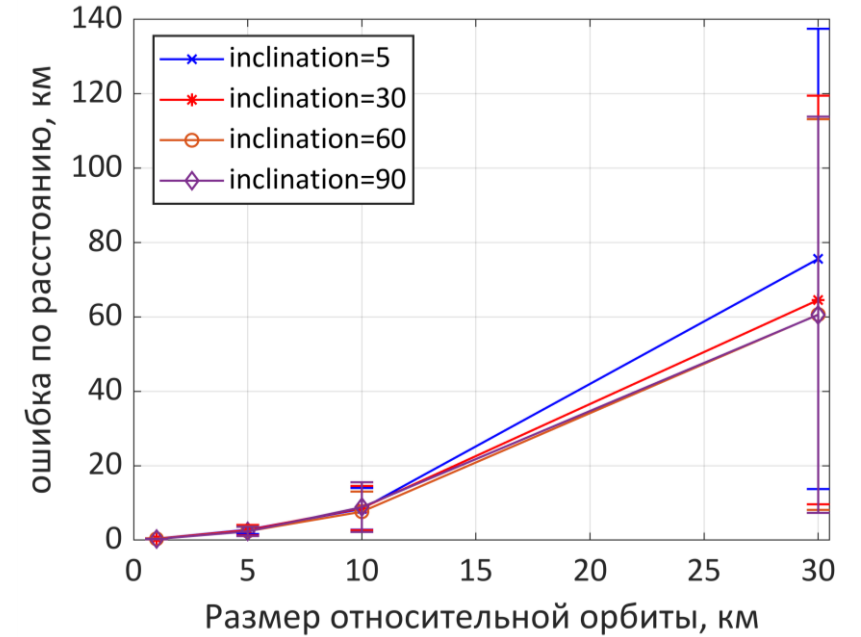
- Задается размер относительных орбит для исследования
- Задаются хилловские константы, получение начальных радиус-векторов и векторов скорости двух аппаратов $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2$
- С помощью метода Монте-Карло получается набор данных: к начальным данным, имитируя ошибку выведения, добавляются случайные величины
- Проводится интегрирование уравнений движений в рамках всех моделей
- Время моделирования – 24 часа.

Оценка точности проводится 2 способами:

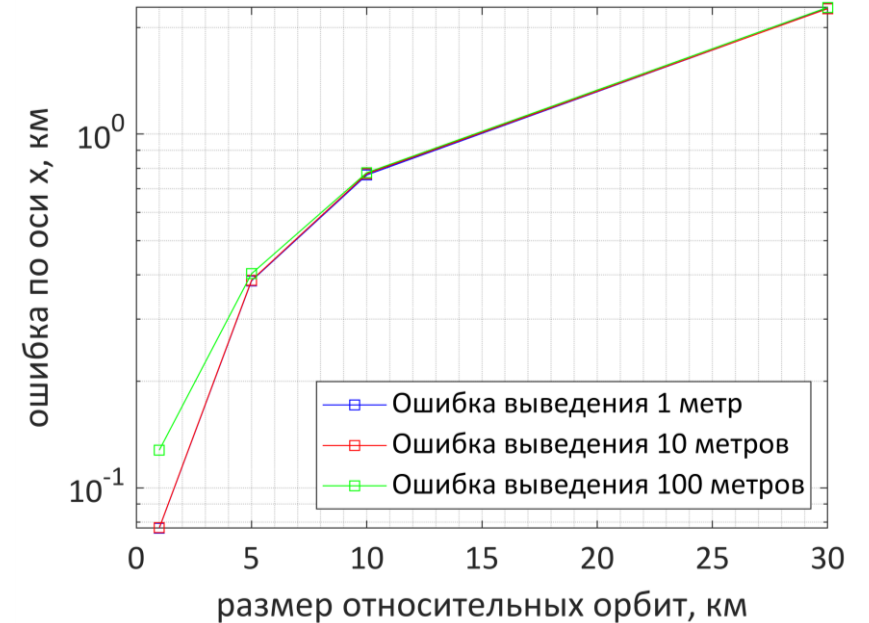
- 1) На последнем витке усредняются ошибки по разным параметрам
- 2) Фиксируется время, когда приближенные уравнения начинают отличаться от полных уравнения движения на заданную величину. В качестве такой величины берется некоторый процент от размера относительной орбиты

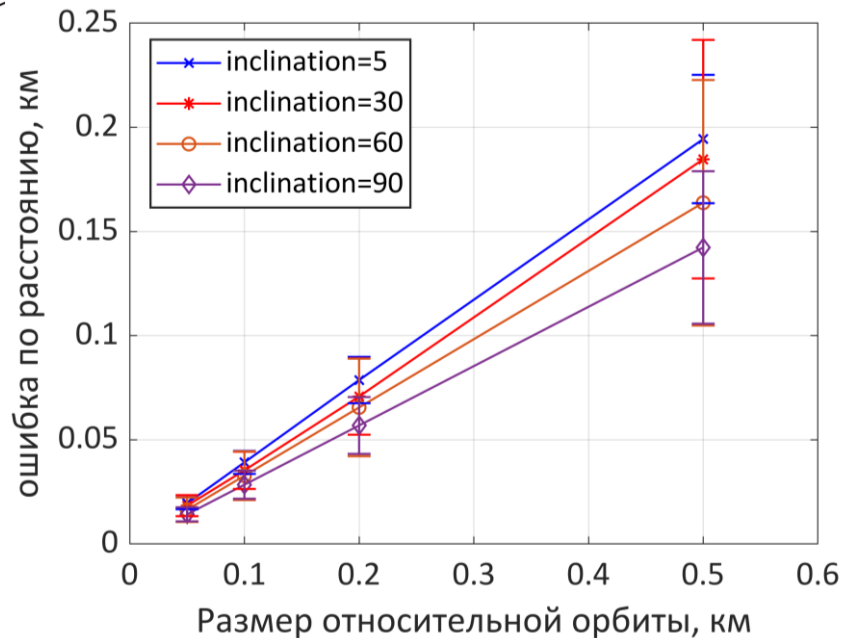


Зависимость ошибки по расстоянию от размера относительных орбит для разных значений наклона

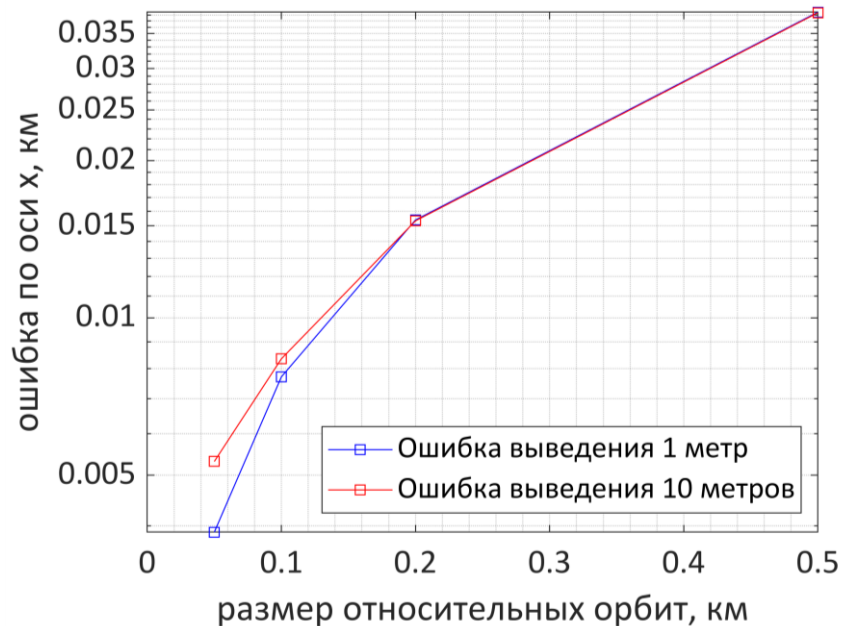
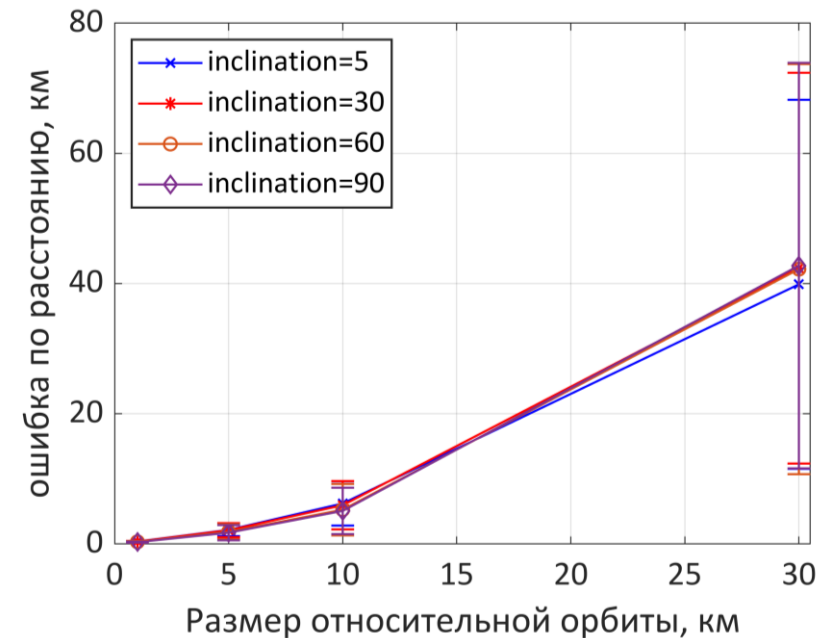


Зависимость ошибки по компоненте x от размера относительной орбиты для разных ошибок выведения

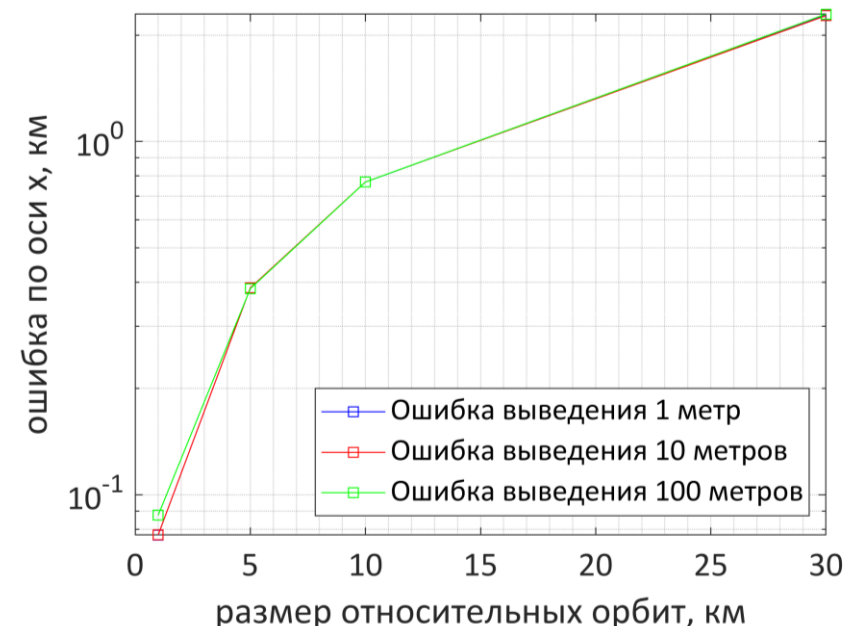


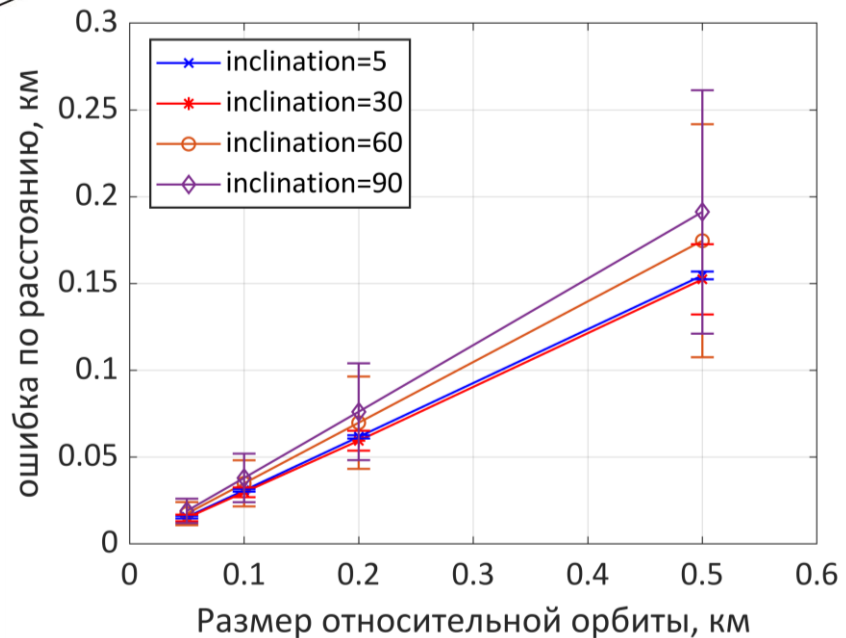


Зависимость ошибки по расстоянию от размера относительных орбит для разных значений

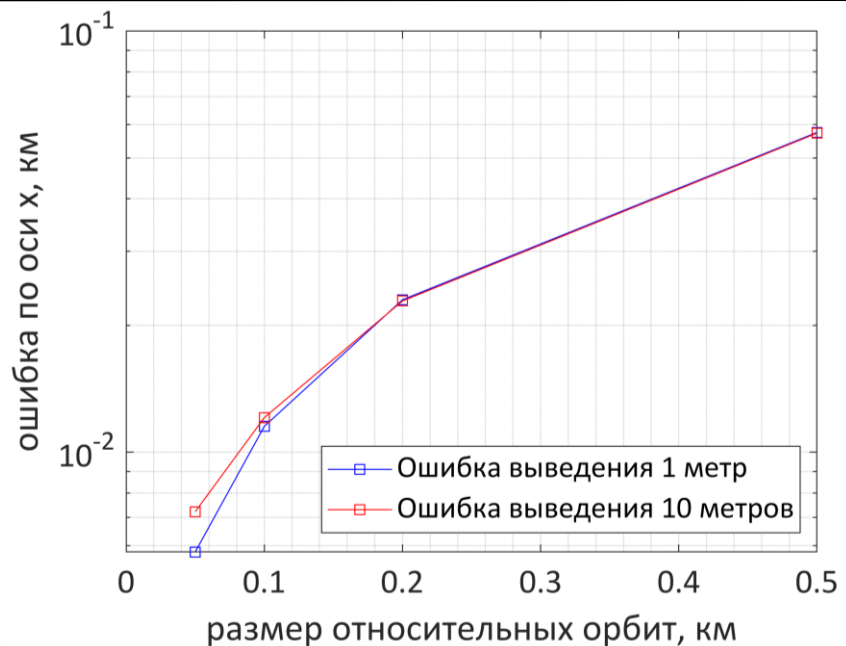
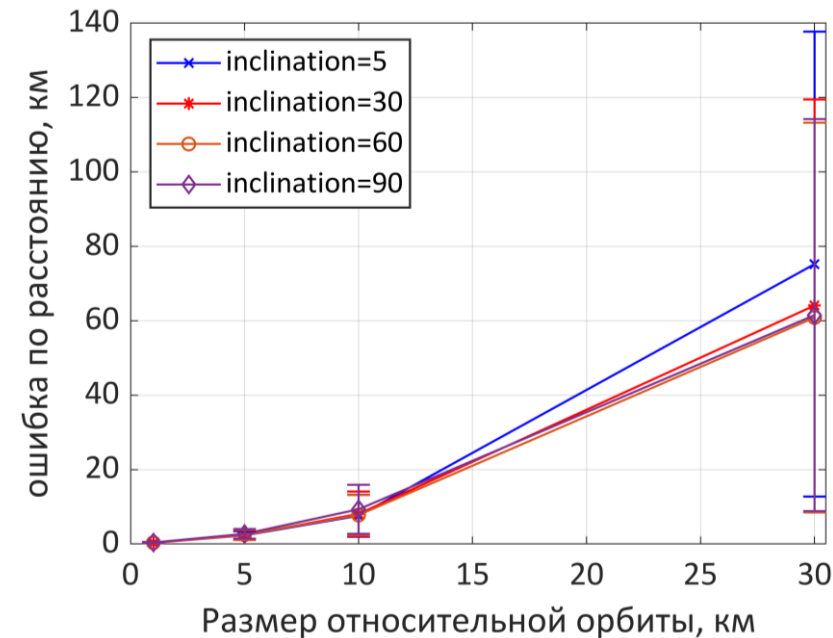


Зависимость ошибки по компоненте x от размера относительной орбиты для разных ошибок выведения

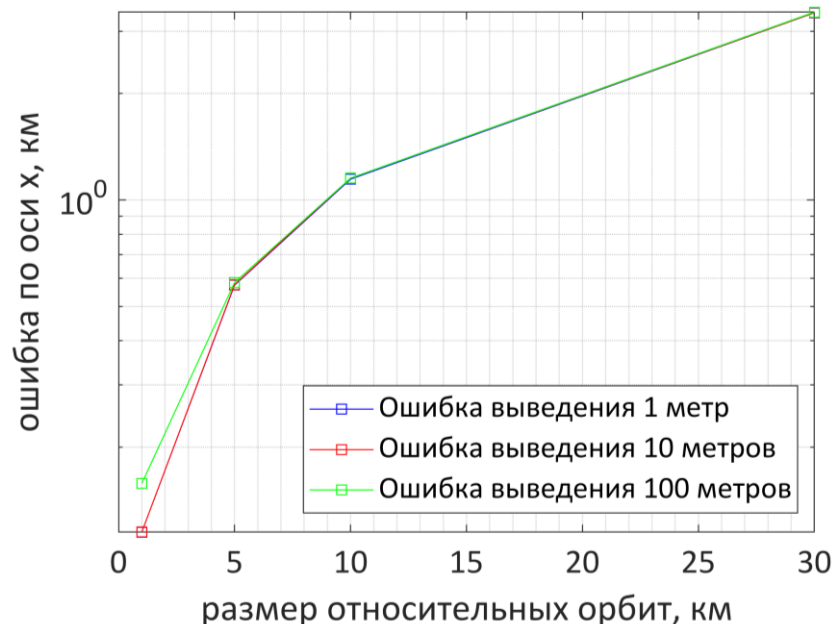




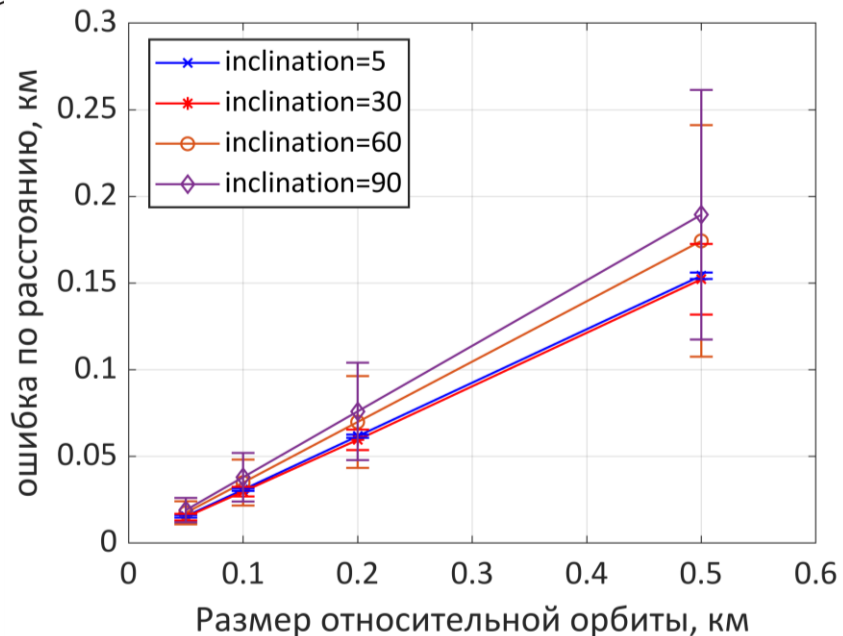
Зависимость ошибки по расстоянию от размера относительных орбит для разных значений



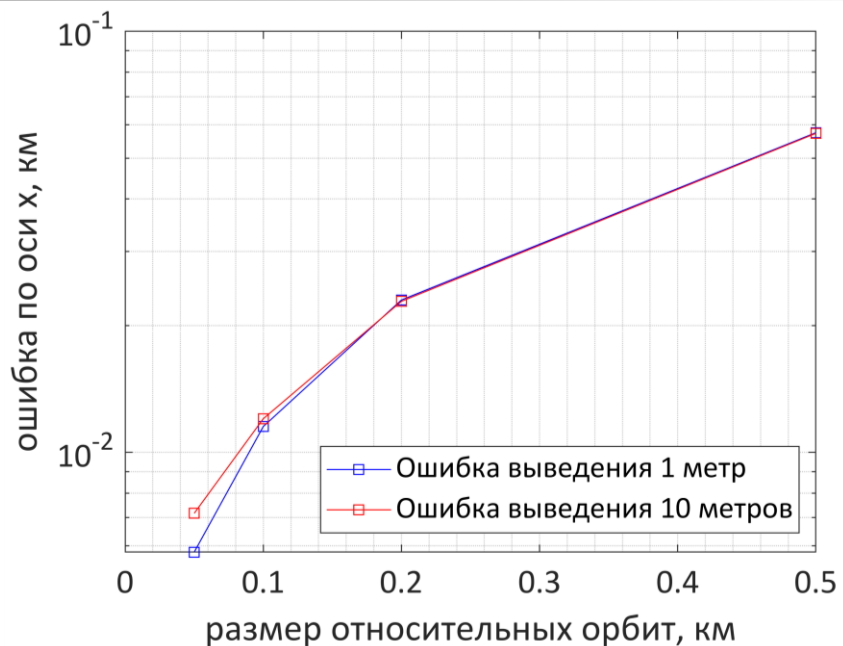
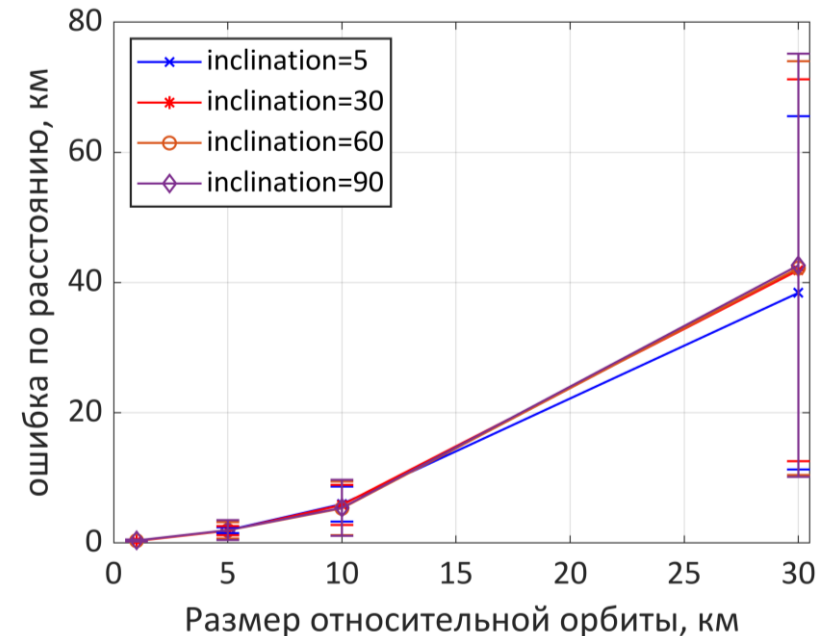
Зависимость ошибки по компоненте x от размера относительной орбиты для разных ошибок выведения



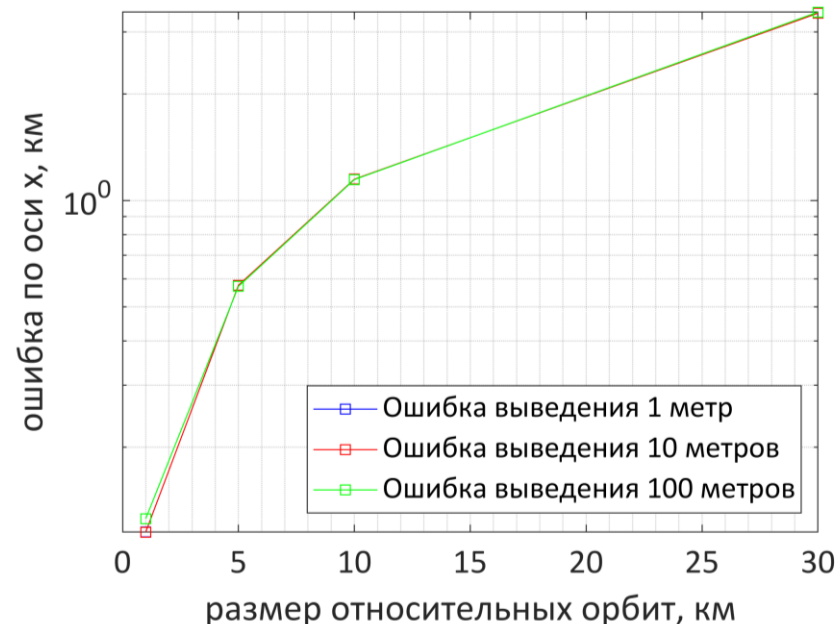
Модифицированные уравнения ШС



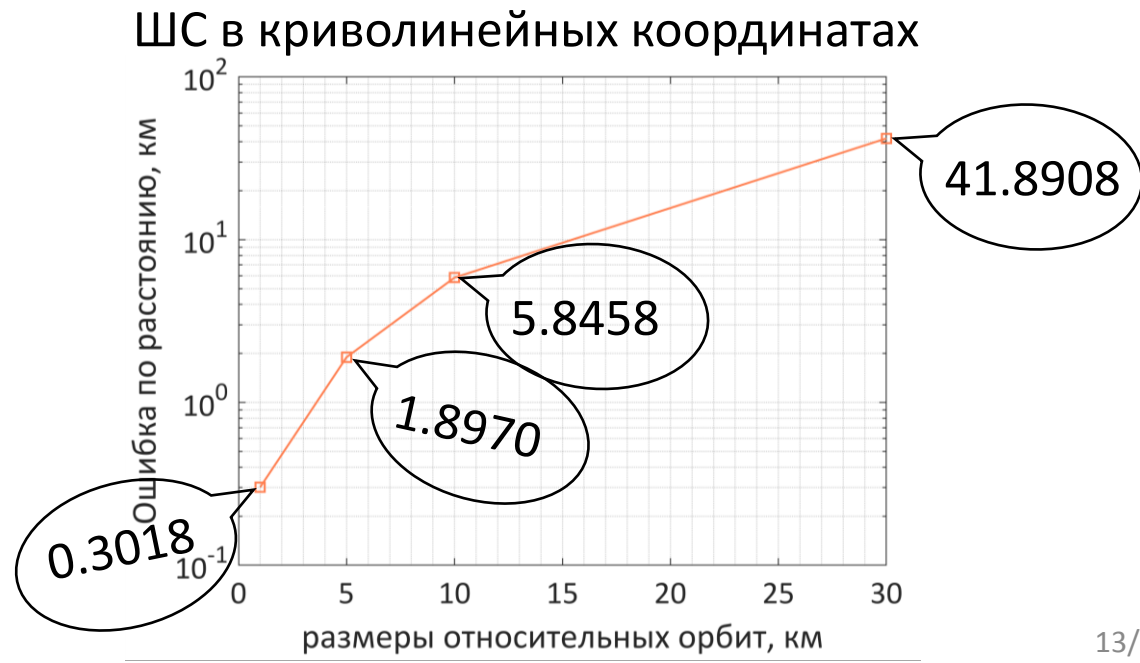
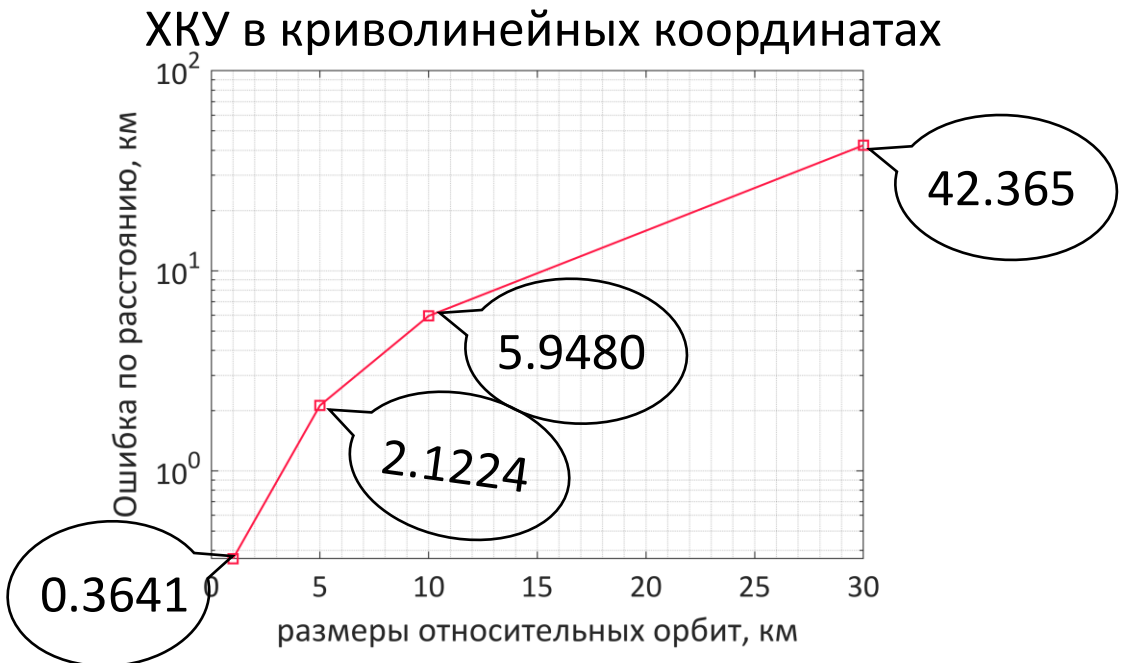
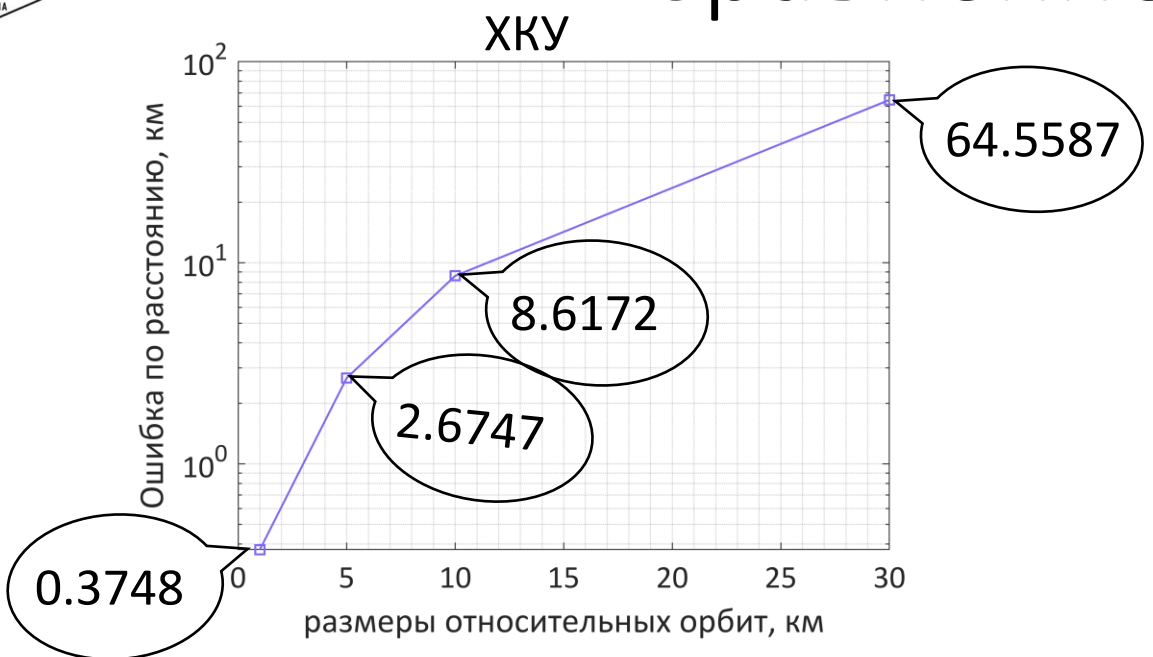
Зависимость ошибки по расстоянию от размера относительных орбит для разных значений



Зависимость ошибки по компоненте x от размера относительной орбиты для разных ошибок выведения



Сравнение моделей

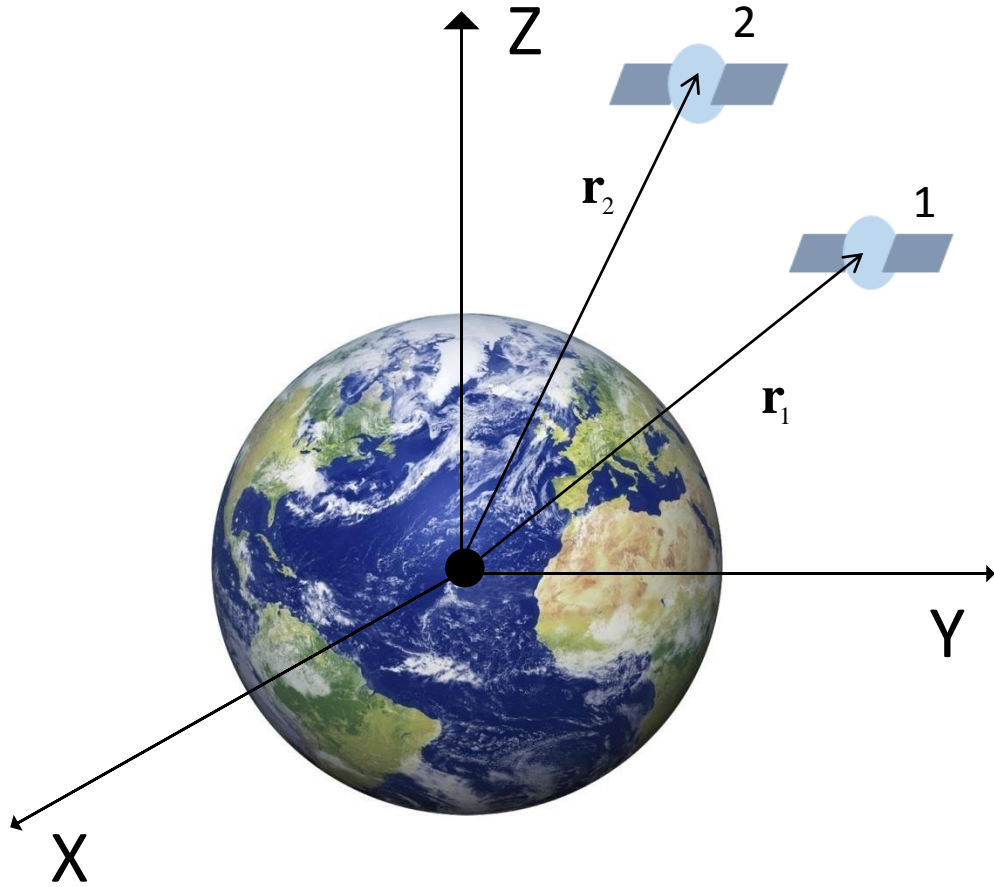


	Наклонение орбиты 30°				Наклонение орбиты 90°			
	100 м	500 м	1000 м	5000 м	100 м	500 м	1000 м	5000 м
Уравнения ХКУ	14,56 ч	13,17 ч	14,04 ч	11,53 ч	23,01 ч	22,93 ч	22,79 ч	21,46 ч
Модифицированные уравнения ХКУ	14,60 ч	13,39 ч	13,96 ч	13,18 ч	23,01 ч	23,01 ч	22,90 ч	22,53 ч
Уравнения ШС	15,85 ч	14,36 ч	15,04 ч	11,54 ч	22,47 ч	22,43 ч	22,37 ч	21,08 ч
Модифицированные уравнения ШС	15,89 ч	14,44 ч	15,37 ч	12,90 ч	22,47 ч	22,45 ч	22,44 ч	22,156 ч

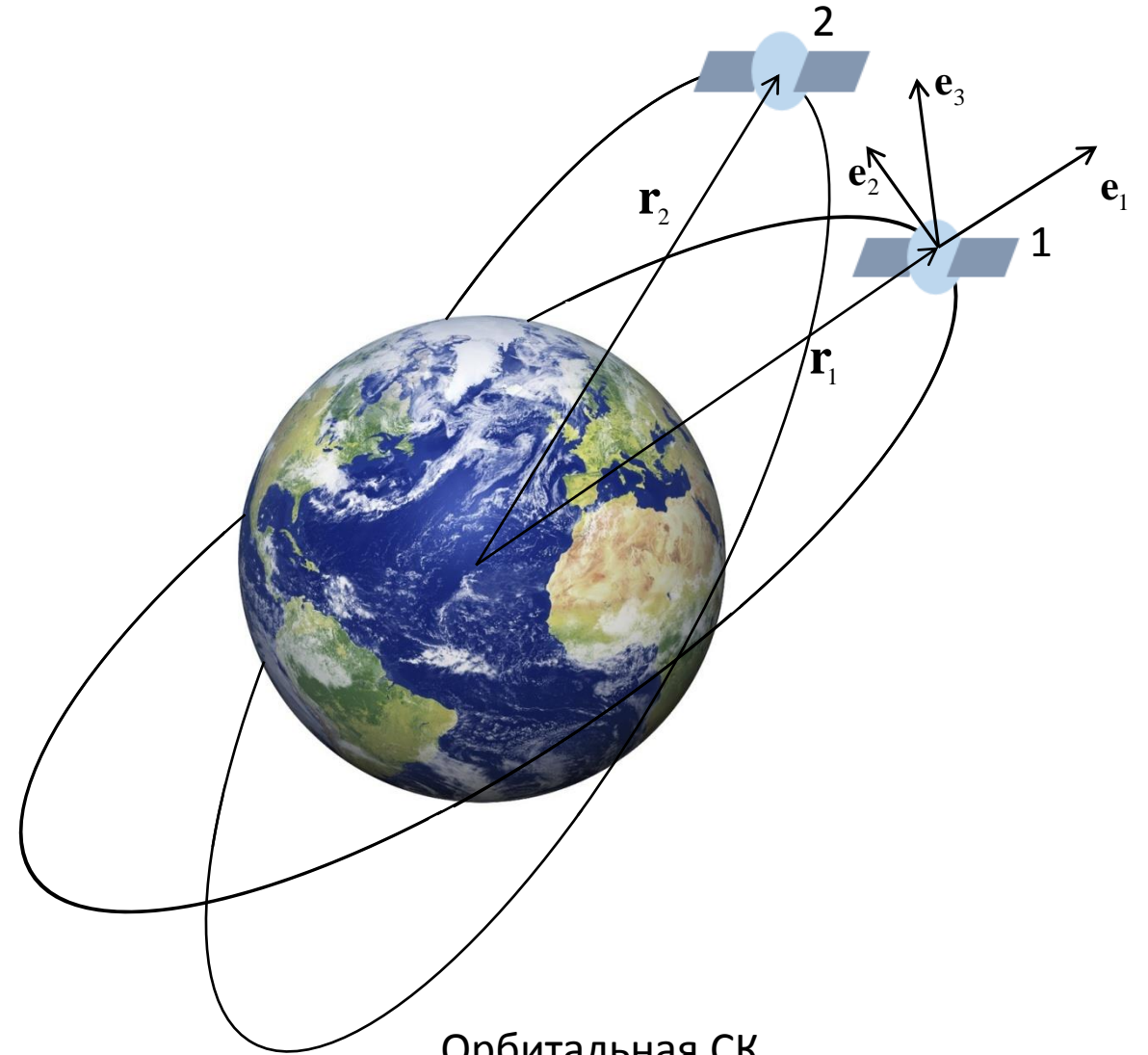
время накопления ошибки 25%

- Реализованы четыре модели относительного движения
- Оценена точность каждой модели
- Для малых размеров относительных орбит (до километра) возможно использование любой из рассмотренных моделей
- На достаточно больших размерах относительных орбит целесообразно использовать уравнения движения в криволинейных уравнениях

Системы координат



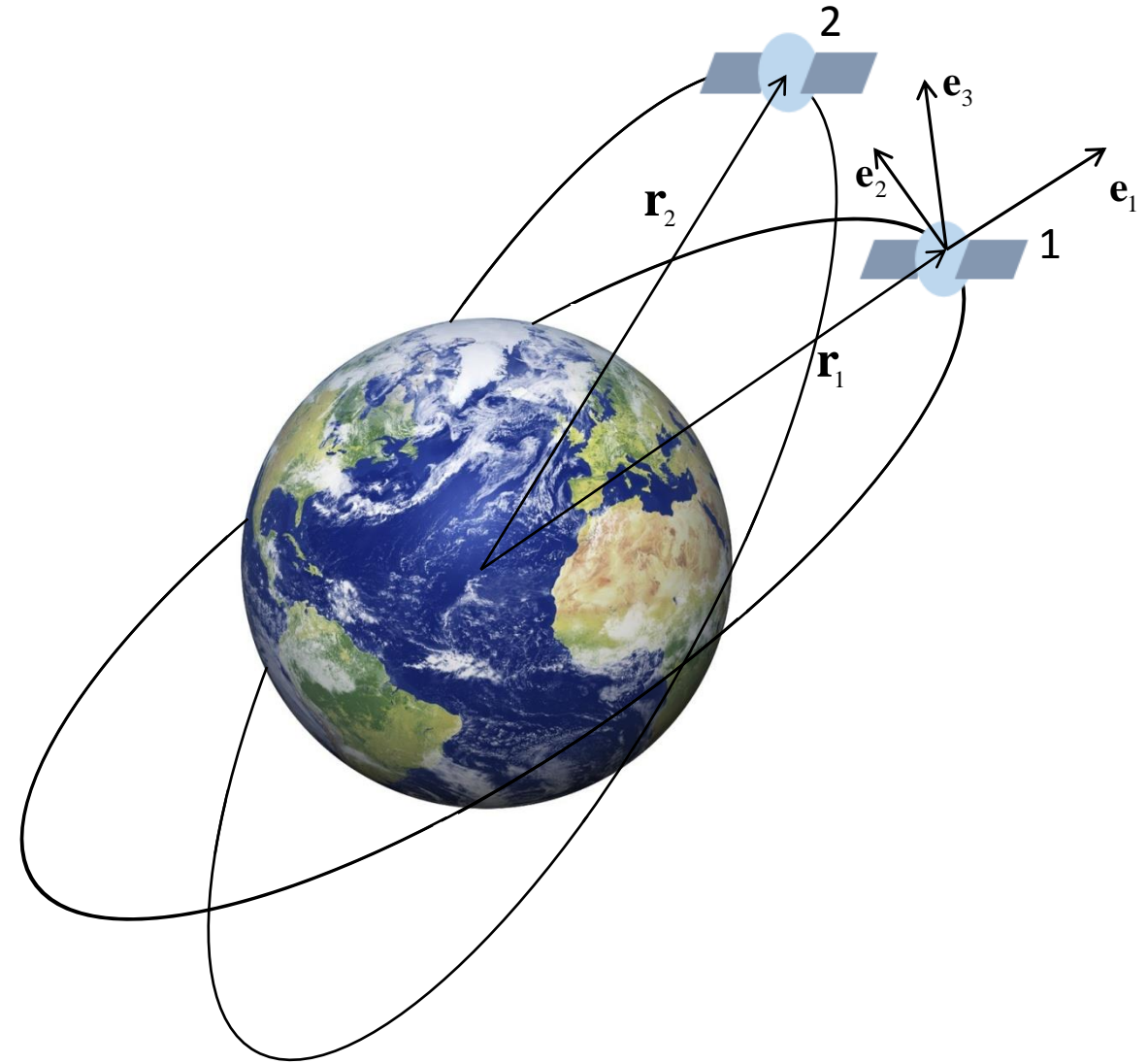
Инерциальная СК



Орбитальная СК

Оси орбитальной СК

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|}$$
$$\mathbf{e}_3 = \frac{[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1]}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1|}$$
$$\mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1]$$

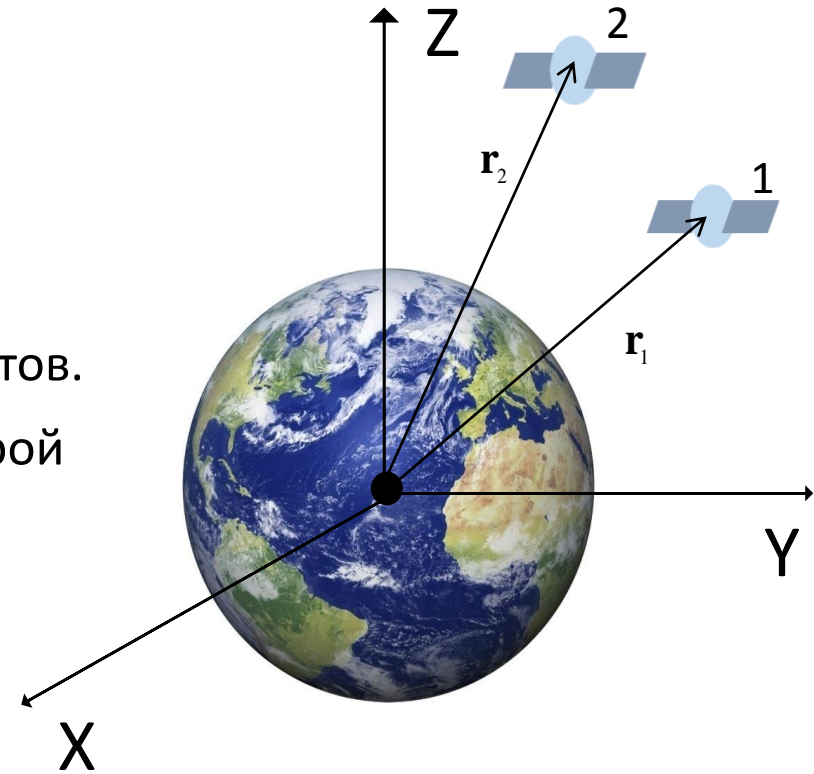


$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\mu \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} + \mathbf{a}_{J_2}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mu \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} + \mathbf{a}_{J_2}$$

Здесь $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – радиус-вектора главного и ведомого аппаратов.

\mathbf{a}_{J_2} – возмущающее ускорение, вызванное влиянием второй гармоники геопотенциала



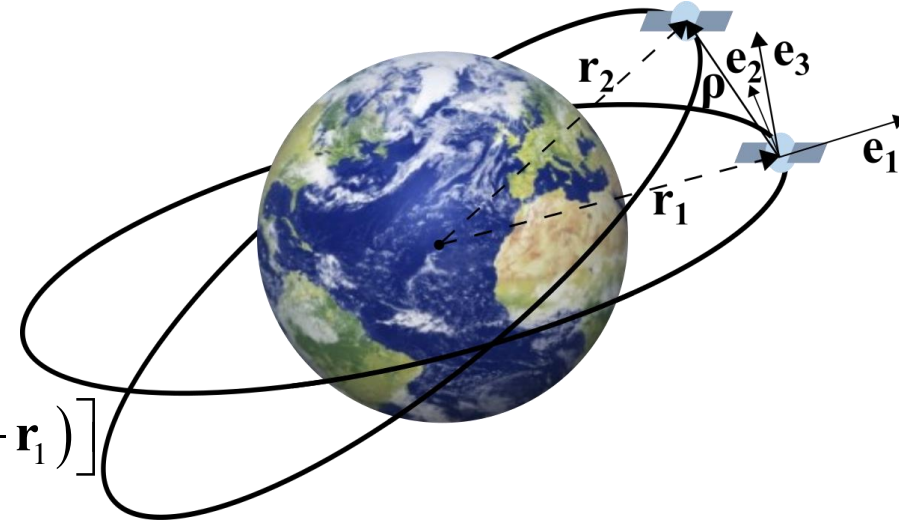
Относительные координаты

- Декартовы относительные координаты: радиус-вектор второго аппарата относительно первого спутника и его скорость.

Относительный радиус-вектор второго аппарата – проекция вектора $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ на оси ОСК

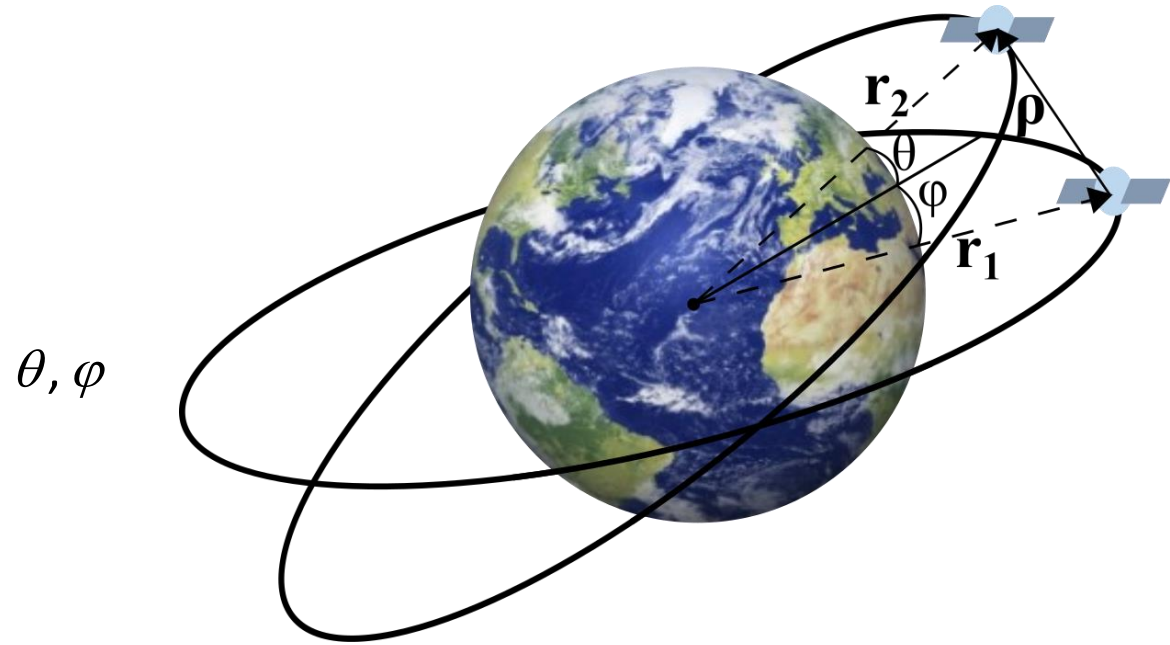
Относительная скорость – проекция вектора $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 - [\boldsymbol{\omega}_e^{IF} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]$ на оси ОСК

Где $\boldsymbol{\omega}_e^{IF}$ – угловая скорость вращения ОСК относительно ИСК в проекциях на оси ИСК



Криволинейные координаты

- В качестве первой компоненты берется $a = |\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}_1|$
- Вторая и третья компоненты – сферические углы θ, φ
- Скорости компоненты выражаются из уравнений из движения аппарата в ИСК



$$a = |\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}_1|$$

$$\dot{a} = \frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{r}_2|} - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)}{|\mathbf{r}_1|}$$

Радиус-вектор ведомого аппарата и его скорость выражаются через криволинейные координаты:

$$\mathbf{r}_2 = (r_1 + a)(\mathbf{e}_1 \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_3 \sin \theta)$$

$$\mathbf{v}_2 = (\dot{r}_1 + \dot{a})(\mathbf{e}_1 \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_3 \sin \theta) + (r_1 + a)[(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1) \cos \theta \cos \varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2) \cos \theta \sin \varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) \sin \theta] +$$

$$+ (r_1 + a)[\mathbf{e}_1(-\sin \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \cos \theta \sin \varphi \dot{\varphi}) + \mathbf{e}_2(-\sin \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \cos \theta \cos \varphi \dot{\varphi}) + \mathbf{e}_3 \cos \theta \dot{\theta}]$$

Домножаем первое уравнение система на \mathbf{e}_3 и получаем: $\theta = \arcsin \left(\frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{r}_2|} \right)$

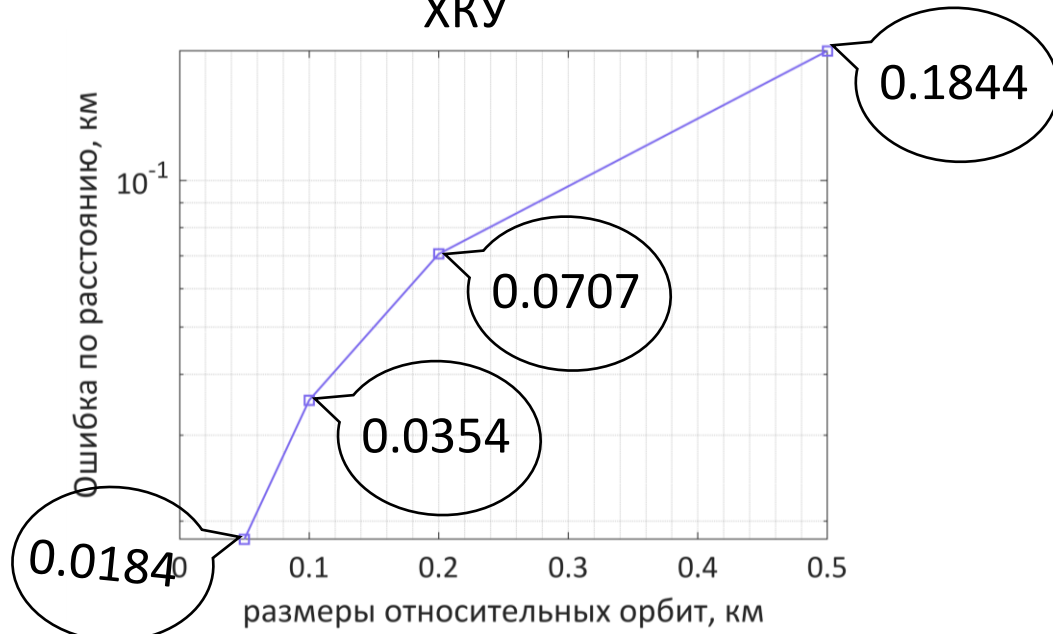
Домножаем первое уравнение система на \mathbf{e}_2 и получаем: $\varphi = \arcsin \frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{r}_2| \cos \theta}$

Домножаем второе уравнение системы на \mathbf{e}_3 и получаем: $\dot{\theta} = \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{r}_2| \cos \theta} - \frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2) \operatorname{tg} \varphi}{|\mathbf{r}_2|} + (\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\omega}) \cos \varphi - (\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\omega}) \sin \varphi$

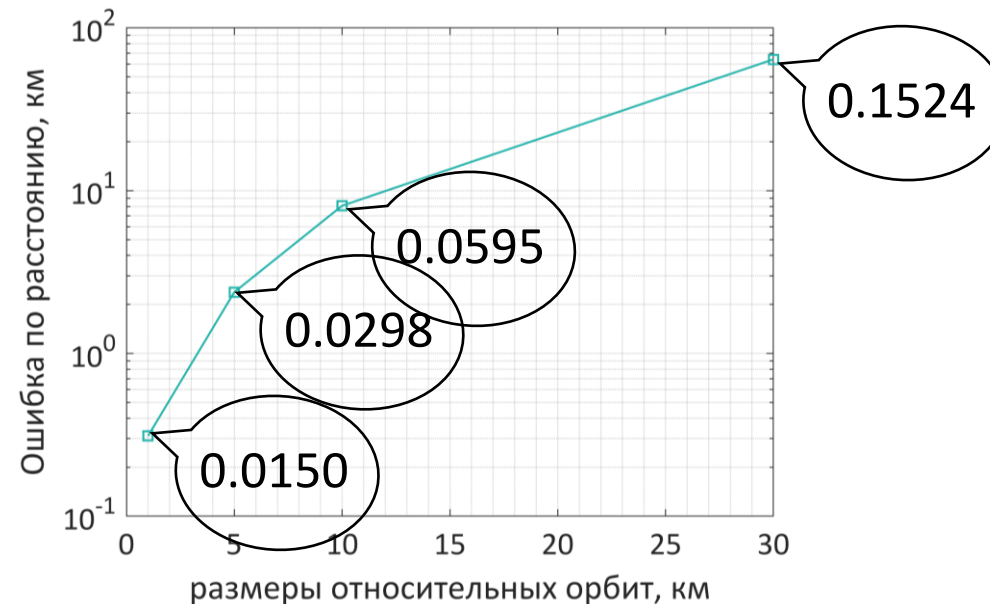
Домножаем второе уравнение система на \mathbf{e}_2 и получаем: $\dot{\varphi} = \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{r}_2| \cos \theta \cos \varphi} - \frac{\left(\frac{(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_1|} + \dot{a} \right)}{|\mathbf{r}_2|} \operatorname{tg} \varphi - (\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\omega}) + \frac{(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\omega}) \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} +$

$$+ \dot{\theta} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta$$

ХКУ



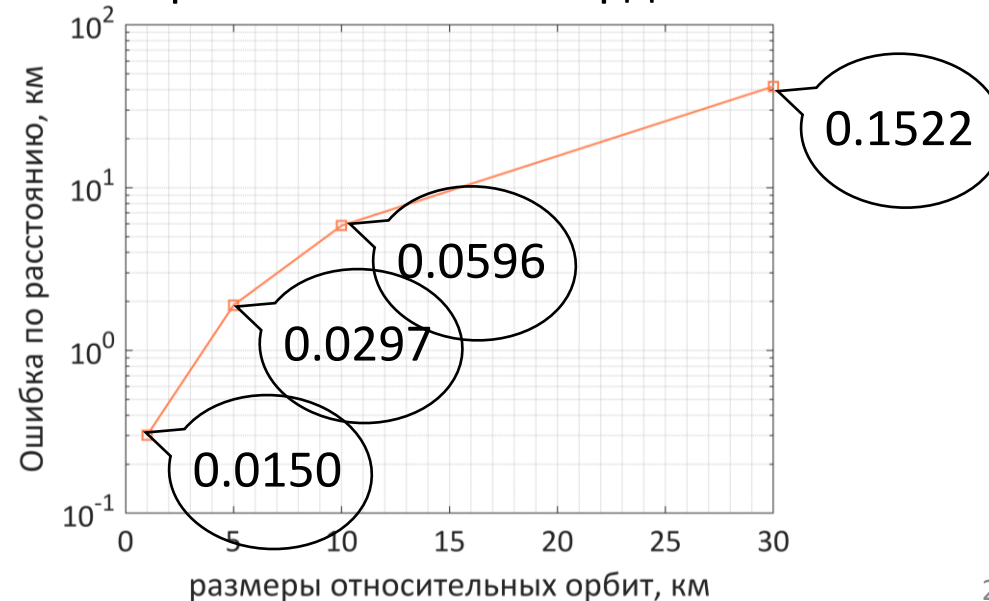
ШС



ХКУ в криволинейных координатах



ШС в криволинейных координатах



Исследование времени накопления ошибки 10%

	Наклонение орбиты 30°				Наклонение орбиты 90°			
	100 м	500 м	1000 м	5000 м	100 м	500 м	1000 м	5000 м
Уравнения ХКУ	6,34 ч	5,75 ч	6,09 ч	4,88 ч	17,21 ч	16,90 ч	16,54 ч	12,69 ч
Модифицированные уравнения ХКУ	6,35 ч	5,92 ч	6,18 ч	5,81 ч	17,22 ч	17,17 ч	17,32 ч	17,29 ч
Уравнения ШС	6,84 ч	6,14 ч	6,45 ч	4,97 ч	15,69 ч	15,69 ч	15,43 ч	12,19 ч
Модифицированные уравнения ШС	6,83 ч	6,22 ч	6,55 ч	5,61 ч	15,69 ч	15,86 ч	15,93 ч	17,33 ч

Исследование времени накопления ошибки 50%

	Наклонение орбиты 30°				Наклонение орбиты 90°			
	100 м	500 м	1000 м	5000 м	100 м	500 м	1000 м	5000 м
Уравнения ХКУ	20,34 ч	18,99 ч	19,79 ч	4,88 ч	23,79 ч	23,79 ч	23,93 ч	23,90 ч
Модифици- рованные уравнения ХКУ	20,35 ч	19,00 ч	19,37 ч	5,81 ч	23,79 ч	23,79 ч	23,93 ч	23,70 ч
Уравнения ШС	21,26 ч	20,13 ч	20,92 ч	4,98 ч	23,73 ч	23,72 ч	23,78 ч	23,76 ч
Модифици- рованные уравнения ШС	21,30 ч	20,10 ч	19,43 ч	5,61 ч	23,72 ч	23,79 ч	23,79 ч	23,57 ч