Поиск оптимальных траекторий космического аппарата с использованием кривых, заполняющих пространство

Тарасов А.А.
Московский физико-технический институт

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., с.н.с., Трофимов С.П.
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

План доклада

- Цель дипломной работы
- Кривые Пеано
- Алгоритмы оптимизации
- Задача Ламберта
- Задача оптимального перелета с ограниченной мощностью
- Выводы

Оптимизационные задачи в астродинамике

Химический двигатель

Приращение скорости
можно считать мгновенным
(импульсная тяга)

Базовая задача:
задача Ламберта

Методы: прямые и непрямые

Задачи сильно нелинейны и многоэкстремальны
Необходимо найти глобальный экстремум

Двигатель малой тяги

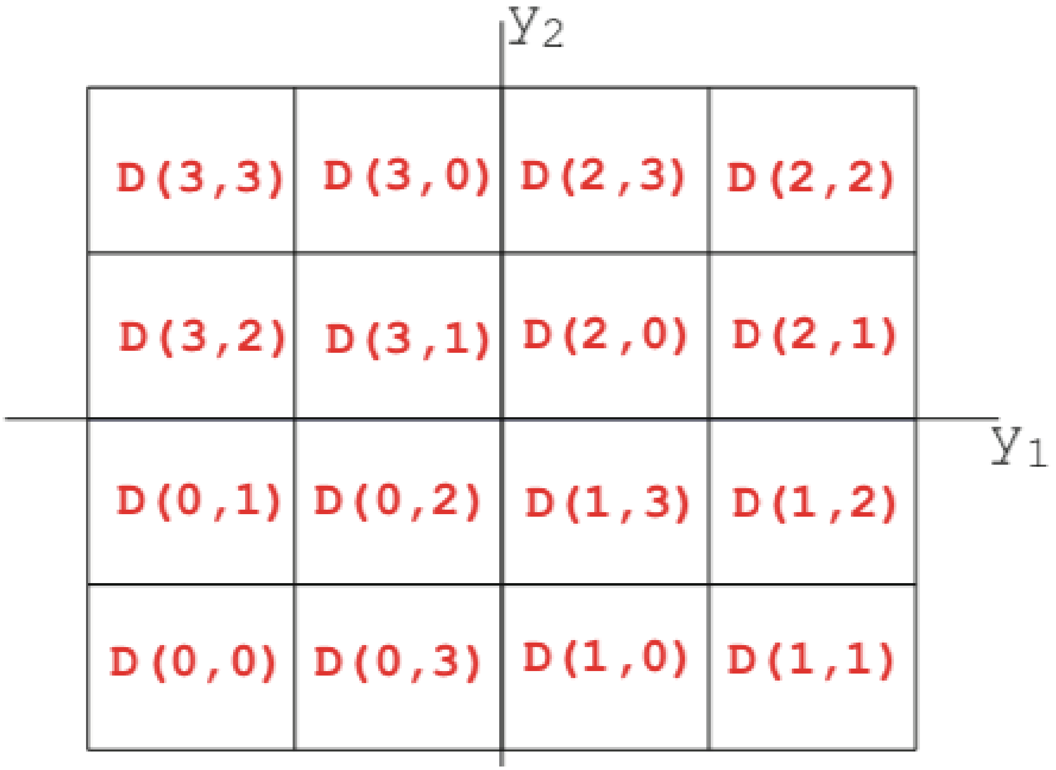
Двигатель работает
в течение длительного
интервала времени
(непрерывная тяга)

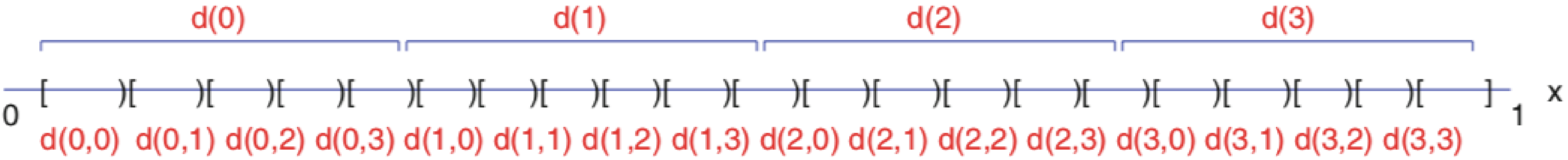
Пример задачи:
задача оптимального перелета
с ограниченной мощностью

Кривые Пеано…

Задача. Существует ли непрерывное сюръективное отображение отрезка на куб?

Да. Это отображение строится итерационно.





… и их аппроксимации

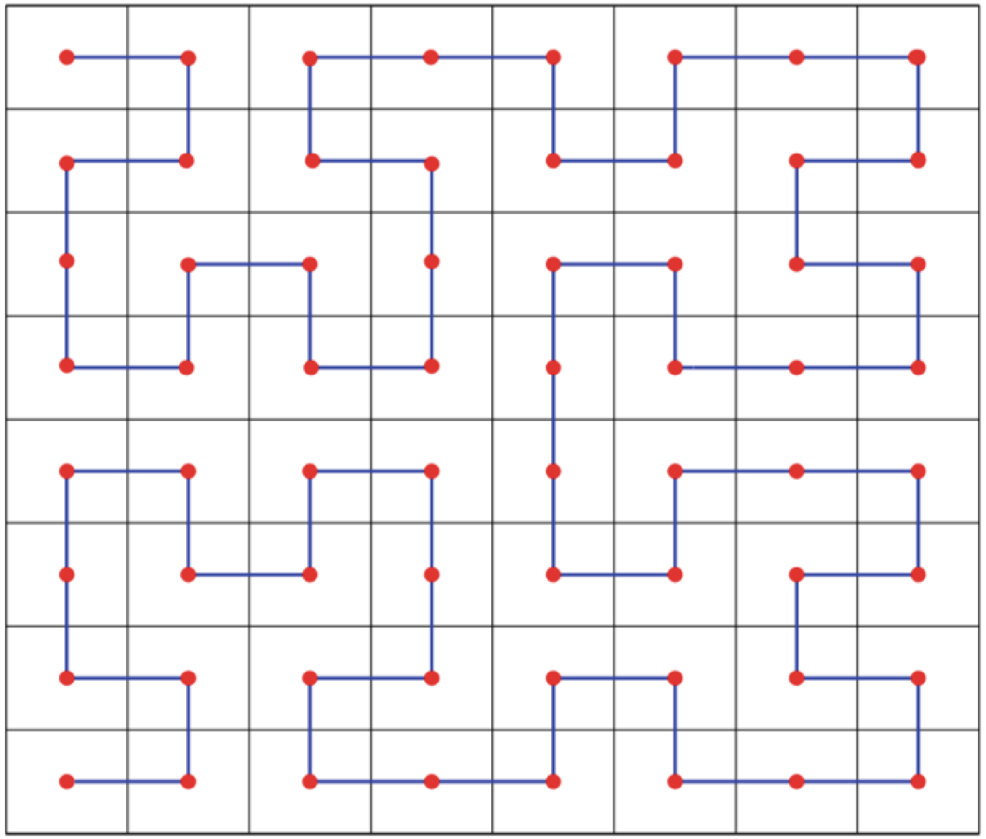
Липщецева функция с константой L

$\downarrow$

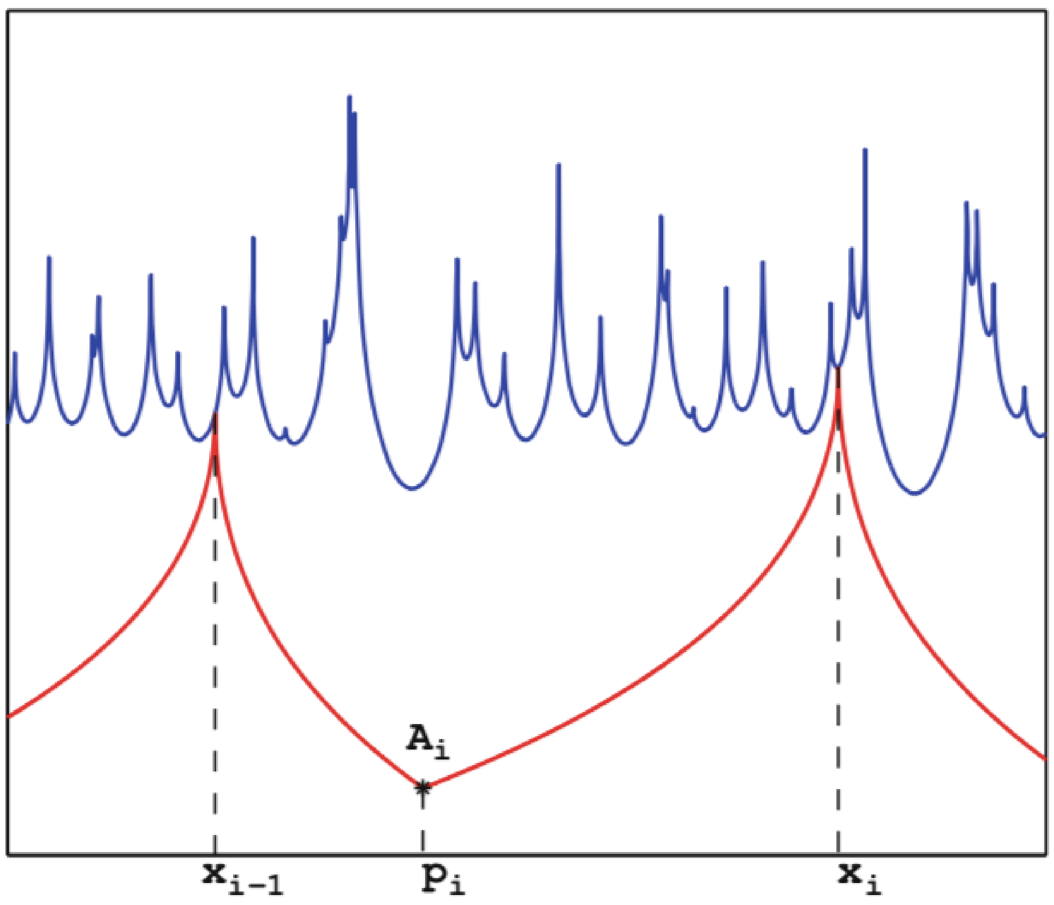
Гельдерова степени $1/N$

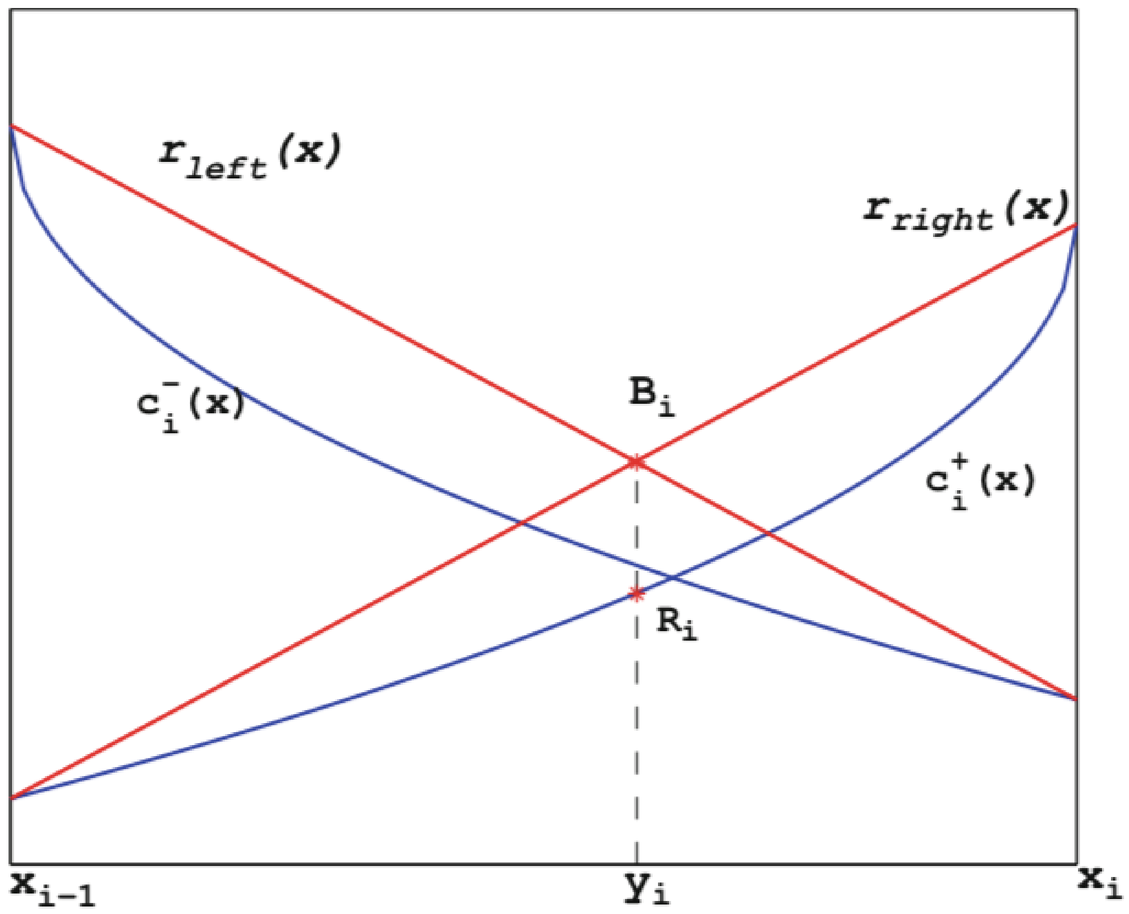
с константой $H = 2L\sqrt{N+3}$

$$F_{min} \geq F^P_{min} - 2^{-(M+1)} L\sqrt{N}$$



Гельдеровы функции. Геометрический подход





Оценка константы Гельдера

Адаптивная оценка

$$h^k = \max\{h_i : 2 \le i \le k\}$$

$$h_i = \frac{|z_i - z_{i-1}|}{|x_i - x_{i-1}|^{1/N}}, \quad 2 \le i \le k$$

$$H_i = r \cdot h^k$$

Local tuning

$$\lambda_i = \max\{h_{i-1}, h_i, h_{i+1}\}, \;\; 3 \le i \le k-1$$

$$\gamma_i = h^k \frac{(x_i - x_{i-1})}{X^{max}}$$

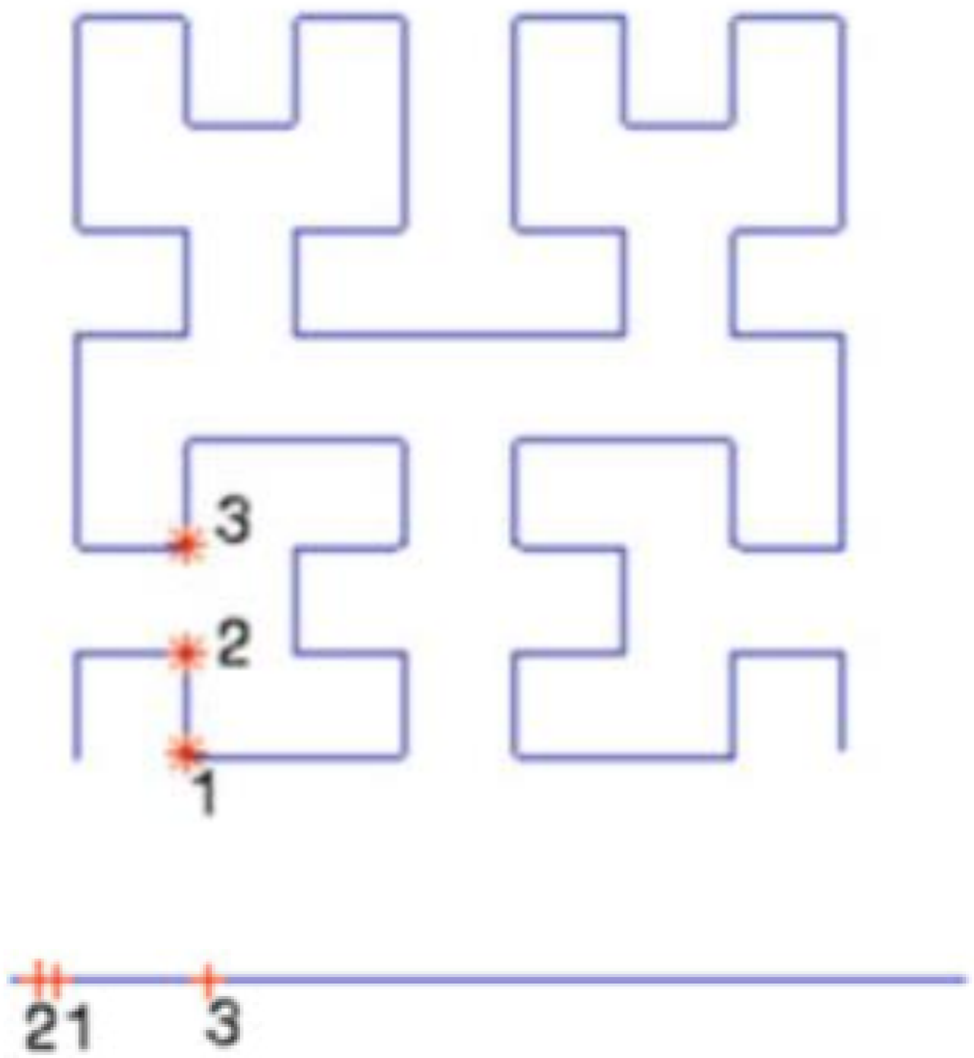
$$X^{\max} = \max\{x_i - x_{i-1} : 2 \le i \le k\}$$

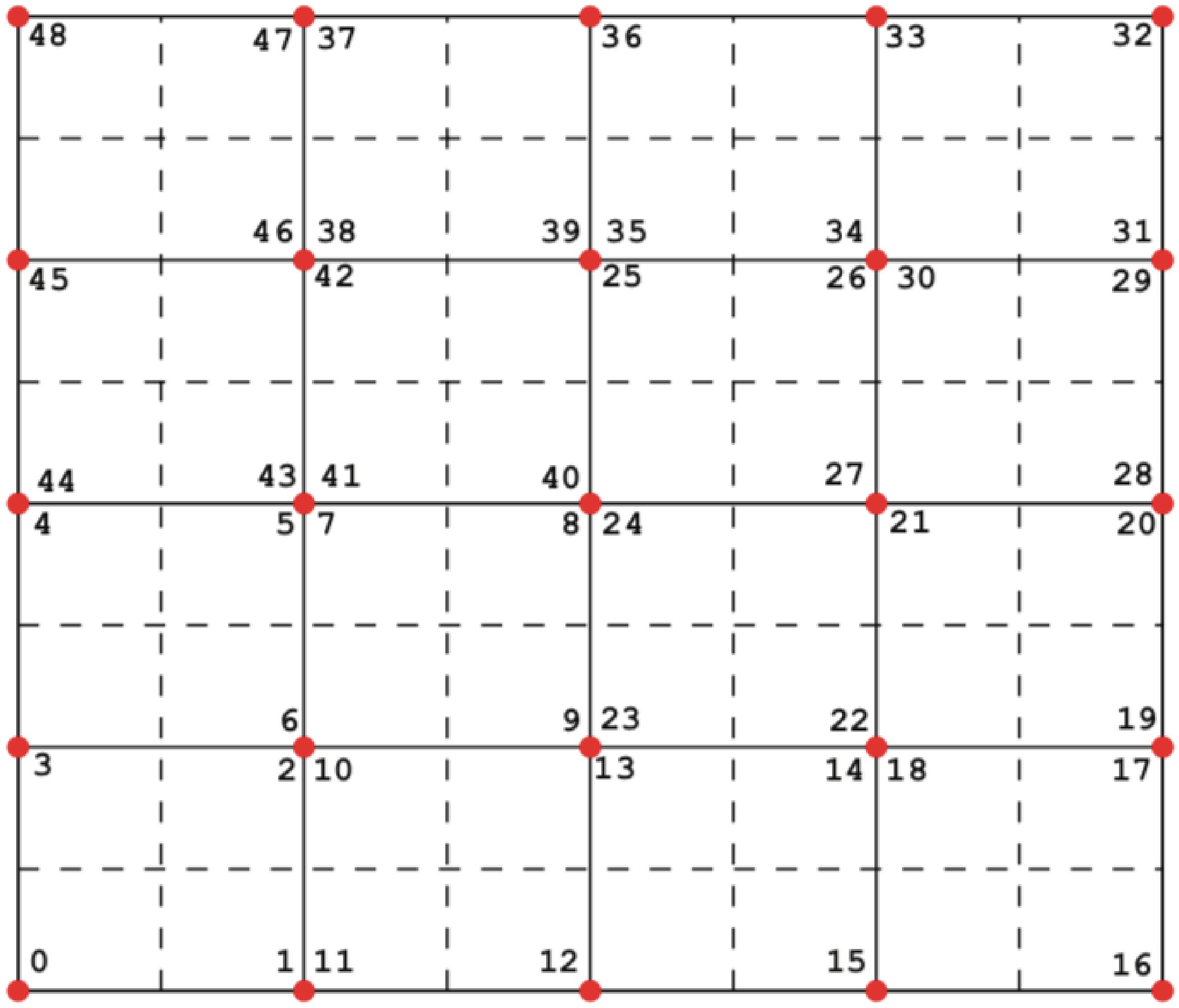
$$m_i = \max\{\xi, \lambda_i, \gamma_i\}$$

$$H_i = r \cdot m_i$$

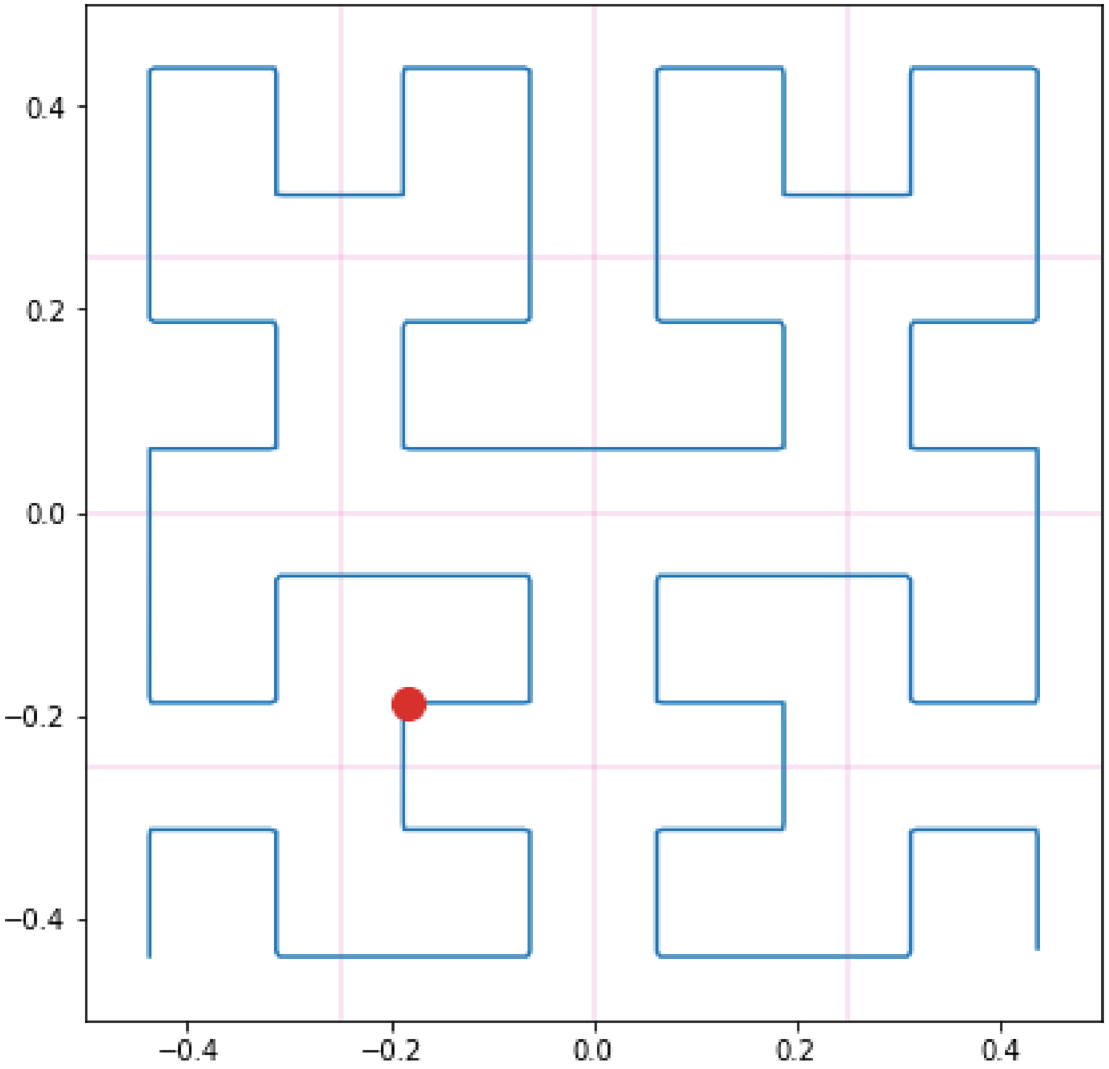
Доказана сходимость алгоритма к глобальному экстремуму.

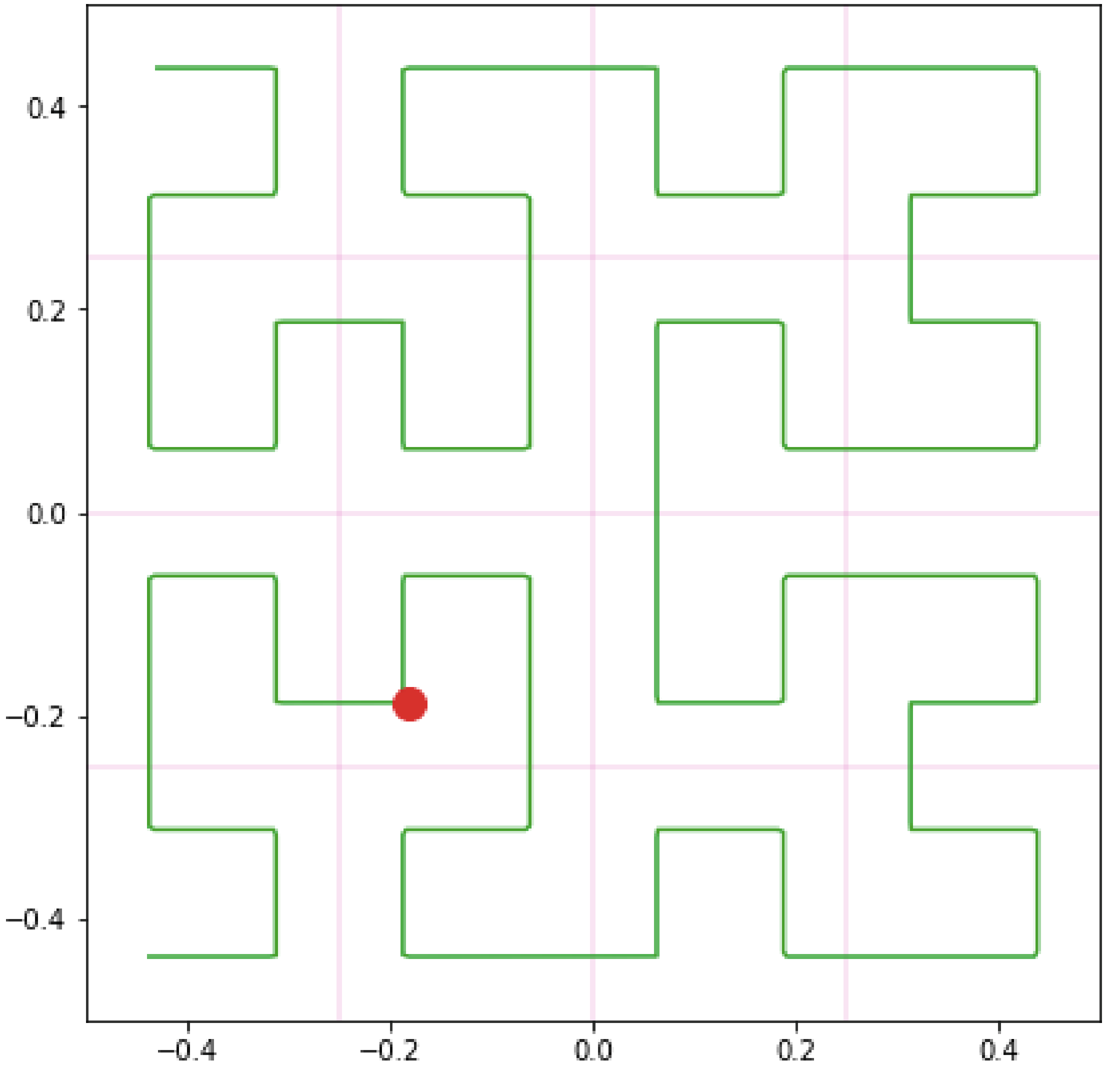
Кривая Пеано не инъективна, а аппроксимация …



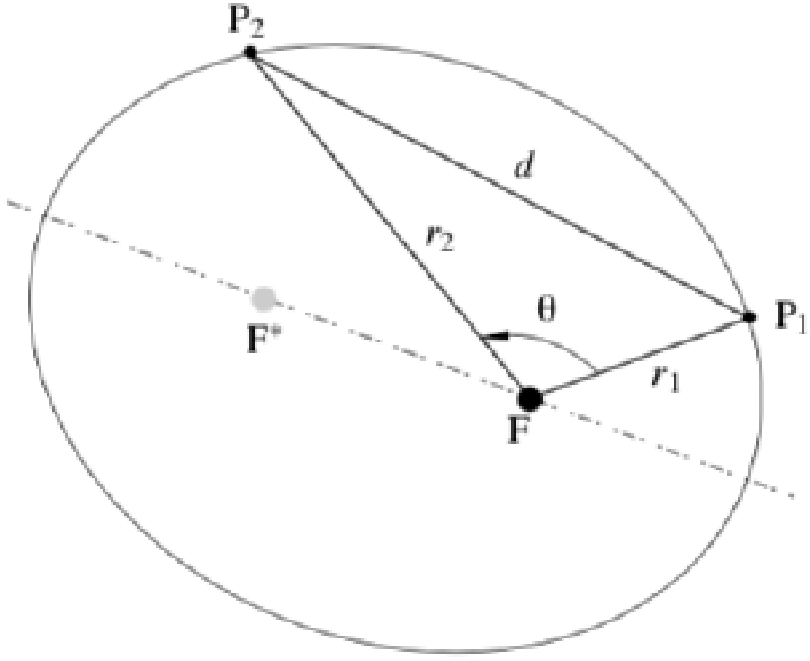


Параллельные алгоритмы





Задача Ламберта



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\dfrac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}(T) = \mathbf{r}_f \end{cases}$$

Краевая задача

↓

$$\mathbf{f} = \mathbf{r}\left(T\right) - \mathbf{r}_f$$

$$||\mathbf{f}|| \to \min$$

Оптимизационная задача

Численные эксперименты

1) M = 20, r = 2, количество разверток – 3. Параллельный алгоритм не сошелся за 100 000 итераций при $\varepsilon = 10^{-6}$. При меньших ε алгоритм сошелся и позволил получить решение с невязкой порядка 10^{-5}.

2) Ускоренный алгоритм при $\varepsilon = 10^{-8}$ сошелся менее чем за 10 000 итераций и дал решение с невязкой порядка 10^{-7}.

точность	1e-7	1e-8	1e-9	1e-10
число итераций	2687	20988	9523	6730
значение невязки	1.5e-3	5.5e-7	7.5e-5	7.8e-5
m	12988	500	32477	107875
время	2	9	6	5

Задача оптимального перелета с двигателем ограниченной мощности

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{a}_{\text{тяги}}^2 dt \ \rightarrow min$$

$$\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}_0$$

$$\boldsymbol{r}(t_f) = \boldsymbol{r}_f, \boldsymbol{v}(t_f) = \boldsymbol{v}_f$$

$$H = -\frac{\boldsymbol{a}_{\text{тяги}}^2}{2} + \boldsymbol{p}_r \boldsymbol{v} + \boldsymbol{p}_v(\boldsymbol{a}_{\text{тяги}} + \boldsymbol{a}_{\text{внеш}})$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{тяги}} = \boldsymbol{p}_v$$

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{p}_v \\ \ddot{\boldsymbol{p}}_v = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \boldsymbol{r}^2} \boldsymbol{p}_v \end{cases}$$

$$\boldsymbol{z} = \left(\boldsymbol{p}_v(t_0), \dot{\boldsymbol{p}}_v(t_0)\right)$$

$$f(\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{r}(t_f) - \boldsymbol{r}_f)^2 + (\boldsymbol{v}(t_f) - \boldsymbol{v}_f)^2$$

Задача оптимального управления

$\downarrow$

Краевая задача

$\downarrow$

Оптимизационная задача

Численные эксперименты

1) M = 13, r = 2, количество разверток – 7.
Параллельный алгоритм не сошелся за 100 000 итераций при $\varepsilon = 10^{-6}$.
Минимальное найденное значение функции с невязкой порядка 10^{-4}.

2) Длина ребра куба была уменьшена до 10^{-5}.
Алгоритм не сошелся за 200 000 итераций.
Минимальное найденное значение функции с невязкой порядка 10^{-3}.

3) Длина ребра куба была уменьшена до 10^{-6}.
Алгоритм не сошелся за 200 000 итераций.
Минимальное найденное значение функции с невязкой порядка 10^{-4}.

4) Все алгоритмы склонны недооценивать значение константы Гельдера.

Заключение

1) Получено удовлетворительное решение задачи Ламберта.
Локальная оценка константы Гельдера существенно ускорила алгоритм.

2) Не получено удовлетворительное решение задачи с квадратичным функционалом.

Почему метод не справляется с такими задачами?

1) Исходная задача очень чувствительна. Сведение многомерной задачи
к одномерной еще больше ухудшает функционал.

2) За разумное число итераций метод не находит хорошую оценку константы Гельдера.

3) Существует принципиальное ограничение на число M: $MN \leq 64$
(числа представляются 64-битными переменными).

Спасибо за внимание!

Метод Пиявского

$$C(x) = f(y) - L|x - y|$$

Миноранта ограничивает функцию снизу.

Следующая точка x выбирается как точка минимума миноранты.

Требуется знание константы Липшица!