62-я научная конференция МФТИ

Уточнение орбитальных параметров космического аппарата по результатам определения направления местной вертикали бортовыми средствами

Корнеев К.Р.

Содержание

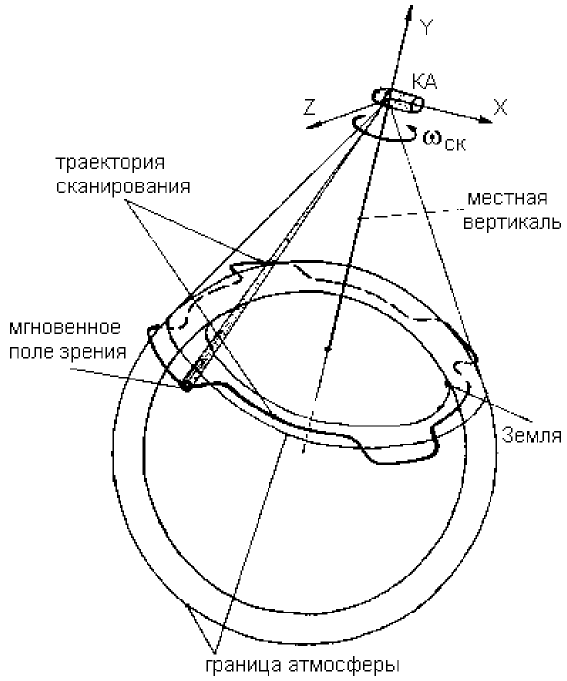
- Что такое местная вертикаль?
- Постановка задачи
- Используемые модели
- Формализация задачи
- Алгоритм уточнения положения КА
- Стандартные параметры модели движения КА
- Теоретическая оценка ошибки приближения
- Зависимость точности от количества измерений
- Влияние точности измерений в невозмущенной модели
- Влияние точности измерений в возмущенной модели EGM2008
- Результаты

Что такое местная вертикаль?

Местная вертикаль – вектор направления на Землю

Способы определения:

- По данным инфракрасного построителя местной вертикали
- По наблюдениям диска Земли (издалека)



Датчик местной вертикали

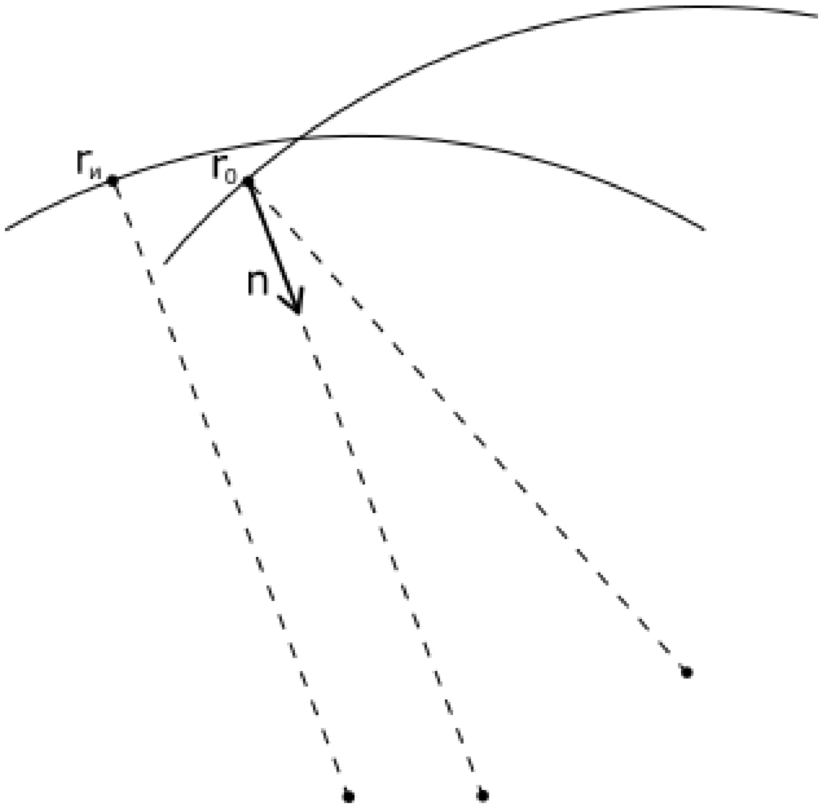
Постановка задачи

Рассматривается

- Околоземная орбита
- Известно некоторое приближение для текущего положения КА
- Имеются измерения датчика местной вертикали
- ССК не поворачивается в системе ИСК
- Ошибка измерения линейна относительно расстояния

Требуется

- Уменьшить ошибку определения фазовых координат КА



Ошибочное положение КА

Используемые модели

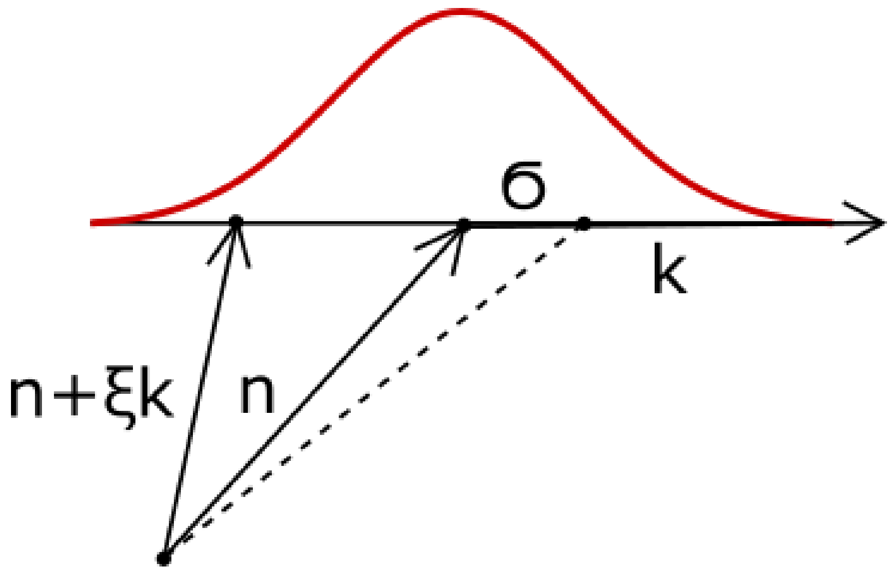
Модель движения КА использует метод Рунге-Кутта

Одиночное измерение – направление на местную вертикаль

Модель измерений добавляет к каждому одиночному измерению ошибку $\mathbf{k}\xi$ из нормального распределения(σ)

$$\boldsymbol{n} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r} + \xi\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{\xi} \in N(0, \boldsymbol{\sigma}), \qquad (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}) = 0$$

$$\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{\Lambda}\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}, \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ n\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{bmatrix}, \qquad \varphi \in U\left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$



Прибавка случайного вектора

Для возмущенной модели используется EGM2008 – модель гравитационного поля Земли в виде разложения по сферическим гармоникам (120)

Формализация задачи

Набор измерений местной вертикали

$$\boldsymbol{D}(\sigma) = \{\boldsymbol{n}_i'\}_0^{N-1} : \boldsymbol{n}_i' = g(\boldsymbol{r}_i, \sigma)$$

Математическая зависимость между однократным измерением и вектором состояния

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q})$$

Начальное приближение вектора состояния в фазовых координатах

$$\boldsymbol{q}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_0 \\ \boldsymbol{r}_0 \end{bmatrix}$$

Добавляется случайное отклонение, моделируя неточность начальной оценки

$$\hat{\boldsymbol{q}}_0 = \boldsymbol{q}_0 + \delta \boldsymbol{q}_0 \qquad \delta \boldsymbol{q}_0 = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{V}_0 \\ \delta \boldsymbol{r}_0 \end{bmatrix}$$

Определим **ошибку приближения** как

$$\delta_V = \|\boldsymbol{V}_\text{и} - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{d}}))\| \qquad \delta_r = \|\boldsymbol{r}_\text{и} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{d}}))\|$$

Алгоритм уточнения положения КА

Математическая модель

$$\boldsymbol{D} = \mathbb{F}(\boldsymbol{q}_0) \quad \mathbb{F} = \{\boldsymbol{F}_i\}_0^{N-1} : \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{q}_0))$$

Линеаризация

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}_i) \cong \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{q}_0) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_0 (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_0) \quad \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_0 = \left\{\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_0\right\}_0^{N-1} \quad \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_0^k = \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}^+(\Delta_i), t_k) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}^-(\Delta_i), t_k)}{2\Delta_i}$$

Перенос в новое начало координат

$$\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{\nu}_i \quad \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}(t_i, \boldsymbol{q}_0)) = \boldsymbol{\beta}_i \quad \boldsymbol{B} = \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_0 \boldsymbol{\nu}_0$$

Система нормальных уравнений

$$\left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_0^T \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_0 \tilde{\boldsymbol{\nu}}_0 = \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_0^T \tilde{\boldsymbol{B}}$$

Переход к итерационному методу приближений

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_0^j = \tilde{\boldsymbol{q}}_0^{j-1} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}_0^{j-1} \quad \text{где } \tilde{\boldsymbol{q}}_0^0 = \boldsymbol{q}_0, \text{ а } \tilde{\boldsymbol{\nu}}_0^0 = \tilde{\boldsymbol{\nu}}_0$$

Стандартные параметры модели движения КА

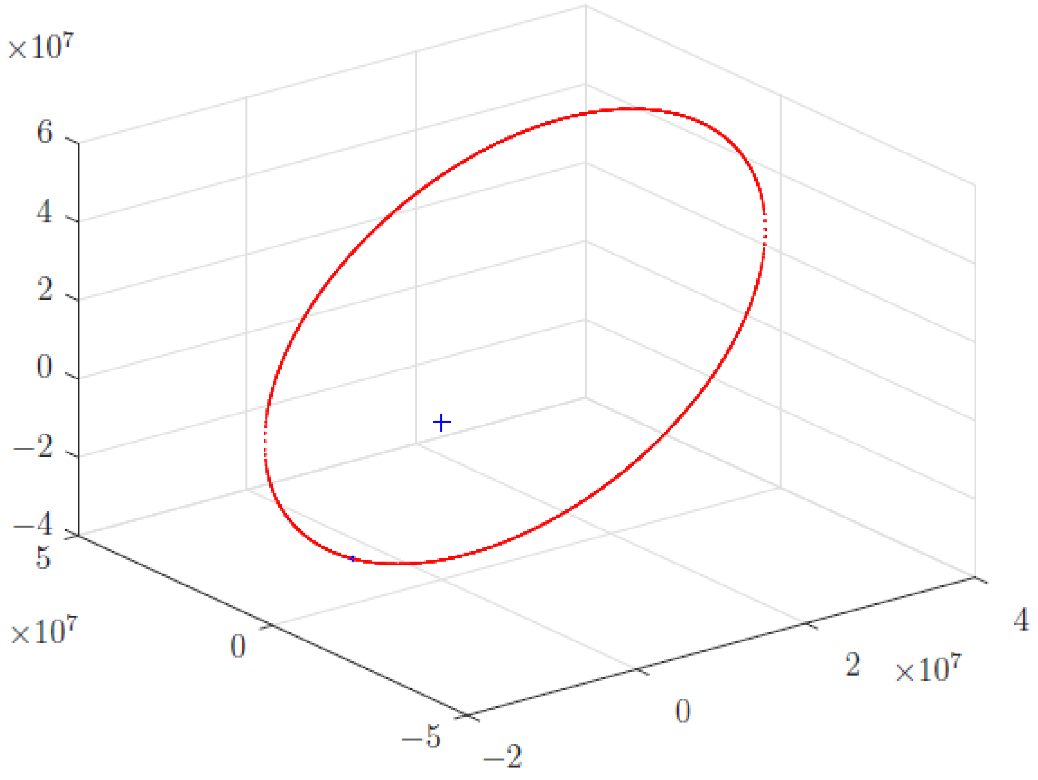
Моделируется 60000 измерений

Шаг моделирования $h = 10\text{с}$

Параметры орбиты

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 47093\text{км} \\
e &= 0.4 \\
i &= 62.1538^\circ \\
\Omega &= 270^\circ \\
w &= 269^\circ \\
E &= 120^\circ
\end{aligned}
$$

Типичное количество измерений, используемых в алгоритме N=500



Орбита типа Тундра

Теоретическая оценка ошибки приближения

$$\boldsymbol{K} = \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_0^T \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_0$$

Оценка дисперсии

$$\mathrm{D}\left(\tilde{\boldsymbol{q}}\right) = (\sigma')^2 \cdot K^{-1}$$

$$\mathrm{D}_{r,V}(q) \approx tr\left(\mathrm{D}_{r,v}\left(\tilde{\boldsymbol{q}}\right)\right) = (\sigma')^2 \cdot tr\left(K_{r,V}^{-1}\right)$$

$$\log_{10}\left(\sqrt{\mathrm{D}_{r,V}(\mathbf{q})}\right) = \log_{10}(\sigma) + \log_{10}\left(\frac{2\pi}{360}\right) + C_{r,V}$$

Константы находятся для отдельно взятого участка орбиты

$$C_{r,V} = \log_{10}\left(\sqrt{tr\left(K_{r,V}^{-1}\right)}\right)$$

$$\log_{10}\left(\sqrt{\mathrm{D_r}(\mathbf{q})}\right) = \log_{10}(\sigma) + 7.465,\ C_r\text{=9.223}$$

$$\log_{10}\left(\sqrt{\mathrm{D_V}(\mathbf{q})}\right) = \log_{10}(\sigma) + 3.382,\ C_r\text{=5.140}$$

Зависимость точности от количества измерений

Для сглаживания зависимости используется несколько (5) различных наборов измерений со случайными отклонениями

$$\mathrm{D}_{r,V}(\boldsymbol{q}) \sim \frac{1}{\mathrm{n}-1} \sum \delta_{\mathrm{r,V}}^2$$

Дисперсия измерений фиксирована

$$\sigma = 1e - 02$$

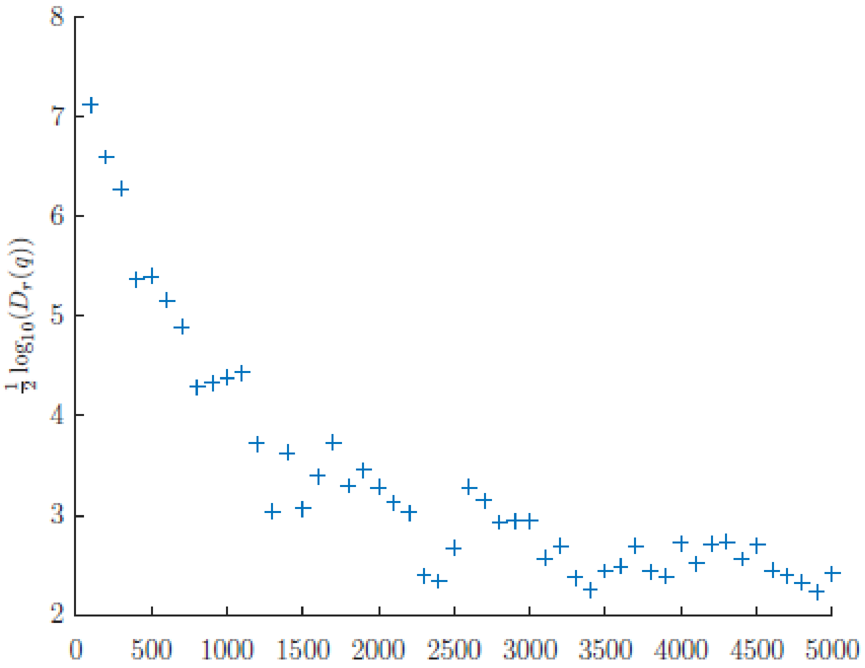
Зависимость оценивается как

$$\log_{10}\big(\mathrm{D}_r(\mathbf{q})\big) = 20.753 - 4.076 \cdot \log_{10}(N)$$

$$\log_{10}\big(\mathrm{D}_V(\mathbf{q})\big) = 12.780 - 4.117 \cdot \log_{10}(N)$$

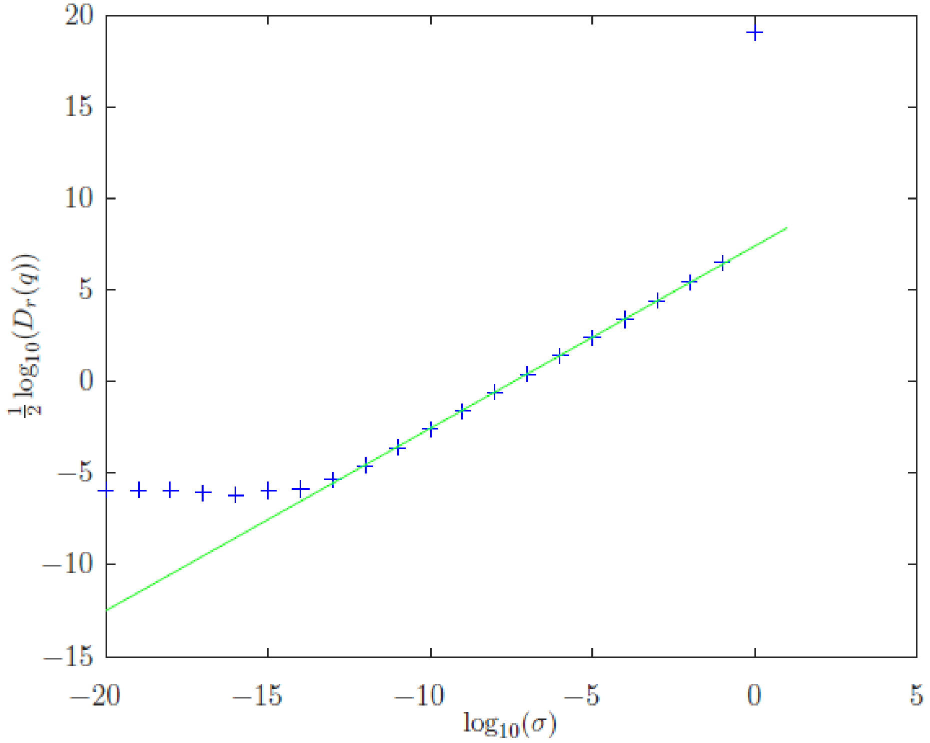
В обобщенном виде выполняется до N=10000 измерений

$$\mathrm{D}_{\mathrm{r,V}}(\mathrm{q}) \sim \frac{1}{\mathrm{N}^4}$$



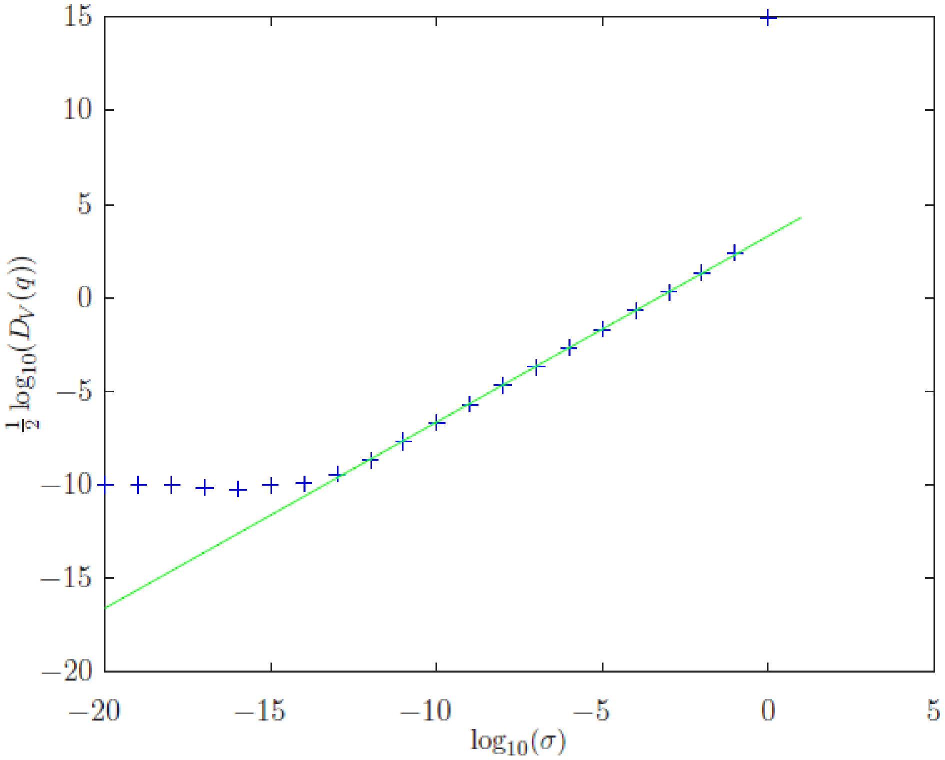
Логарифмическая зависимость ошибки от числа измерений. Для координат

Влияние точности измерений в невозмущенной модели



Логарифмическая зависимость ошибки от точности измерений.
Для координат

$$\log_{10}\left(\sqrt{\mathrm{D_r}(\mathbf{q})}\right) = 0.994 \cdot \log_{10}(\sigma) + 7.388$$

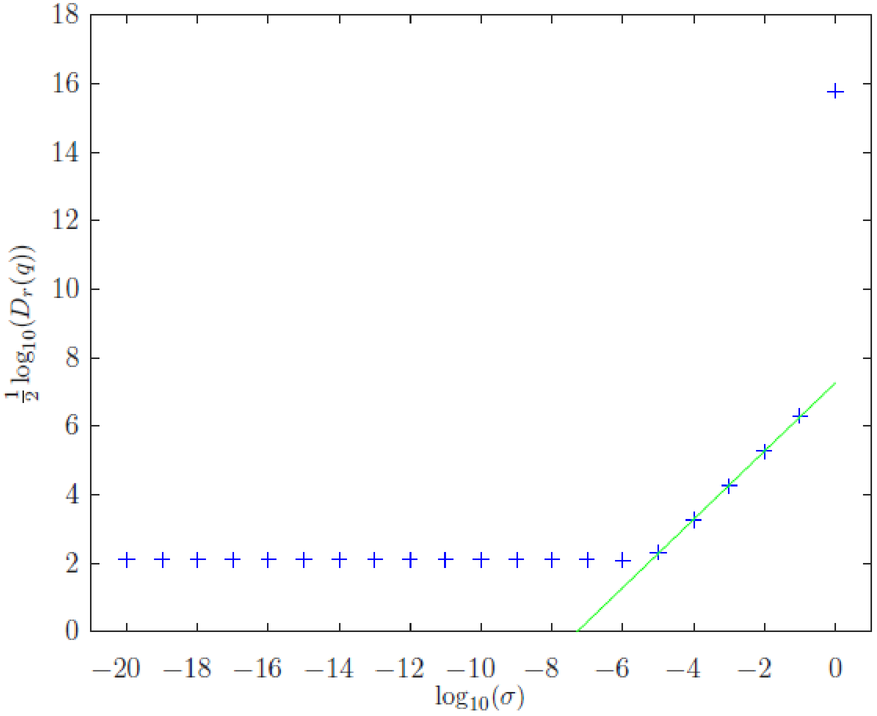


Логарифмическая зависимость ошибки от точности измерений.
Для скоростей

$$\log_{10}\left(\sqrt{\mathrm{D_V}(\mathbf{q})}\right) = 0.994 \cdot \log_{10}(\sigma) + 3.303$$

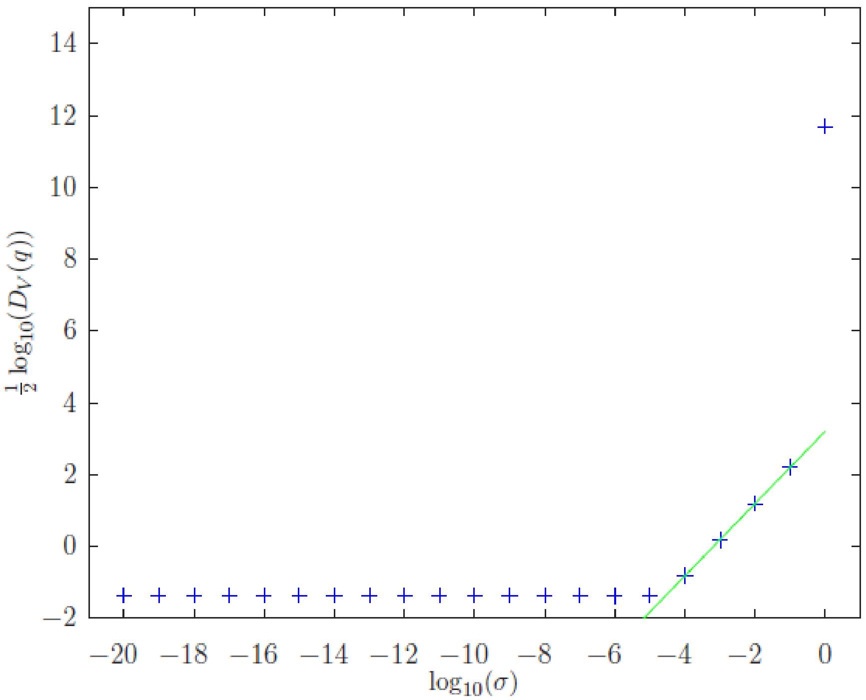
Влияние точности измерений в возмущенной модели EGM2008

EGM2008 – модель гравитационного поля Земли в виде разложения по сферическим гармоникам (120)



Логарифмическая зависимость ошибки от точности измерений. Для координат

$$\log_{10}\left(\sqrt{\mathrm{D_r}(\mathbf{q})}\right) = 0.997 \cdot \log_{10}(\sigma) + 7.272$$



Логарифмическая зависимость ошибки от точности измерений. Для скоростей

$$\log_{10}\left(\sqrt{\mathrm{D_V}(\mathbf{q})}\right) = 1.007 \cdot \log_{10}(\sigma) + 3.206$$

Результаты

- Построен алгоритм уточнения фазовых координат на измерениях местной вертикали
- Получены теоретическая и выборочная оценки зависимости между ошибкой измерений и ошибкой определения фазовых координат
- В возмущенной модели движения КА, использование невозмущенной модели даёт точность около 100 м и 10см/с

  $\sigma_{r,V}(q) \sim \frac{1}{N^4}$
- Результат можно улучшать путем увеличения количества измерений в зависимости

Спасибо за внимание