

МЕТОДЫ ОБХОДА СИНГУЛЯРНОСТЕЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ УГЛОВОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ СПУТНИКА С ПОМОЩЬЮ ГИРОДИНОВ

Выполнил: студент 572в группы Вознюк Д.А.

Научный руководитель: доцент к.ф.-м.н. Ткачев С.С.

Содержание

- Введение
- Постановка задачи
- Формирование управляющего воздействия
- Построение сингулярных поверхностей
- Методы обхода сингулярностей
- Моделирование
- Выводы

Введение

Достоинства гиринов:

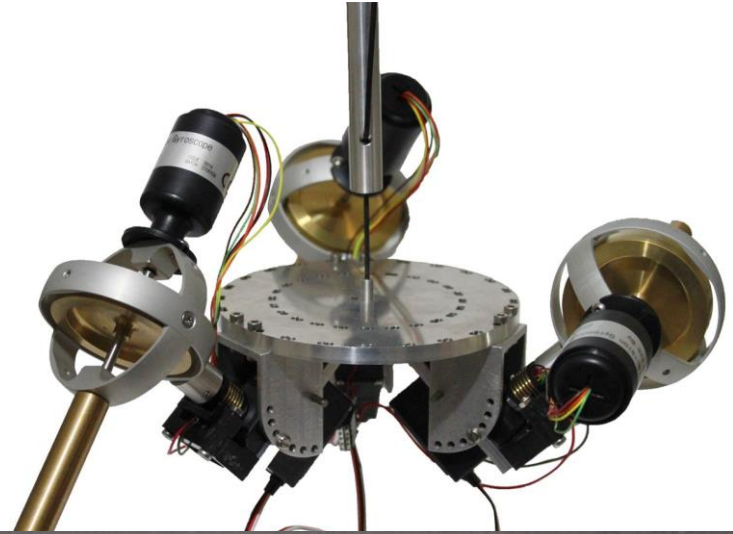
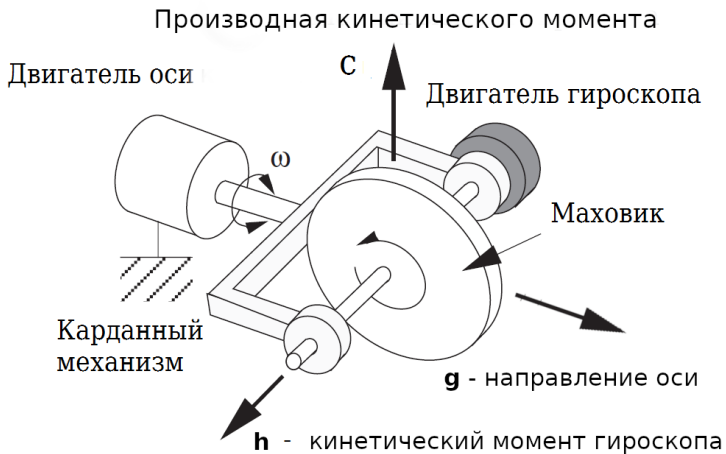
Высокая точность

Большой момент в сравнении с маховиками

Особенности гиринов:

Сложная механика

Наличие особых конфигураций системы, где теряется управляемость (сингулярность)

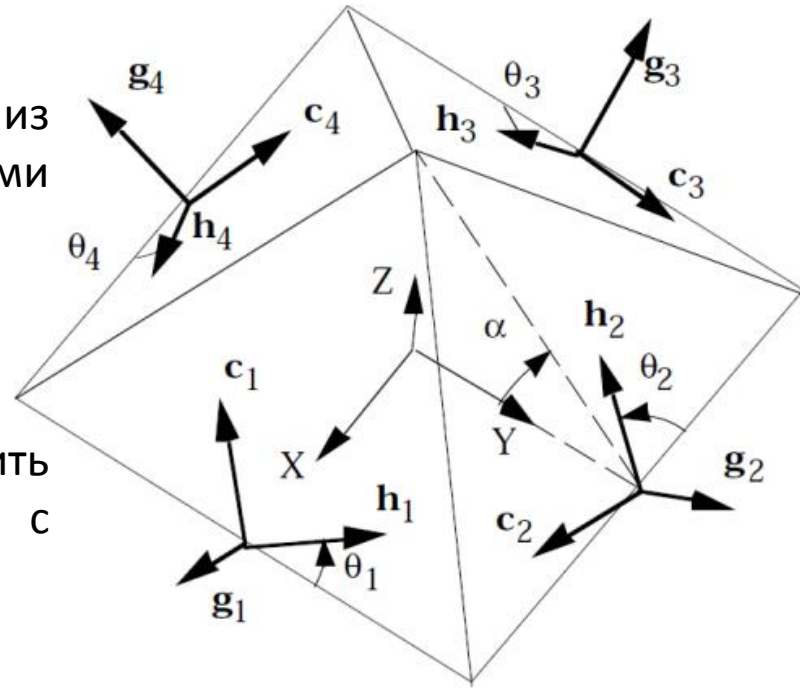


Постановка задачи

Конфигурация: 4-угольная пирамида из одинаковых гироидов со сферическими тензорами инерции

На систему действует внешний момент

Задача: парировать момент и обеспечить прохождение сингулярностей с наибольшей точностью



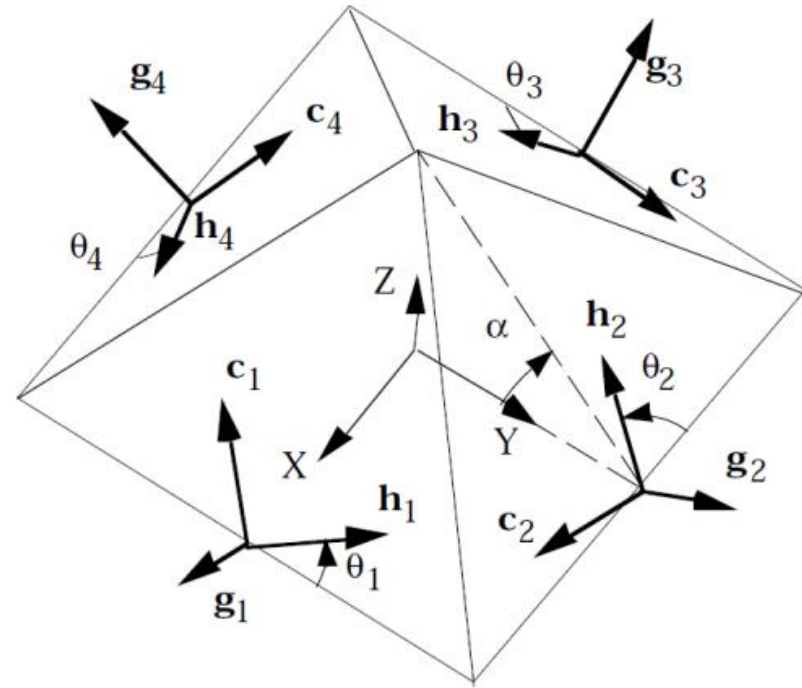
Формирование управляющего воздействия

\mathbf{h}_i — нормированный вектор
кинетического момента i -го
гиродина.

\mathbf{g}_i — направление оси i -го
гиродина.

\mathbf{c}_i — производная кинетического
момента i -го гиродина, причем
 $\mathbf{c}_i = \partial \mathbf{h}_i / \partial \theta_i = \mathbf{g}_i \times \mathbf{h}_i$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \sin(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$



Формирование управляющего воздействия

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) \\ \sin(\alpha) \sin(\theta_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_2) \\ -\cos(\alpha) \sin(\theta_2) \\ \sin(\alpha) \sin(\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \sin(\theta_3) \\ -\cos(\theta_3) \\ \sin(\alpha) \sin(\theta_3) \end{bmatrix}$$

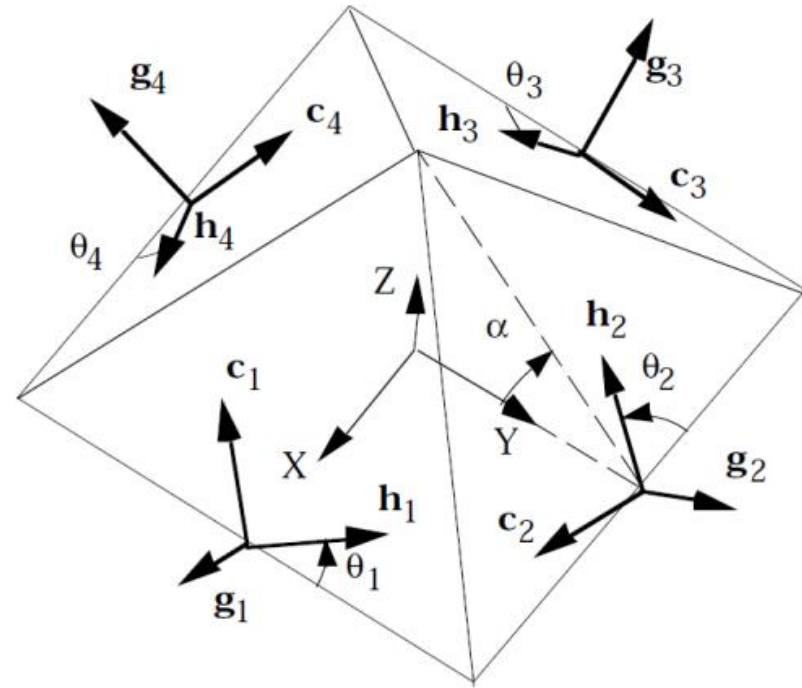
$$\mathbf{h}_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) \\ \cos(\alpha) \sin(\theta_4) \\ \sin(\alpha) \sin(\theta_4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \cos(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) \\ \sin(\alpha) \cos(\theta_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_2) \\ -\cos(\alpha) \cos(\theta_2) \\ \sin(\alpha) \cos(\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) \\ \sin(\alpha) \cos(\theta_3) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_4) \\ \cos(\alpha) \cos(\theta_4) \\ \sin(\alpha) \cos(\theta_4) \end{bmatrix}$$



Как видно \mathbf{h}_i и \mathbf{c}_i – это функции от θ_i

Формирование управляющего воздействия

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{T}_{ext},$$

$$\dot{\mathbf{q}} = 0.5 \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathbf{q},$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} + \mathbf{T}_{ext},$$

$$\mathbf{U} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{H}} = -\mathbf{U} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H},$$

Полный кинетический момент:

$$\mathbf{H}h = \sum \mathbf{h}_i(\boldsymbol{\theta})h, \text{ где } \boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4)^T$$

h - модуль кинетического момента одного гироспина

$$\mathbf{H} = f(\boldsymbol{\theta}).$$

Итоговый нормированный вектор управляющего момента получается при помощи дифференцирования по времени кинетического момента.

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{H}} = \sum \partial \mathbf{h}_i / \partial \theta_i \cdot d\theta_i / dt = \sum \mathbf{c}_i \dot{\theta}_i = \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}},$$

где $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_3 \ \mathbf{c}_4)$, $\dot{\theta}_i = d\theta_i/dt$, и $\dot{\boldsymbol{\theta}} = (\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4)^T$ — вектор угловых скоростей.

Метод Мура-Пенроуза

Если матрица \mathbf{C} имеет ранг равный трем, то она имеет три линейно-независимых строки.

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{particular} = \sum \alpha_i \mathbf{R}_i = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\alpha}, \text{ где } \mathbf{R}_i - i\text{-ая строка матрицы } \mathbf{C}$$

Включив в это уравнение ограничение $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{T}$, получим

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}$$

Отсюда находим $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \left[\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \right]^{-1} \mathbf{T}$$

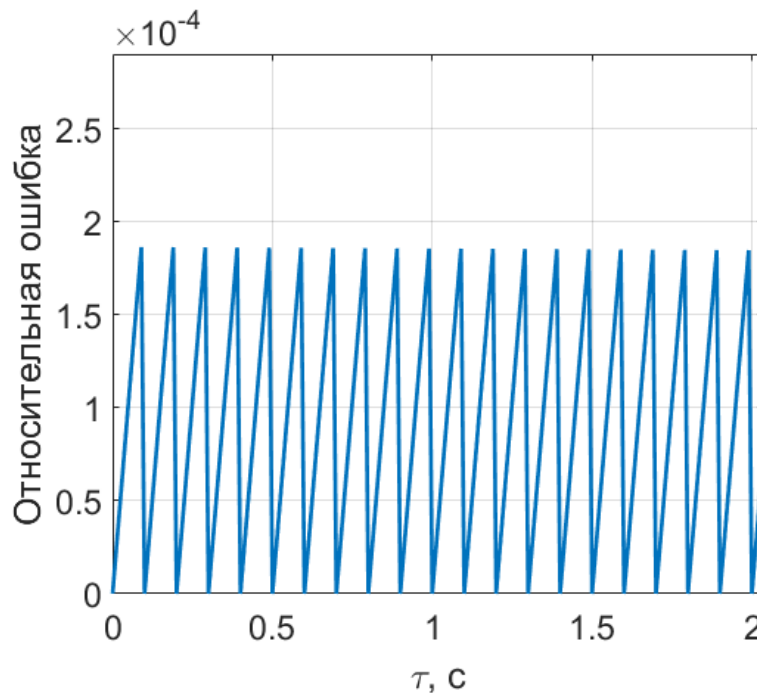
$$\text{Следовательно: } \dot{\boldsymbol{\theta}}_{particular} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_{MP} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \left[\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \right]^{-1} \mathbf{T}$$

По сути данный метод эквивалентен решению следующей задачи минимизации:

$$\min_{\dot{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}}, \text{ с ограничением } \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{T}, \text{ где } \mathbf{A} = \mathbf{E}_4$$

Метод Мура-Пенроуза

Наличие дискретности управления и угловой скорости вращения оси кардана приводит к тому, что во время между шагами подсчета управления даже при регулярном случае накапливается ошибка.



В окрестности сингулярности, т.е. когда ранг \mathbf{C} меньше 3 ситуация еще хуже

если $\det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) \rightarrow 0 \Rightarrow |\boldsymbol{\omega}| \rightarrow \infty \Rightarrow \boldsymbol{\theta}$ быстро изменяется \Rightarrow растет ошибка

Построение сингулярной поверхности

Пусть ранг \mathbf{C} меньше 3, тогда

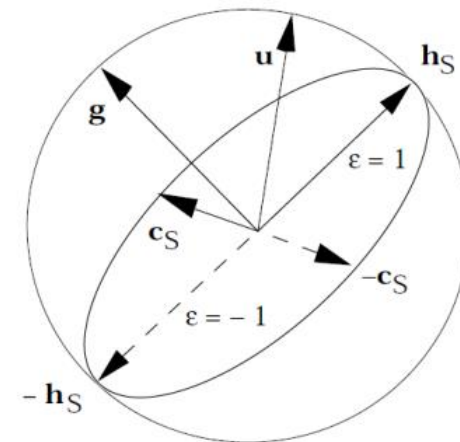
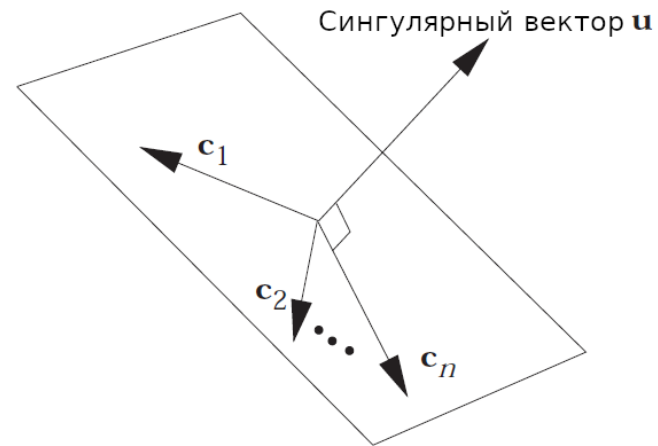
$$\det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) = 0$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{C} = \mathbf{u}^T (-\mathbf{C}) = \mathbf{0}$$

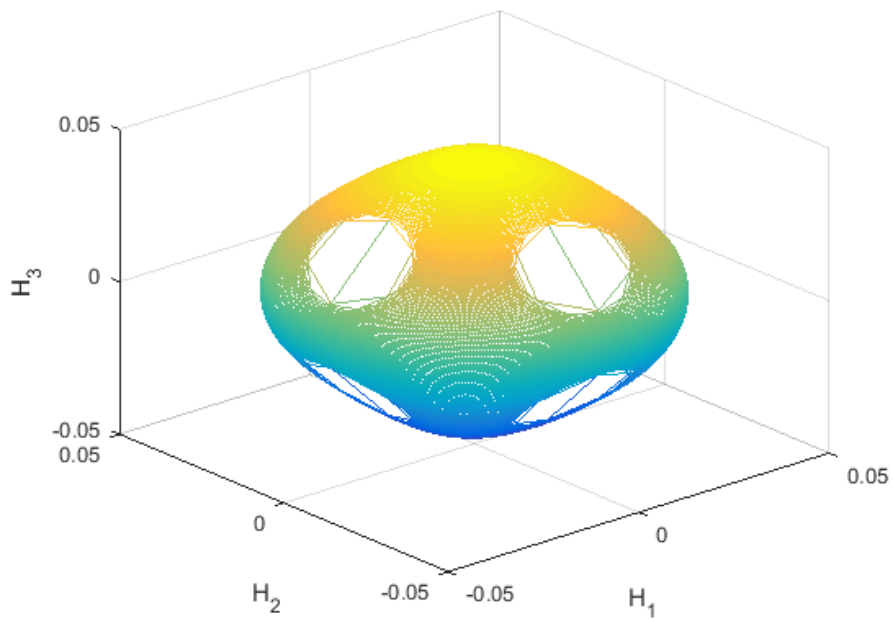
$$\varepsilon_i = \text{sign}(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{h}_i)$$

$$\mathbf{c}_{Si} = \varepsilon_i \mathbf{g}_i \times \mathbf{u} / |\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|.$$

$$\mathbf{H}_S = \sum \varepsilon_i (\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}) \times \mathbf{g}_i / |\mathbf{g}_i \times \mathbf{u}|.$$

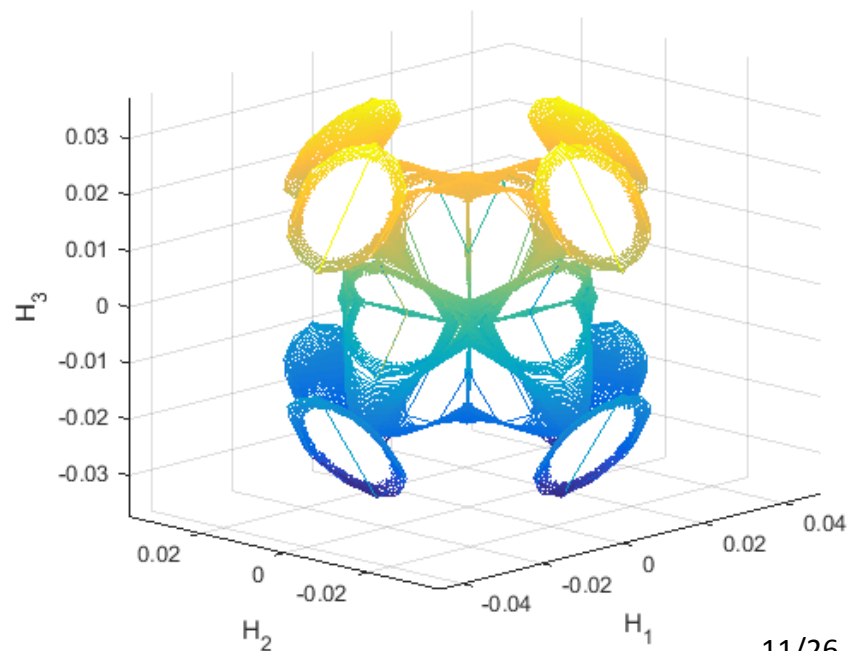


Построение сингулярной поверхности



Внешняя сингулярная поверхность

Внутренняя сингулярная поверхность



Нуль-движение

$$\mathbf{T}_{\text{zero}} = \mathbf{Cn} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{n} = [\mathbf{D}_1; \mathbf{D}_2; \mathbf{D}_3; \mathbf{D}_4]$ - вектор нуль движения:

$$\mathbf{Cn} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{D}_i = (-1)^{i+1} \mathbf{M}_i$$

$$\mathbf{M}_i = \det(\mathbf{C}_i)$$

$\mathbf{C}_i = \mathbf{C}$ без i -го столбца

С учетом этого общее решение будет представимо в виде

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{particular}} + \alpha \mathbf{n}$$

Singular Robust Inverse

$$\min_{\dot{\theta}} \frac{1}{2} \left\{ \dot{\theta}^T \mathbf{A} \dot{\theta} + \mathbf{T}_{err}^T \mathbf{B} \mathbf{T}_{err} \right\},$$

$$\mathbf{T}_{err} = \mathbf{C}(\theta) \dot{\theta} - \mathbf{T}$$

$$L_{\dot{\theta}} = \mathbf{C}(\theta)^T \mathbf{A} (\mathbf{C}(\theta) \dot{\theta} - \mathbf{T}) + \mathbf{B} \dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow (\mathbf{C}(\theta)^T \mathbf{A} \mathbf{C}(\theta) + \mathbf{B}) \dot{\theta} = \mathbf{C}(\theta)^T \mathbf{B} \mathbf{T}$$

$$\dot{\theta} = \mathbf{C}_{SR} \mathbf{T} = \left[\mathbf{C}(\theta)^T \mathbf{A} \mathbf{C}(\theta) + \mathbf{B} \right]^{-1} \mathbf{C}(\theta) \mathbf{A} \mathbf{T}$$

Если \mathbf{A} и \mathbf{B} – диагональные матрицы \mathbf{E}_3 и $\alpha \mathbf{E}_4$ соответственно, то получаем SR-обратную матрицу \mathbf{C} .

$$\mathbf{C}_{SR} = \mathbf{C}^T \left[\alpha \mathbf{E}_3 + \mathbf{C} \mathbf{C}^T \right]^{-1}$$

$$\dot{\theta}_{SR} = \mathbf{C}_{SR} \mathbf{T}, \text{ где } \alpha = \begin{cases} 0 & , \text{ при } m \geq m_{cr} \\ \alpha_0 (1 - m / m_{cr})^2 & , \text{ при } m < m_{cr} \end{cases}, \text{ } m - \text{ мера сингулярности}$$

в большинстве случаев $m = \det(\mathbf{C}^T \mathbf{C})$

Generalized Singular Robust

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GSR}} = \mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{C}^T + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{T},$$

λ обычно задают как $\alpha \cdot \exp(-kt)$, $k, \alpha > 0$

где $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 1 \end{pmatrix} > 0$ и ε_i - модуляционные функции,

$\varepsilon_i = 0.01 \sin(0.5\pi t + \varphi_i)$, где φ_i равен 0, $\pi/2$ и π соответственно

SVD-разложение

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$$

Здесь \mathbf{U} и \mathbf{V} – ортогональные матрицы

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ суть сводится в добавлении ошибки по третьей компоненте, которая стремится к нулю. Тогда:}$$

$$\mathbf{S}_{err} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3 + \alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{SVD}} = \mathbf{V}\mathbf{S}_{err}\mathbf{U}^T\mathbf{T}$$

Ошибку α чаще всего задают как $\alpha_0 \exp(-m^2)$, где m – мера сингулярности. В рамках данного метода за m было выбрано σ_3

Моделирование

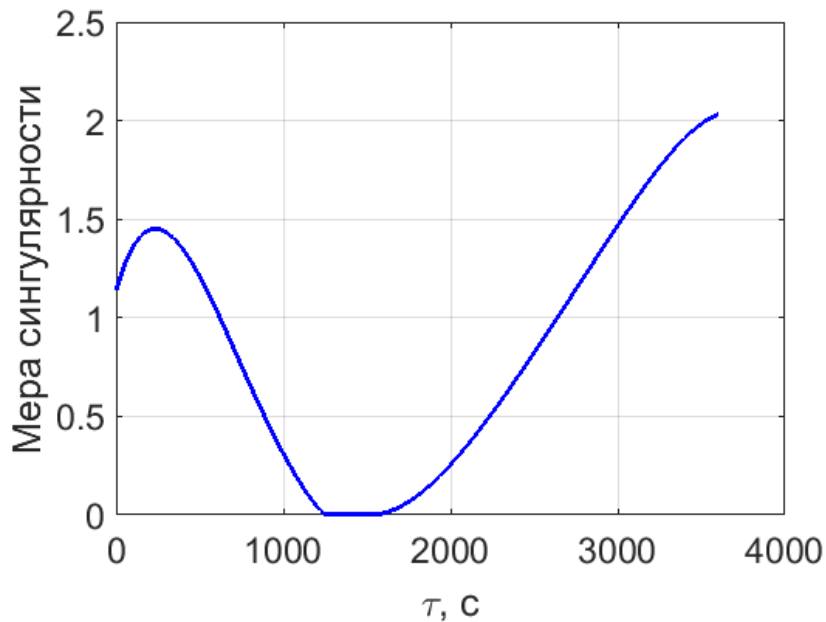
Моделирование происходило в программе Matlab R2016b. Для приближения задачи к реальным параметрам на гиродины были наложены следующие ограничения:

- $h = 0.013 \text{ Н} \cdot \text{м/сек}$
- $\dot{\theta}_{\max} = 0.1 \text{ рад/сек}$
- $m_{cr} = 0.05$
- Шаг интегрирования был выбран за 0.01 сек, а шаг управления - за 0.1 сек.
- Возмущение: $\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\sigma_{new i}^2} - \frac{1}{\sigma_i^2} \right)$, где σ_i i -ое сингулярное число
- Если $|\dot{\theta}_i| > \dot{\theta}_{\max}$, то $\dot{\theta} = \dot{\theta} \cdot \dot{\theta}_{\max} / \text{norm}(\dot{\theta})$

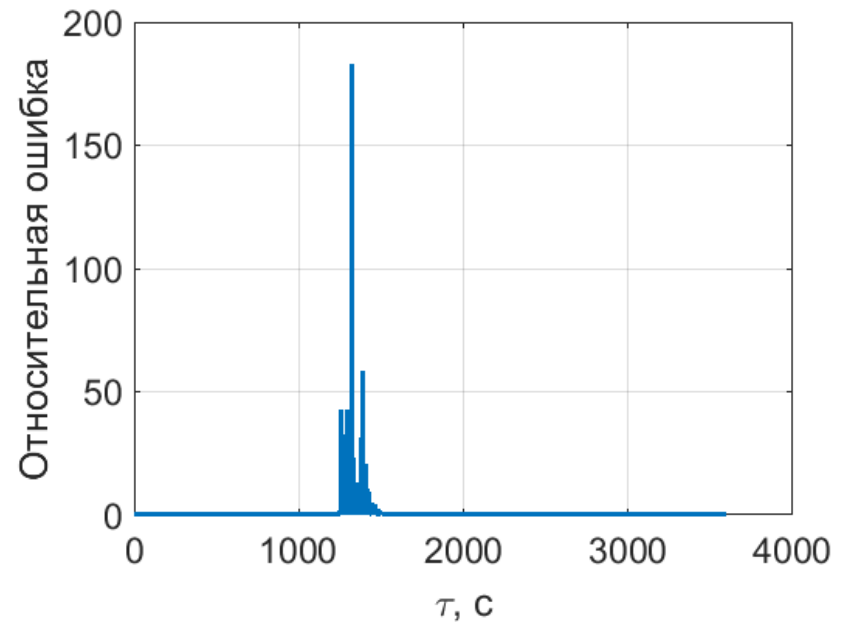
Поведение метода Мура-Пенроуза

$\theta = (\pi/2 \quad \pi/8 \quad \pi/2 \quad \pi/2)^T$ - начальное положение осей корданов гироидинов

$\mathbf{T} = (-10 \quad 4 \quad 12)^T \cdot 10^{-6}$ - внешний момент силы



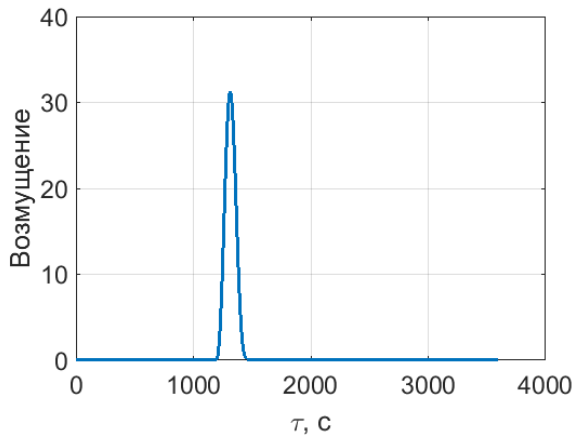
Мера сингулярности



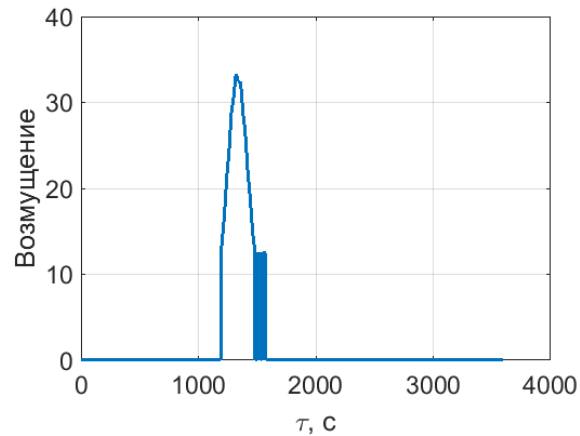
Относительная ошибка управления

Возмущения матриц системы

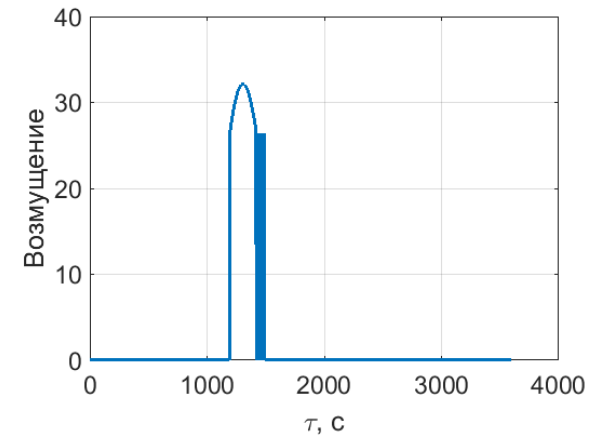
Ниже представлены возмущения матриц системы



Singular Robust

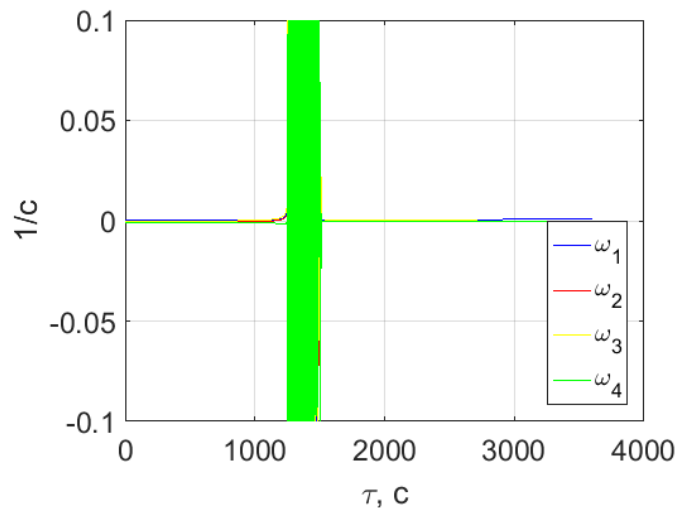


Generalized Singular Robust

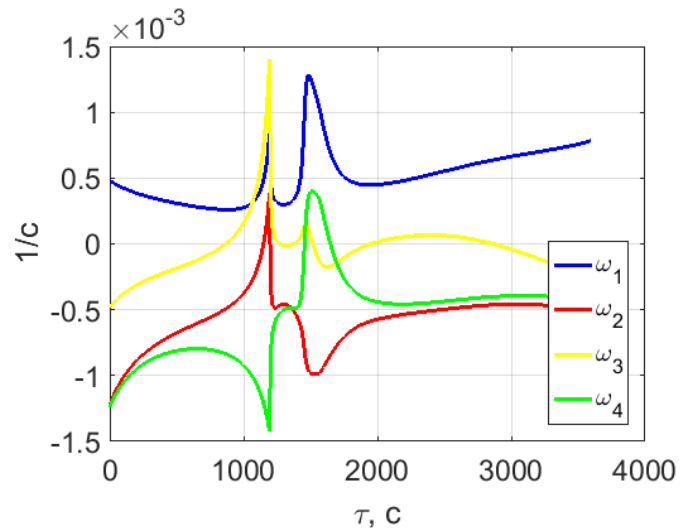


SVD-разложение

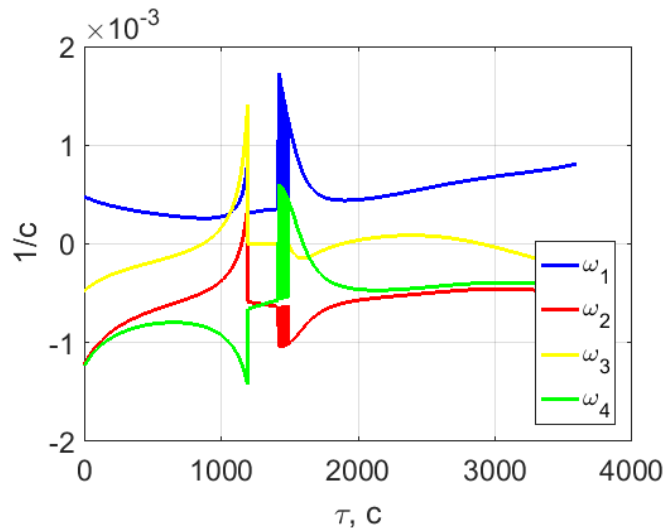
Угловые скорости осей гиродинов



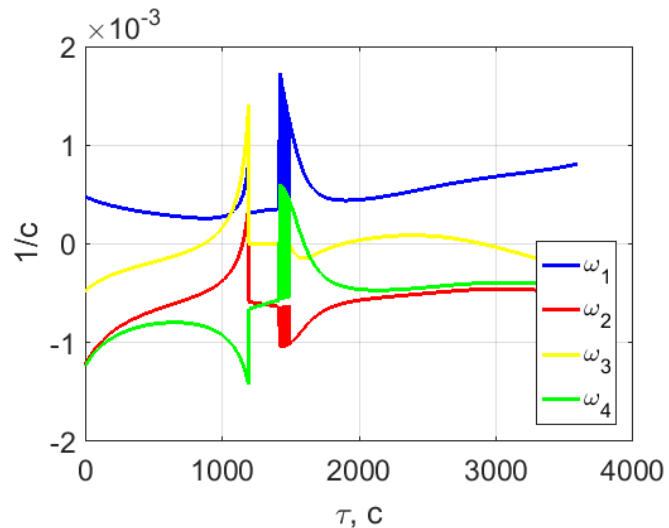
Мур-Пенроуз



Singular Robust



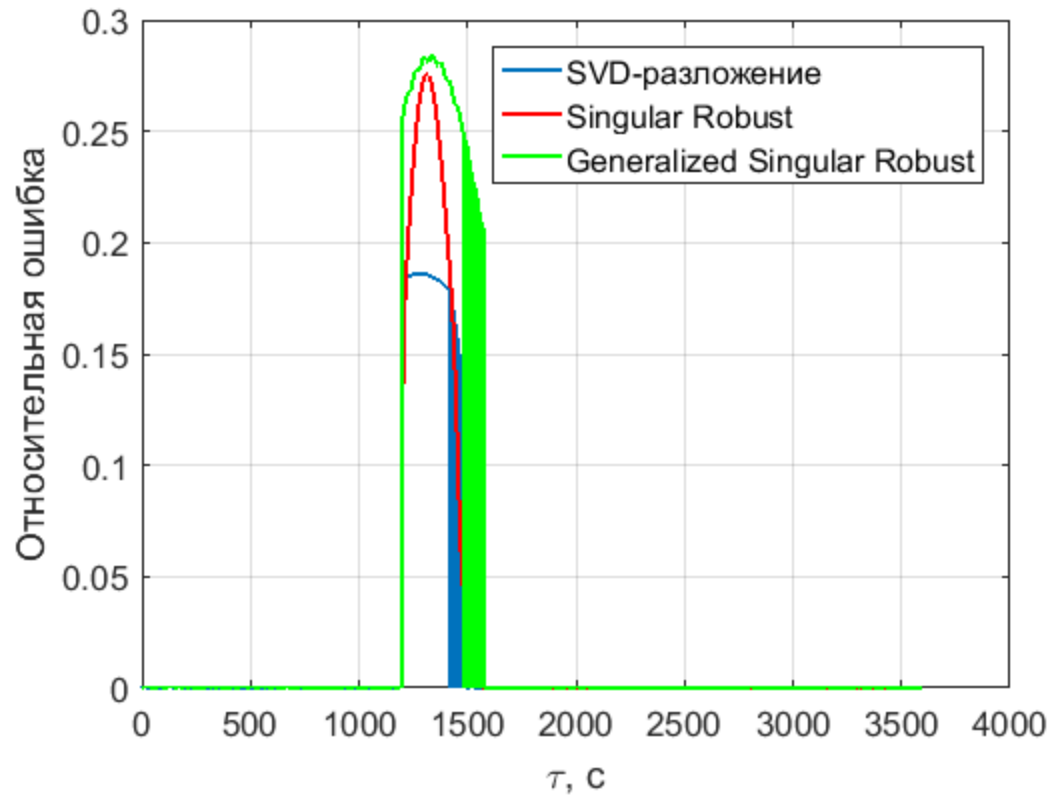
SVD-разложение



Generalized Singular Robust

Относительная ошибка

Ниже представлена относительная ошибка в реализации момента управления.

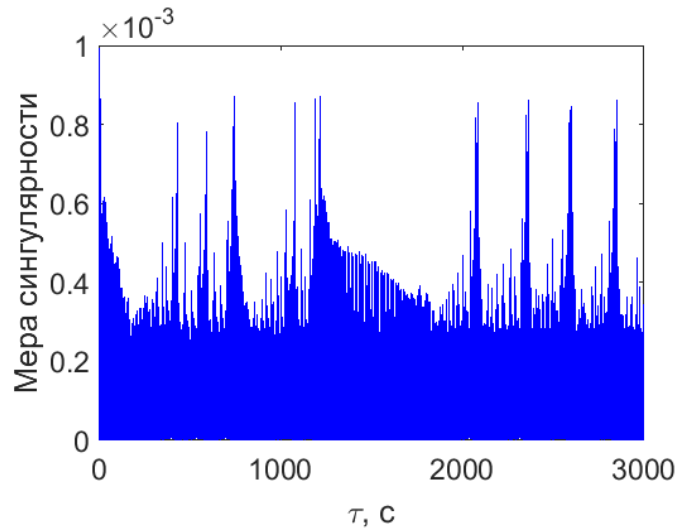


Стабилизация в орбитальных осях

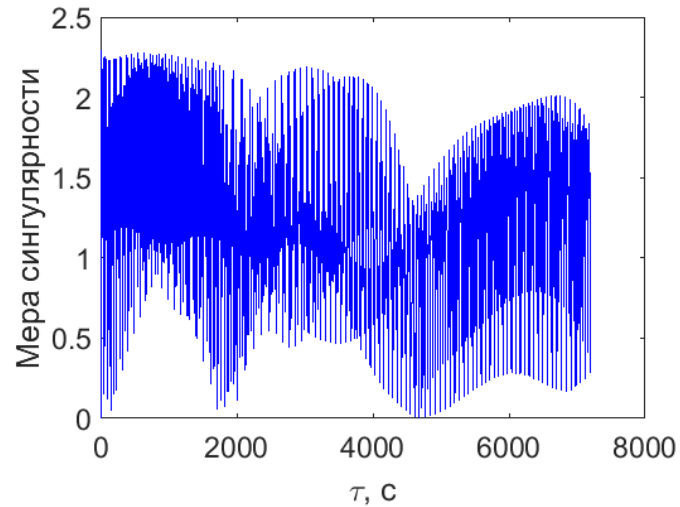
Параметры моделирования:

- Большая полуось орбиты спутника - $6.673 \cdot 10^6$ м;
- Эксцентриситет орбиты спутника - 0.008;
- Долгота восходящего узла орбиты спутника - 1 рад;
- Наклонение орбиты спутника - 0.5 рад;
- Аргумент перицентра орбиты спутника - π рад;
- Тензор инерции спутника в ССК – $J = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$;
- Кватернион начальной ориентации ССК отн. ИСК $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- Начальная абсолютная угловая скорость - $\boldsymbol{\omega} = (1 \ 2 \ 3) \cdot 10^{-4}$ рад/с;
- Начальное положение гироскопов $\boldsymbol{\theta}_0 = [\pi/2 + 10^{-5} \ \pi/2 \ \pi/2 \ \pi/2]$.
- Кватернион конечной ориентации ОСК отн. ССК $\mathbf{q}_0 = (0.9603 \ 0.2016 \ 0.1624 \ 0.1034)$

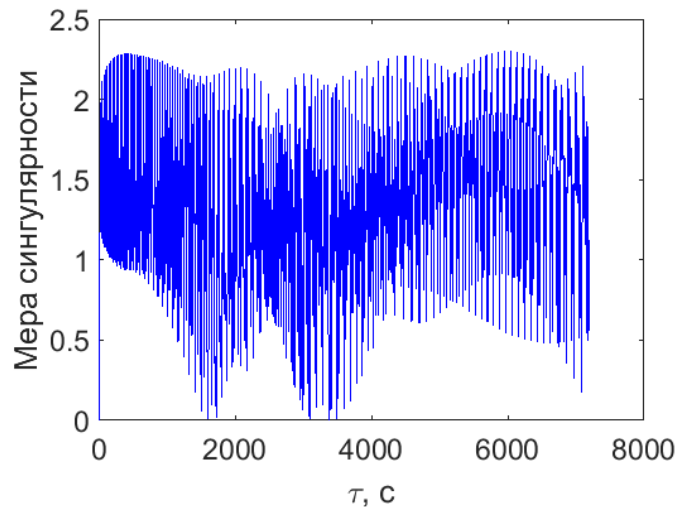
Эволюция мер сингулярности



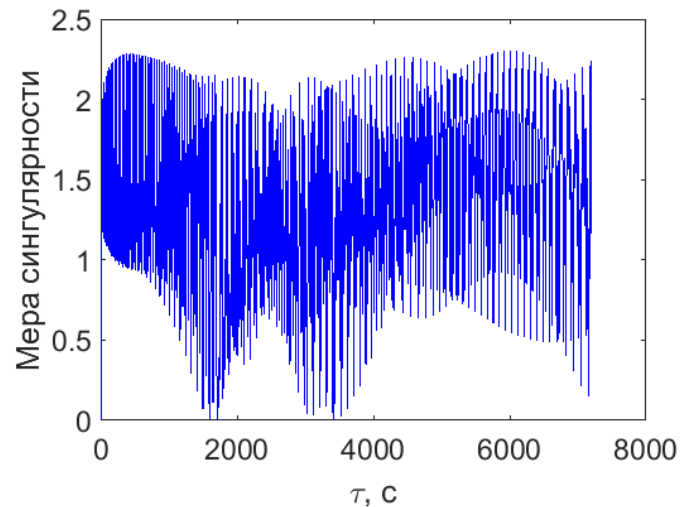
Мур-Пенроуз



Singular Robust

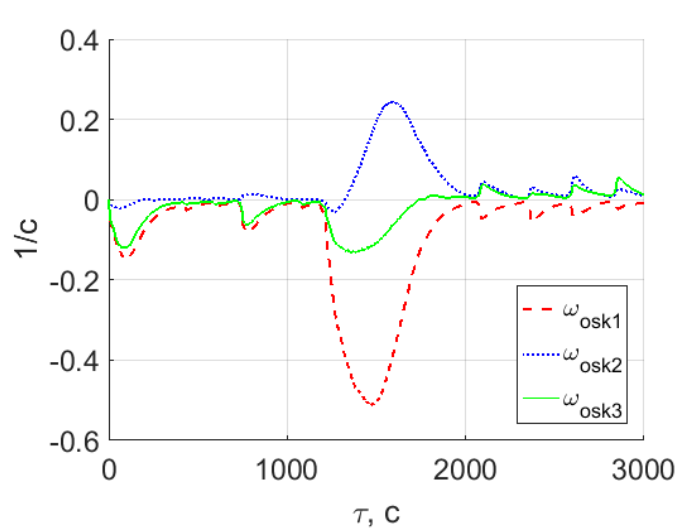


SVD-разложение

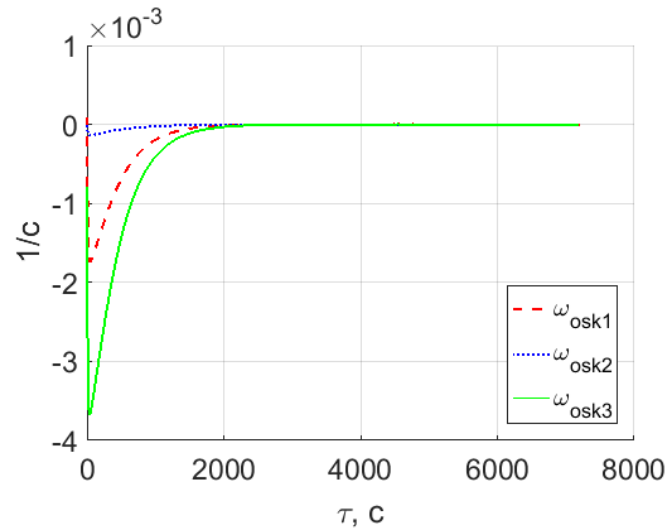


Generalized Singular Robust

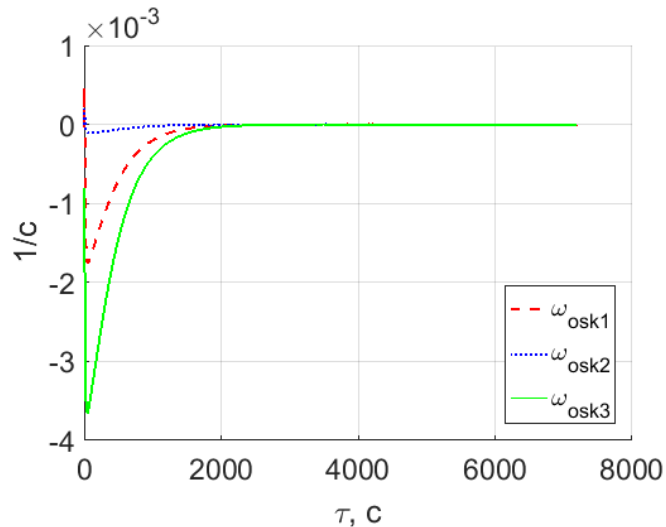
Компоненты угловых скоростей спутника в ОСК



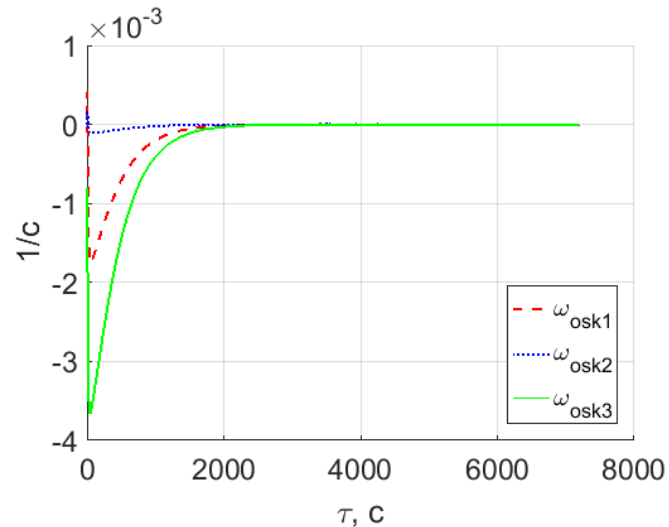
Мур-Пенроуз



Singular Robust



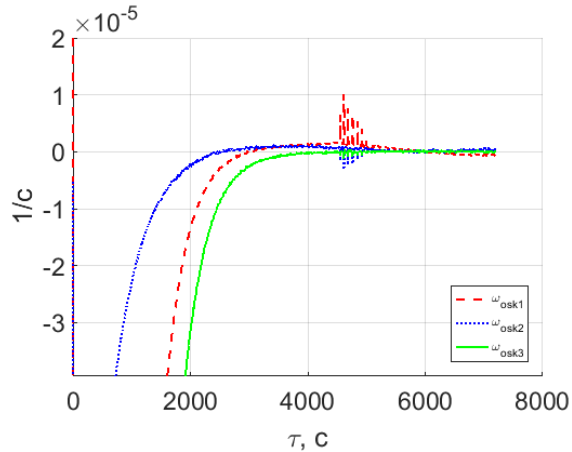
SVD-разложение



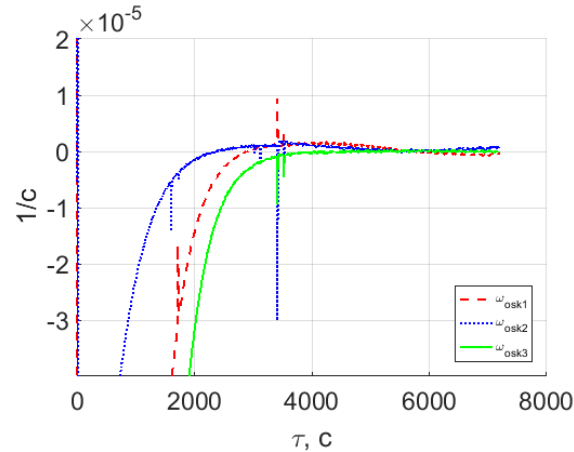
Generalized Singular Robust

Скачки угловых скоростей спутника в ОСК

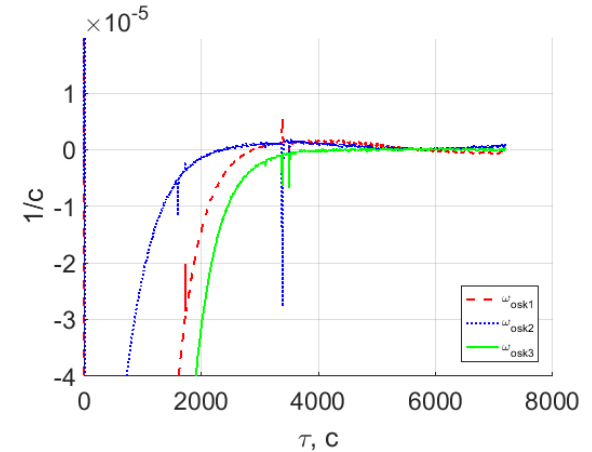
Ниже представлены компоненты угловых скоростей в увеличенном масштабе



Singular Robust



Generalized Singular Robust



SVD-разложение

Выводы

В работе представлено сравнение 4-ех методов управления для 4-угольной пирамидальной конфигурации гиродинов.

Показано, что наиболее предпочтительным, с точки зрения выдачи управляющего момента, является метод SVD-разложения.

С точки зрения вычислительной сложности наиболее предпочтительным является метод SR

Планы на магистратуру

Проанализировать возможность создания метода, который на подготовительном этапе создаст такой алгоритм поворотов осей карданов гиродинов, что гиродины в принципе не будут попадать во внутренние сингулярности в ходе работы.