



XLVI Академические чтения по космонавтике
Москва, 27 января, МГТУ им. Н. Э. Баумана



Переход к переменным Кустаанхеймо – Штифеля как каноническое преобразование уравнений оптимального движения с малой тягой

Корнеев Кирилл Романович, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Трофимов Сергей Павлович, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда
(проект № 19-11-00256 «Динамика и навигация космических аппаратов в сложных гравитационных полях»)



Двигатели малой тяги



Использование двигателей малой тяги позволяет уменьшить расход топлива.

Уменьшение расхода топлива актуально при возрастающем интересе к межпланетным перелётам

Основные особенности:

- малое реактивное ускорение
- высокий удельный импульс
- длительное время работы двигателя



Электроракетный двигатель СПД-100В (ОКБ «Факел»)



Краевые задачи принципа максимума



При оптимизации траекторий с малой тягой часто используют принцип максимума Понтрягина

Краевые задачи принципа максимума обладают высокой чувствительностью

Есть два пути к построению регулярных процедур решения таких задач:

- Выбор переменных, в которых уравнения движения обладают хорошими численными свойствами
- Использование эффективных вычислительных методов решения краевых задач



Проблема выбора переменных



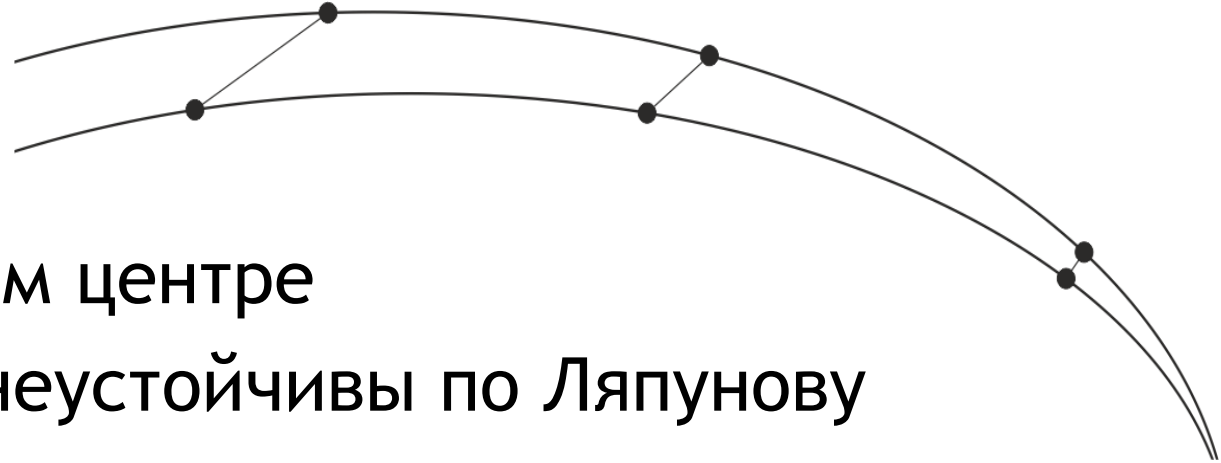
$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

- Сингулярность в притягивающем центре
- Траектории в задаче двух тел неустойчивы по Ляпунову

$$\mathbf{x} = (\Delta \mathbf{r}, \Delta \mathbf{v})^T \quad |\mathbf{x}(t)| \sim t^2 |\mathbf{x}_0|$$

Плохая обусловленность матрицы чувствительности краевой задачи принципа максимума связана с квадратичным разбеганием траекторий.

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{x}(t_f)}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{– матрица чувствительности по вектору параметров } \mathbf{p}$$





Существующие подходы к выбору переменных



Наборы переменных состояния:

- Декартовы координаты (D.J. Jezewski, S. Geffroy, R. Epenoy)
- Орбитальные элементы (В.Г. Петухов, E. Taheri, J. Junkins)
- Гибридные параметры (E. Taheri, J. Junkins)
- Переменные Кустаанхеймо-Штифеля (А.В. Иванюхин, Я.Г. Сапунков, J. Roa)
- Использование формализма канонических преобразований (Powers W.F., Tapley B.D.)

Выбор независимой переменной:

- Физическое время (C. Zhang, F. Topputo, H.J. Oberle)
- Фиктивное время (E. Taheri, Roa, J.)
- Различные виды аномалий (В.Г. Петухов, J. Gergaud, T. Haberkorn)



Цели и содержание работы



- Исследовать численные свойства краевых задач принципа максимума в переменных Кустаанхеймо-Штифеля (KS)
- Показать возможность использования стандартных методов оптимизации для решения таких краевых задач

Схема исследования:

- Записать формализм принципа максимума в KS-переменных
- Решить краевую задачу стандартным методом оптимизации
- Сравнить результаты с методом продолжения по параметру



Постановка задачи оптимального управления



КА движется в рамках задачи двух тел

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a} \end{cases}$$

Используем модель идеально регулируемого двигателя
постоянной мощности

$$\min \Delta m(t_f) \Leftrightarrow \min J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{a}^2 dt$$

Ставим задачу сопровождения

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0,$$

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f$$



Принцип Гамильтона-Понтрягина



Записываем уравнения движения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{a} \in U \subset \mathbb{R}^l.$$

Вводим функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) dt \rightarrow \min, \quad f_0 = \frac{\mathbf{a}^2}{2}$$

Строим функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H = \lambda_0 f_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, \quad \min J \Rightarrow \max_{\mathbf{a}} H(\mathbf{a})$$

Получаем уравнения расширенной динамической системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}},$$



KS-переменные



Используем переменные Кустаанхеймо-Штифеля,
т.н. KS-переменные

$$\mathbf{r} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}, \quad \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{u}}{ds}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$$

$$h = -\mu / (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 4\mathbf{w} \cdot \mathbf{w})$$

$$\mathbf{v} = \frac{2\sqrt{-2h}\mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{w}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}$$

Применяем преобразование времени Сундмана

$$\chi = \frac{dt}{ds} = \frac{r}{\sqrt{-2h}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{-2h}}$$

$$\frac{d\mathbf{X}}{ds} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{a}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I}/4 & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ -(\mathbf{I}(\mathbf{u}^T \mathbf{u})/4 + \mathbf{w}\mathbf{w}^T)\mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$



Точечные преобразования с заменой независимой переменной



Применяем точечное преобразование и переходим к фиктивному времени.
Такое преобразование является каноническим.

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^m, \quad dt = \chi(\mathbf{X}) ds.$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \quad \xrightarrow[\substack{\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \\ dt = \chi(\mathbf{X}) ds}]{\hspace{1cm}} \quad \frac{d\mathbf{X}}{ds} = \mathbf{F}_s = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{a},$$

Система в старых переменных

Система в новых переменных

Находим связь между старыми и новыми сопряжёнными переменными,
а также связь между правыми частями

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{F} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \frac{\mathbf{F}_s}{\chi}, \quad \mathbf{\Lambda} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}.$$



Переход к KS-переменным



В KS-переменных имеем линейный вид уравнений движения

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{a},$$

Знаем замену сопряжённых переменных при замене фазовых

$$\mathbf{\Lambda} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \Phi = \left(\mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}, \frac{2\sqrt{-2h}\mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{w}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right)^T$$

Записываем вид функционала в фиктивном времени

$$J = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_f} \mathbf{a}^2 \frac{\mathbf{u}^2}{\sqrt{-2h}} ds$$

Добавляем требование «физичности» траектории

$$a_4 \equiv 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{u}_b = (u_4, -u_3, u_2, -u_1)^T$$



Оптимальное управление в KS-переменных



Записываем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H = -\frac{\mathbf{a}^2}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{\sqrt{-2h}} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} + \Lambda_u \cdot \mathbf{w} - \frac{1}{4} \Lambda_w \cdot \mathbf{u} - m \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{a}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{L} \left(-\frac{\mathbf{u}^2}{4h} \Lambda_w - \frac{\Lambda_w \cdot \mathbf{w}}{h} \mathbf{w} \right)$$

Получаем оптимальное управление в KS-переменных

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{-2h}}{\mathbf{u}^2} (\mathbf{Q} - m \mathbf{L} \mathbf{u}_b), \quad m = \frac{Q_4}{\mathbf{u}^2}$$

Условия трансверсальности

$$\mathbf{M}(s_0) \Lambda_{k,w}(s_0) = 0$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} k_{14} & -k_{13} & k_{12} & -k_2^2 & k_{14} - k_{41} & k_{31} - k_{13} & k_{12} - k_{21} & 0 \\ k_{24} & -k_{23} & k_1^2 & -k_{12} & k_{24} - k_{42} & k_{32} - k_{23} & 0 & k_{12} - k_{21} \end{pmatrix}$$



Сведение к задаче оптимизации



Сводим краевую задачу к оптимизационной

Функционал $J \equiv 1$

Ограничение типа равенства

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_f - \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}(s_f) \\ \mathbf{v}_f - \frac{2\sqrt{-2h}\mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{w}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}(s_f) \\ \mathbf{M}(s_0)\Lambda_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(s_0) \end{pmatrix} = 0$$

Подбираем вектор сопряжённых переменных в начальный момент фиктивного времени

$$\Lambda_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(s_0) = ?$$

Условия трансверсальности на правом конце выполняются автоматически

$$\mathbf{M}(s_f)\Lambda_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(s_f) = 0$$



Метод внутренней точки



Используем метод внутренней точки с параметрами:

- OptimalityTolerance 1e-10
- MaxFunctionEvaluations 1e+10
- StepTolerance 1e-10
- ConstraintTolerance 1e-10
- MaxIterations 250

Матрица чувствительности

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{X}(s_f)}{\partial \Lambda(s_0)}$$

Число обусловленности матрицы чувствительности вычисляют как отношение максимального сингулярного числа к минимальному

$$c(\mathbf{S}) = \max \sigma_i(\mathbf{S}) / \min \sigma_i(\mathbf{S})$$

Ноутбук OMEN HP Laptop
15-dh0003ur

MATLAB

Распараллеливание

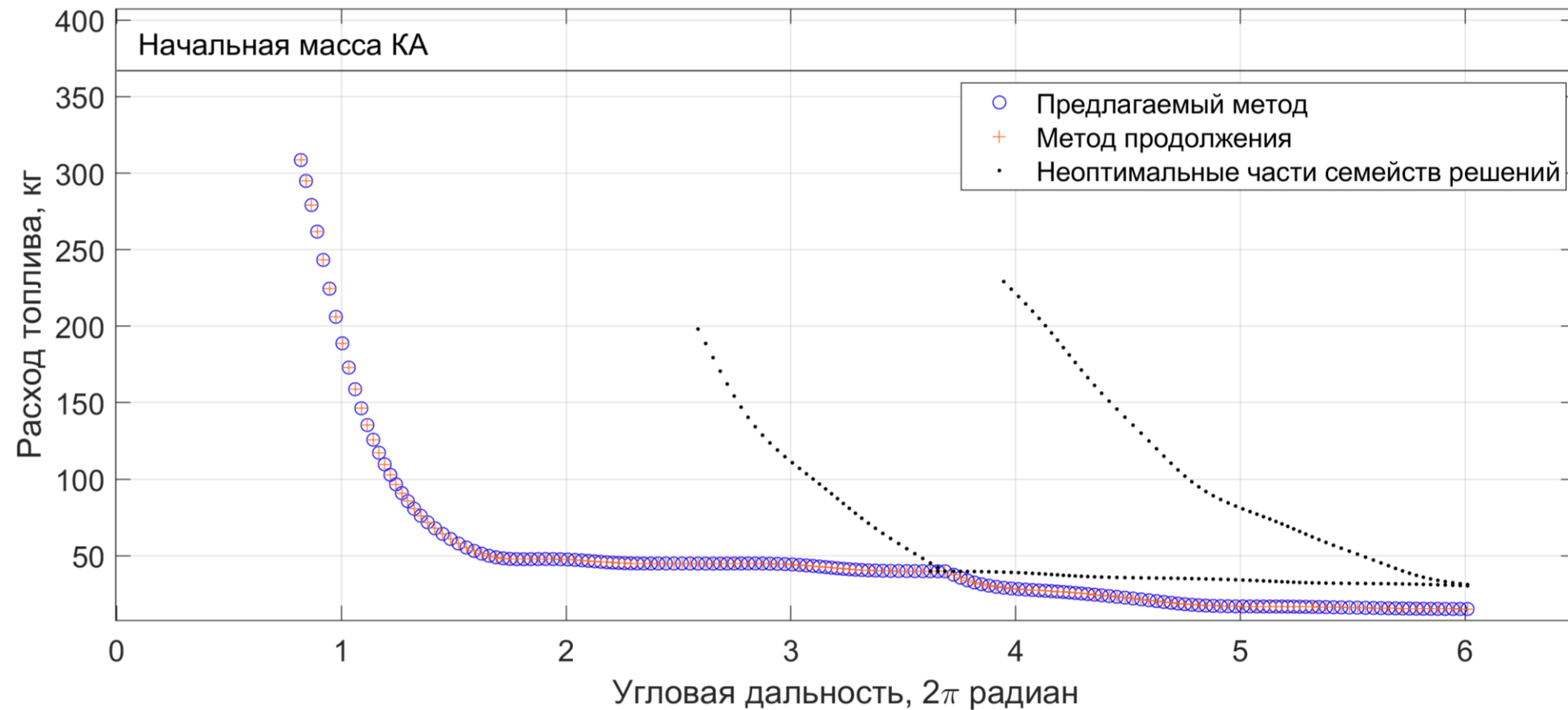
Символьные вычисления



Парето-фронт



Строим Парето-фронт с датой старта 01.01.2022

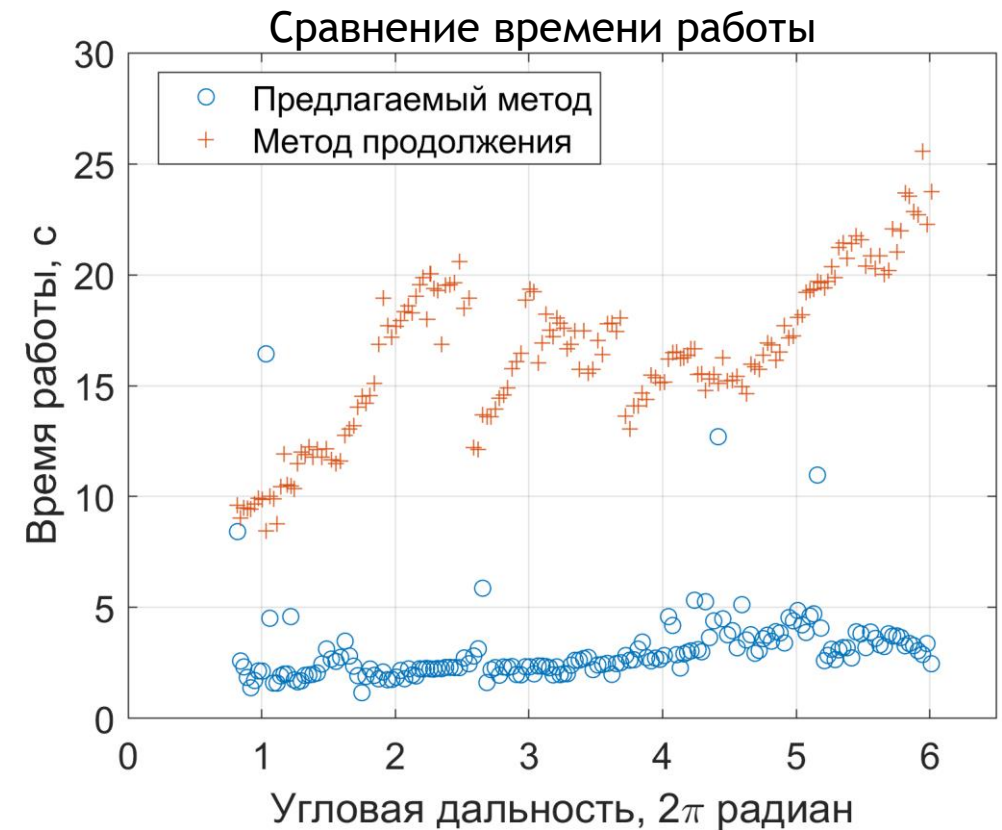
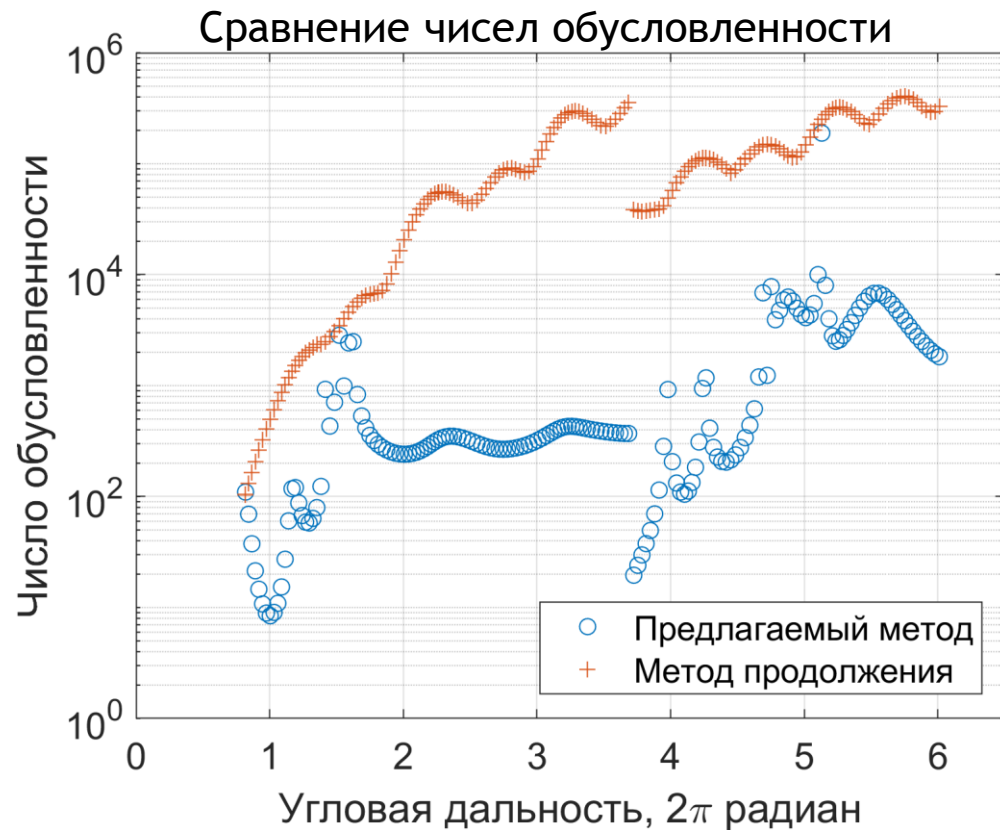




Численные характеристики



Сравним с работой метода продолжения по параметру



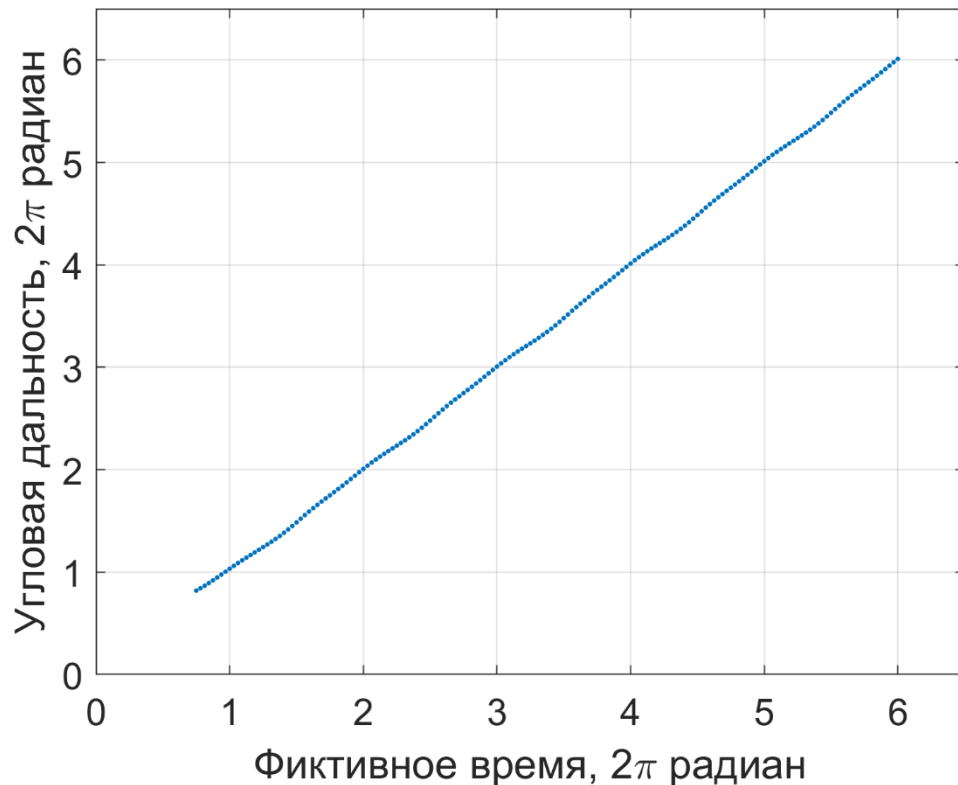


Связь фиктивного времени и угловой дальности

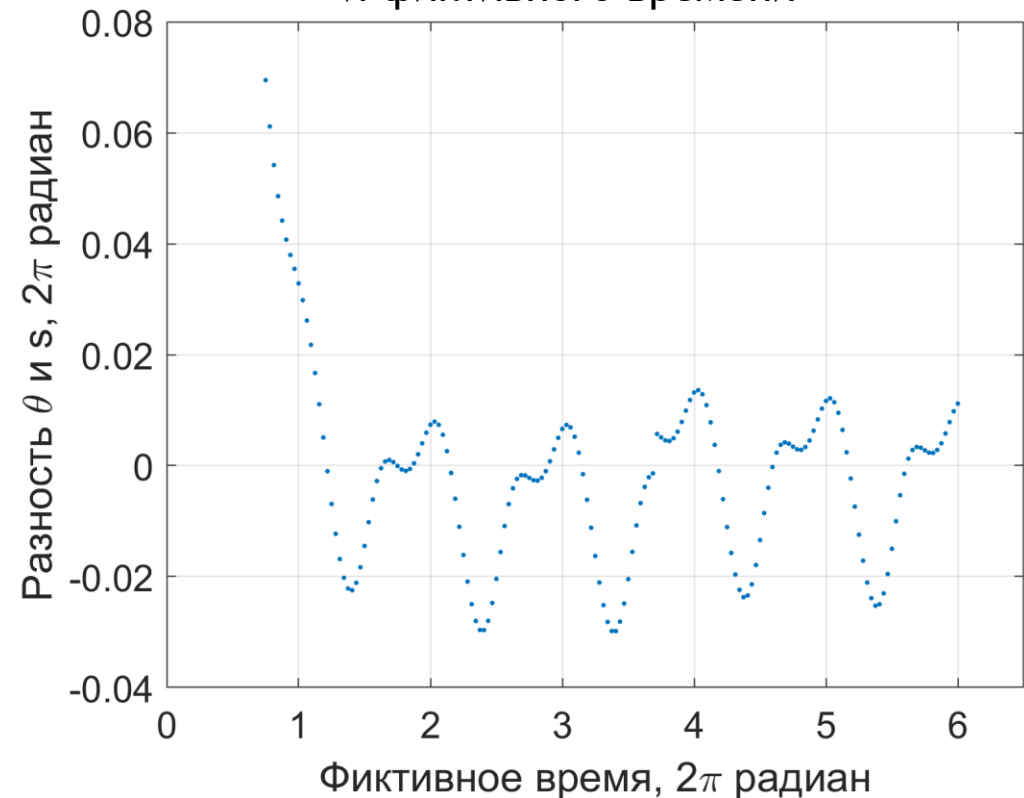


Угловая дальность близка по величине с выбранным фиктивным временем

Зависимость угловой дальности от фиктивного времени



Различие угловой дальности и фиктивного времени





Выводы



- Формализм принципа максимума применён к задаче оптимизации траекторий с малой тягой в KS-переменных
- Восстановленный Парето-фронт совпадает с фронтом, полученным методом продолжения в декартовых переменных
- При этом метод внутренней точки быстрее восстанавливает Парето-фронт, чем метод продолжения по параметру
- Числа обусловленности матрицы чувствительности задачи в KS-переменных оказываются меньше на 2-3 порядка
- Переход к фиктивному времени как независимой переменной позволяет напрямую выбирать угловую дальность перелёта

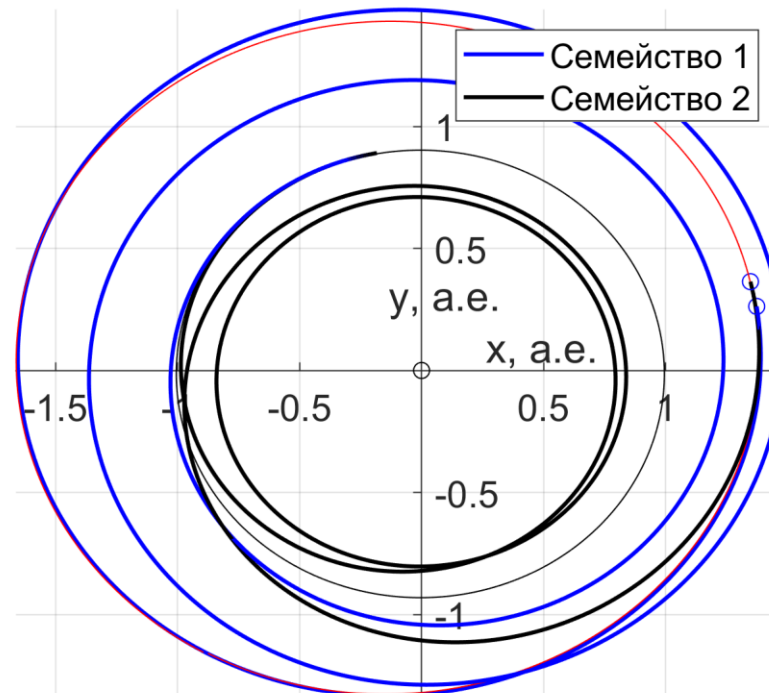


Бэкап



Семейства траекторий

Две возможных траектории для фиктивного времени 2.75

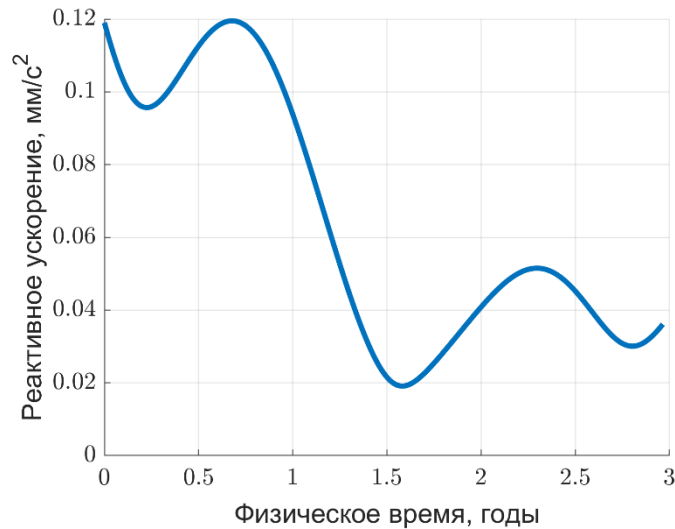




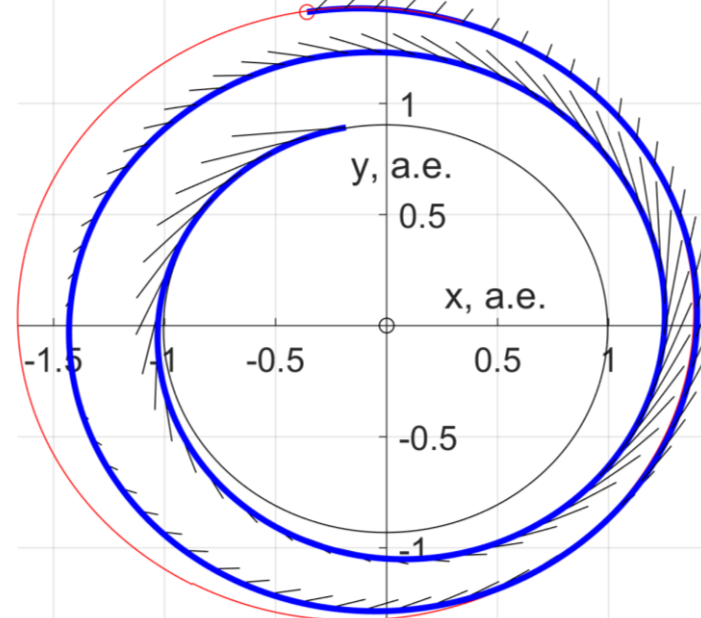
Пример работы метода



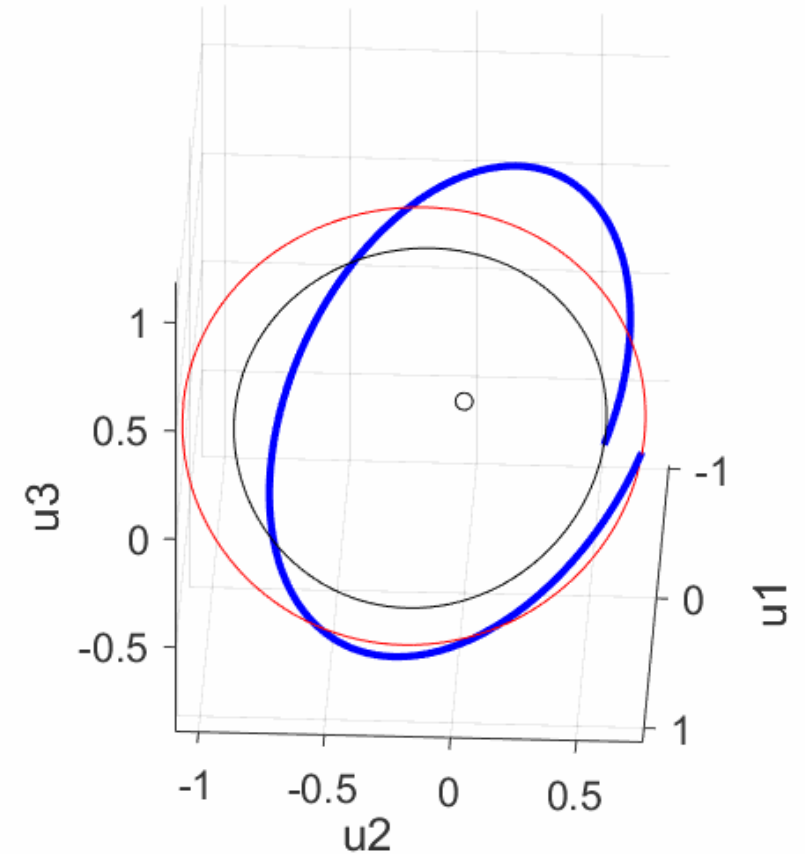
Реактивное ускорение



Траектория КА в декартовых координатах



Траектория КА в KS-координатах



Максимальная разница в координатах $2.15e-07$ а.е.

Расход массы в KS-координатах $4.74888e+01$ кг

Расход массы методом продолжения $4.748876e+01$ кг

Невязка координаты $2.00e-01$, м

Невязка скорости $1.78e-08$, м/с

Число обусловленности в KS-переменных $2.41e+02$

Число обусловленности в методе продолжения $2.06e+04$



Метод продолжения по параметру



$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad , \quad \text{где} \quad \mathbf{z} = \{\mathbf{p}_{r0}, \mathbf{p}_{v0}\}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}, \quad - \text{вектор невязок}$$

$$\mathbf{z}_0 \quad - \text{начальное приближение}$$

Погружаем краевую задачу в однопараметрическое семейство задач:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}(\tau)) = (1 - \tau)\mathbf{b}$$

Решение задачи при $\tau = 0$ – это $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$,
а решение при $\tau = 1$ – это искомое решение

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} &= - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{z}(0) &= \mathbf{z}_0 \end{aligned} \right\} \quad - \text{задача Коши метода продолжения}$$