62-я научная конференция МФТИ
18-23 ноября 2019 года

Динамика и управление движением космических аппаратов

Использование интеграла Якоби в бикруговой задаче четырех тел

Целоусова А.А.[1,2], Трофимов С.П.[1]

[1]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша (РАН)
[2]Московский физико-технический институт

Работа поддержана грантом РНФ 19-11-00256

Низкоэнергетические траектории перелета

Низкоэнергетические траектории перелета от Земли к Луне

Отлетная кеплерова энергия космического аппарата (КА) относительно Земли

$$E_1 \lesssim 0$$

Кеплерова энергия КА при подлете к Луне

$$E_2 \lesssim 0$$

WSB (Weak Stability Boundary)-траектории – низкоэнергетические траектории, при проектировании которых используется гравитационное возмущение от Солнца

Низкоэнергетические WSB-траектории

Проектирование WSB-траекторий перелета

Две круговые ограниченные задачи трех тел ($CR3BP_{SE}$ и $CR3BP_{EM}$)

Бикруговая задача четырех тел (BCR4BP)

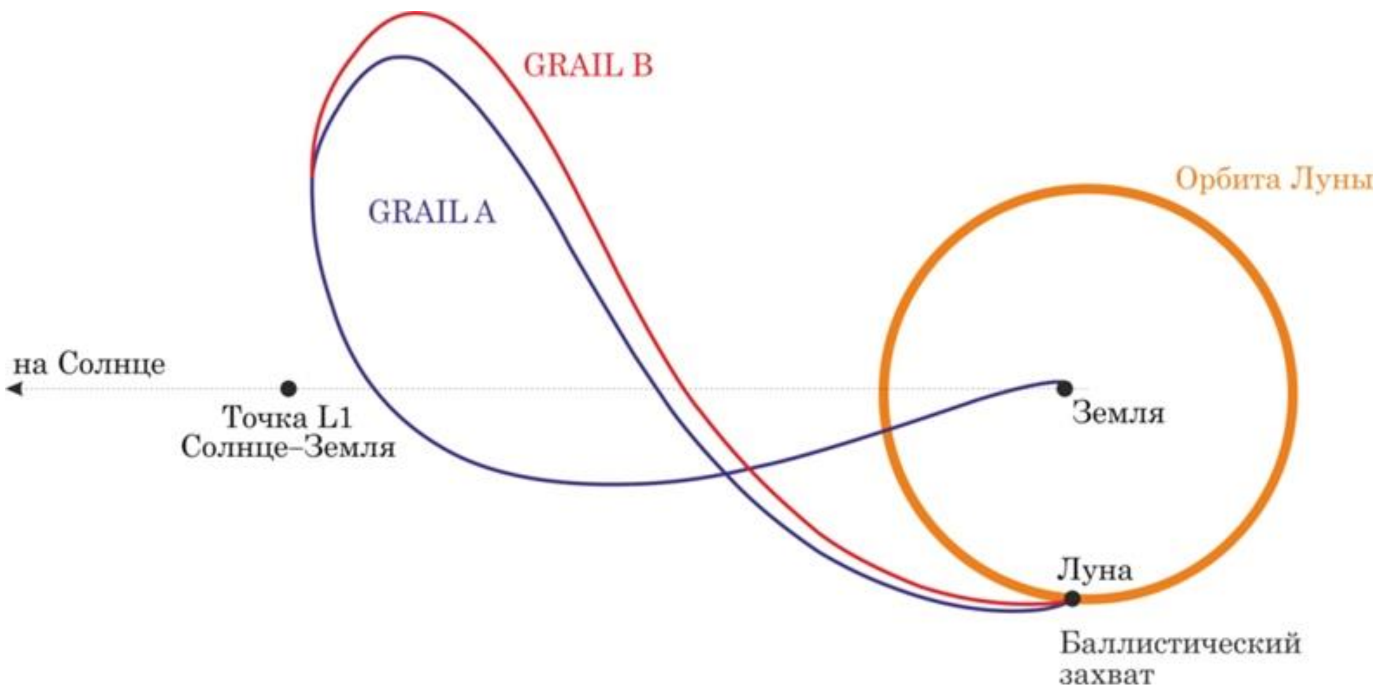
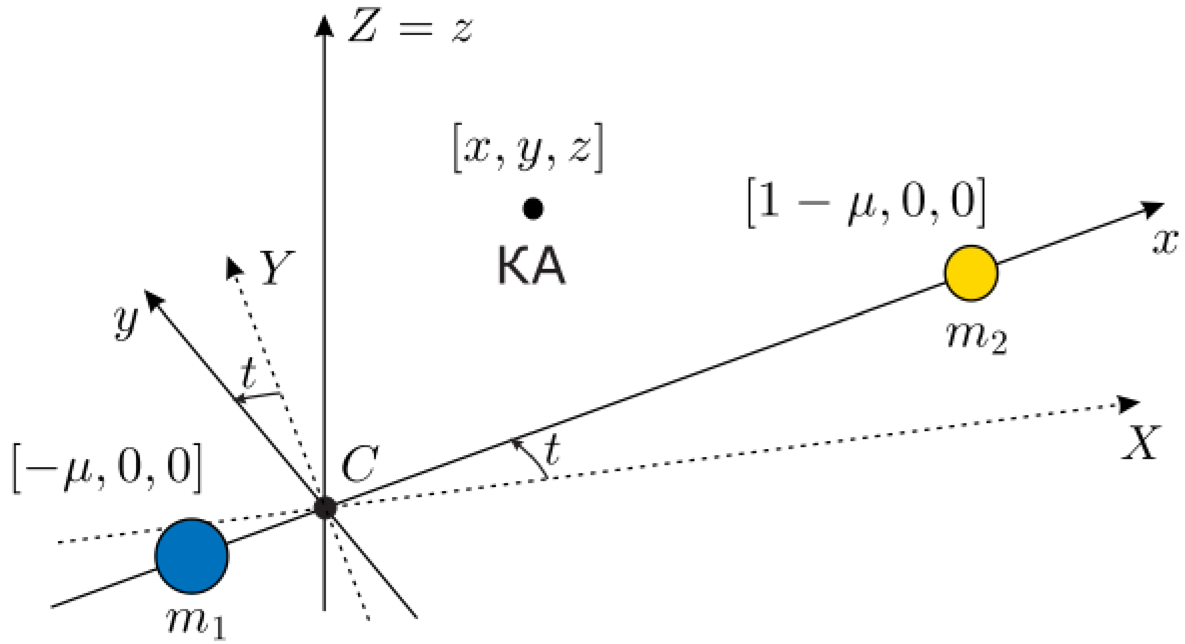


Схема перелета в миссии GRAIL

Адаптировано из Anderson R. L., Parker J. S. Targeting low-energy transfers to low lunar orbit. – 2011

Круговая ограниченная задача трех тел

Две материальные точки P_1 (m_1) и P_2 (m_2) движутся по круговым орбитам относительно их центра масс, а КА пренебрежительно малой массы движется в поле их тяготения (Circular Restricted Three Body Problem, CR3BP)



Инерциальная и вращающаяся системы координат (СК)

Уравнения движения CR3BP

Во вращающейся системе координат

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial z},$$

где $\Omega_3 = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1-\mu)}{2}$ – обобщенный потенциал,

r_1, r_2 – расстояние от КА до m_1 и m_2 , соответственно.

Интеграл Якоби: $\boxed{J = 2\Omega_3 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}$

Критерий Тиссерана

Интеграл Якоби в инерциальной системе координат $P_1X_1Y_1Z_1$:

$$J \simeq 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} + \mu(1-\mu) - \dot{X_1}^2 - \dot{Y_1}^2 - \dot{Z_1}^2 + 2\left(X_1\dot{Y_1} - Y_1\dot{X_1}\right)$$

Вдали от малого тела траекторию можно считать кеплеровой:

$$\dot{X_1}^2 + \dot{Y_1}^2 + \dot{Z_1}^2 = 2E_1 + \frac{2}{r}(1-\mu) = -\frac{1}{a} + \frac{2}{r}(1-\mu),$$

$$X_1\dot{Y_1} - Y_1\dot{X_1} = W_{Z_1} = \sqrt{(1-\mu)a(1-e^2)}\cos i,$$

$1-\mu \simeq 1,\ \dfrac{1-\mu}{r_1} \simeq \dfrac{1-\mu}{r},\ \dfrac{\mu}{r_2} \simeq 0$, откуда

$\boxed{J \simeq T \simeq \dfrac{1}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)}\cos i}$ – параметр Тиссерана (1896)

Критерий Тиссерана: $\boxed{T \simeq const}$

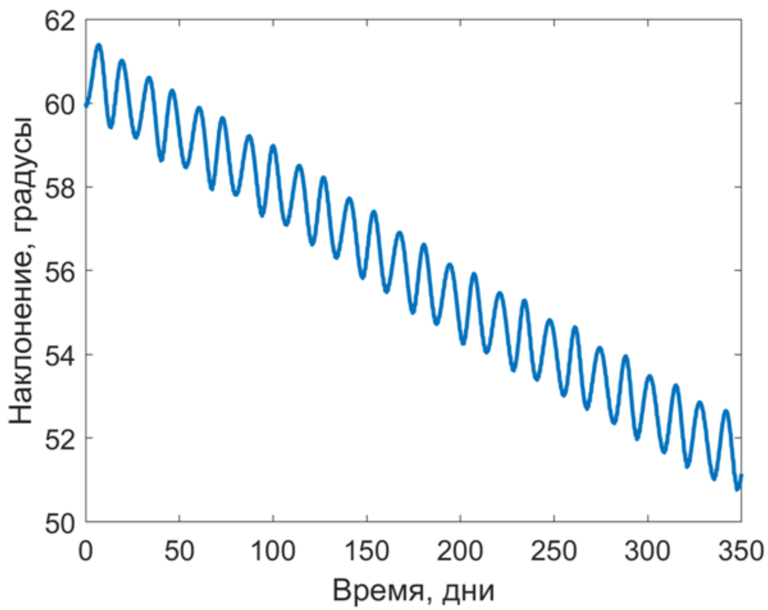
Эффект Лидова-Козаи

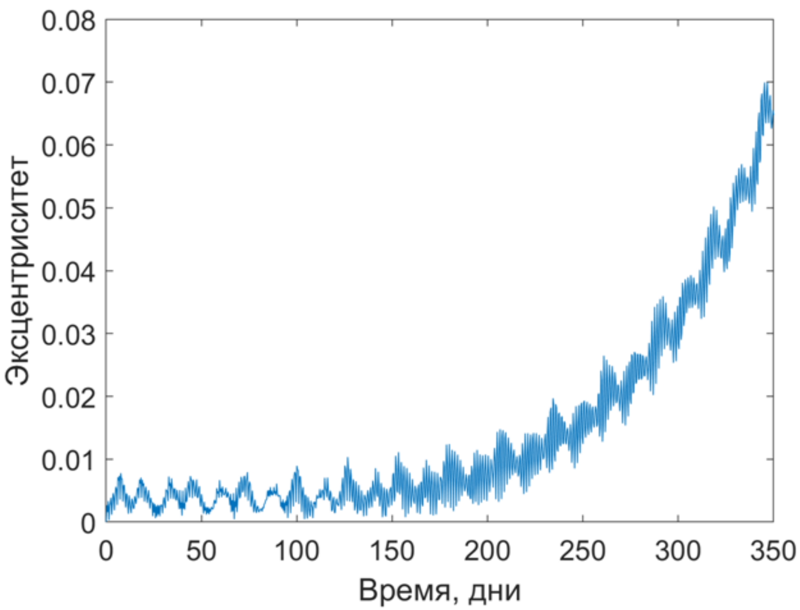
Интеграл Якоби в инерциальной системе координат $P_2X_2Y_2Z_2$:

$$J \simeq 3(1-\mu) + 2W_{Z_2} - 2E_2$$

В среднем при движении по орбите $E_2 \simeq const, a \simeq const$

$$\boxed{\sqrt{1-e^2}\cos i \simeq const}$$ – Лидов, Козаи (1962)





Эволюция наклонения и эксцентриситета для окололунной орбиты a = 10 000 км

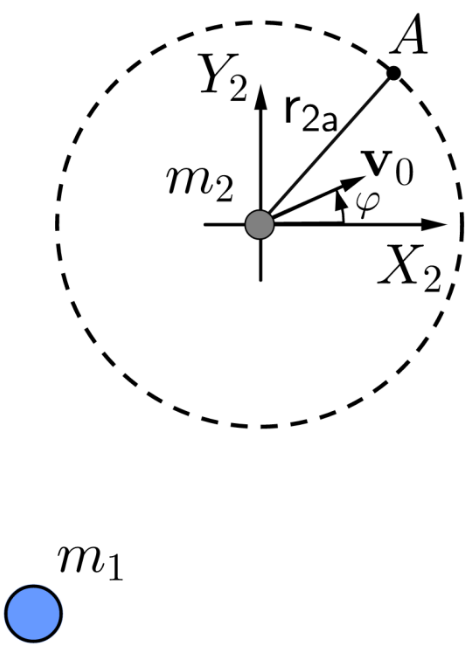
Сфера Кислика

$\mathbf{v}_0$ – начальная скорость КА,

J – константа интеграла Якоби,

А – точка выхода КА на кеплерову траекторию вокруг P_1 (m_1),

$\overline{J}$ – функция координат и скоростей, соответствующая интегралу Якоби при движении, по кеплеровой траектории относительно тела P_1,



Вылет КА из сферы влияния

После точки А: $\Delta J(\varphi, r_{2a}) = J - \overline{J}$

$$r_{2a} = r_K : \; I(r_{2a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\Delta J)^2 d\varphi \to \min$$

$$\Downarrow$$

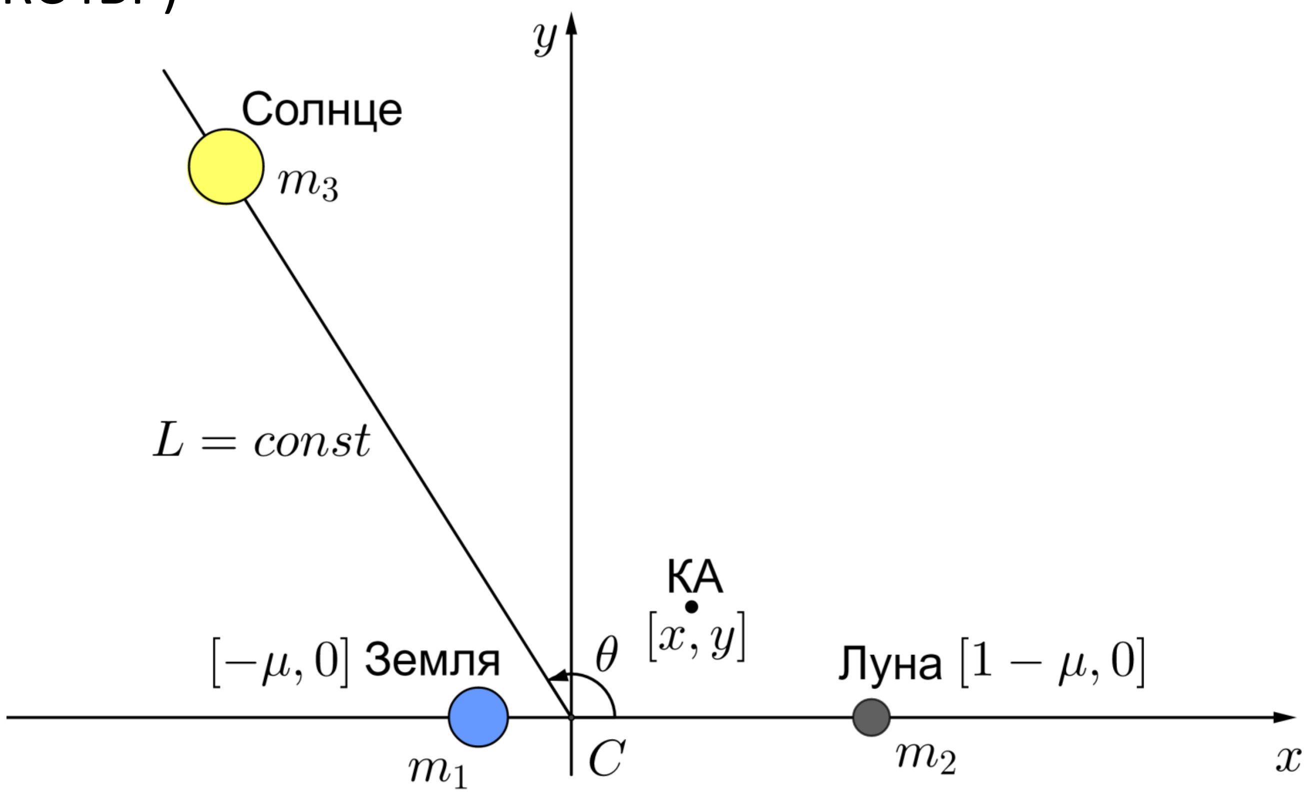
$$\frac{\partial I}{\partial r_{2a}} = 0$$

Сфера Кислика (1964):

$$\boxed{r_K = 1.15\,(m_2/m_1)^{1/3}}$$

Плоская бикруговая задача четырех тел

КА пренебрежительно малой массы движется в центральных полях тяготения Земли, Луны и Солнца. Земля и Луна движутся по круговым орбитам вокруг их общего центра масс, движущегося по круговой орбите вокруг Солнца (Planar Restricted Circular Four Body Problem, PRC4BP)



Вращающаяся СК в модели PRC4BP

Уравнения движения PRC4BP

Во вращающейся системе координат:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega_4}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega_4}{\partial y},$$

$\Omega_4 = \Omega_3 + \dfrac{\mu_s}{r_3} - \dfrac{\mu_s}{L^2}(x\cos\theta + y\sin\theta)$ – обобщенный потенциал PRC4BP,

$$\mu_s = m_3/(m_1 + m_2),$$

r_3 – расстояние от КА до Солнца,

L – расстояние от Солнца до центра масс системы Земля-Луна

Интеграл Якоби меняется из-за наличия возмущений от Солнца:

$$J \neq const$$

Изменение интеграла Якоби в PBC4BP

Интеграл Якоби системы Земля-Луна: $J = 2\Omega_3 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

Производная интеграла Якоби с учетом уравнений движения:

$$\dot{J} = 2\frac{\partial \Omega_3}{\partial x}\dot{x} + 2\frac{\partial \Omega_3}{\partial y}\dot{y} - 2\dot{x}\ddot{x} - 2\dot{y}\ddot{y} = -2\left[\dot{x}\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right],$$

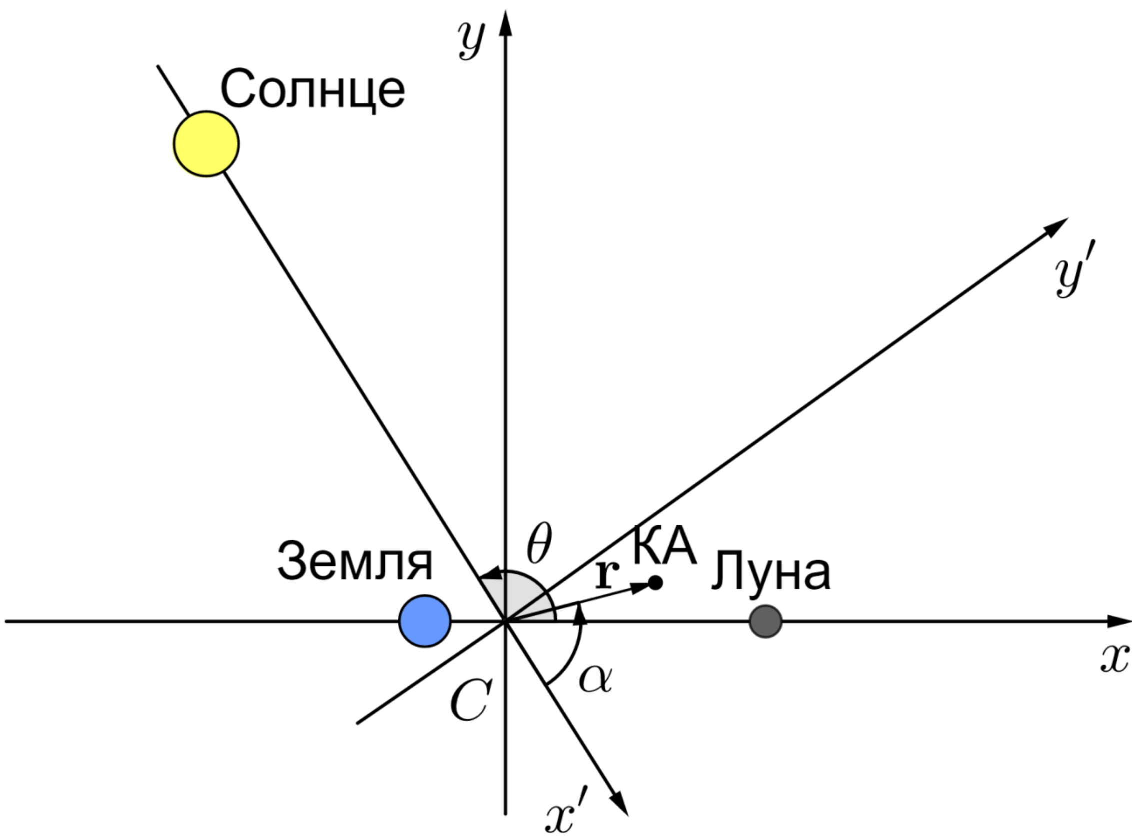
где $\Omega = \frac{\mu_s}{r_3} - \frac{\mu_s}{L^2}(x\cos\theta + y\sin\theta)$

Заметим, что $\dot{J} = -2\left[\frac{d\Omega}{dt} - \dot{\theta}\frac{\partial \Omega}{\partial \theta}\right]$, откуда

$$\boxed{\Delta J = -2\Delta\Omega + 2\int \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}\omega dt,}$$

где $\omega = \frac{d\theta}{dt} < 0$ – угловая скорость движения Солнца

Вращающаяся СК
Солнце-барицентр Земля-Луна



Вращающиеся СК Земля-Луна и Солнце-барицентр

Полярные координаты:

$$x' = r\cos\alpha$$

$$y' = r\sin\alpha$$

Изменение интеграла Якоби для WSB траекторий

В окрестности Луны $J \simeq 3(1-\mu) + 2W_{Z_2} - 2E_2$

Для низкоэнергетических траекторий необходимо, чтобы

$$\Delta E_2 \to \min \Rightarrow \Delta J \to \max \Rightarrow \Delta J > 0$$

В полярных координатах с учетом $\dfrac{r}{L} \ll 1$:

$$\Omega \simeq \frac{\mu_s}{L} - \frac{1}{2}\frac{\mu_s}{L^3}r^2 + \frac{3}{2}\frac{\mu_s}{L^3}r^2\cos^2\alpha,$$

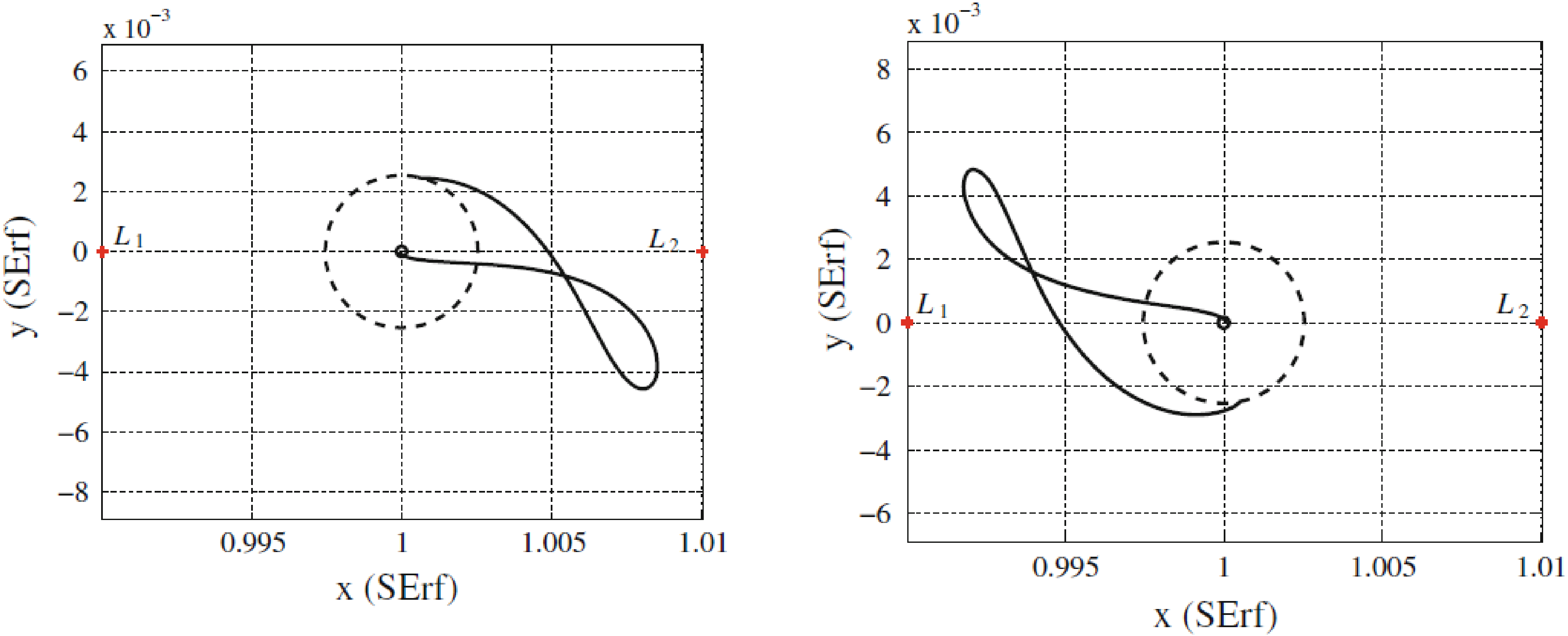
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} \simeq \frac{3}{2}\frac{\mu_s}{L^3}r^2\cos 2\alpha$$

Из $\Delta J = -2\Delta\Omega + 2\int \dfrac{\partial\Omega}{\partial\theta}\omega dt > 0$ ⇨

$\boxed{\cos 2\alpha < 0 \text{ при } r = r_{max}}$

$\boxed{\cos\alpha = 0 \text{ в конечной точке}}$

Примеры WSB-траекторий перелета



WSB траектории перелета во вращающейся СК Солнце-Земля

Credit: Topputo F. On optimal two-impulse Earth–Moon transfers in a four-body model //Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2013. – T. 117. – №. 3. – C. 279-313

Заключение

- Интеграл Якоби играет важную роль не только в задаче трех тел, но также в более простой модели задачи двух тел и более сложной модели задачи четырех тел

- В модели сопряженных конических сечений из интеграла Якоби можно получить постоянные соотношения между элементами кеплеровых орбит

- Уравнение эволюции интеграла Якоби в модели задачи четырех тел может быть использовано при анализе влияния возмущения от четвертого тела на траекторию КА

Дальнейшая работа

- Разработка алгебраического и геометрического инструментария для проектирования низкоэнергетических WSB траекторий с помощью интеграла Якоби

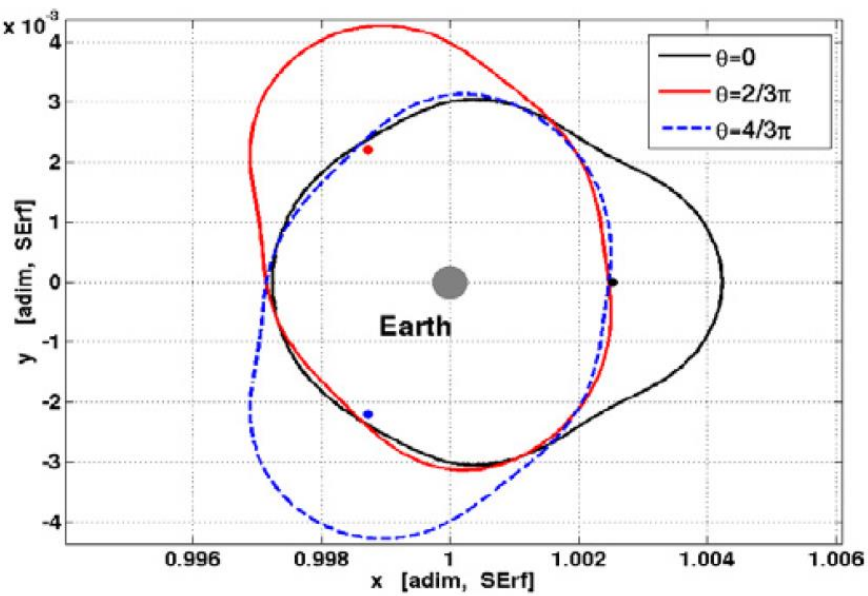
Backup

Области влияния CR3BP

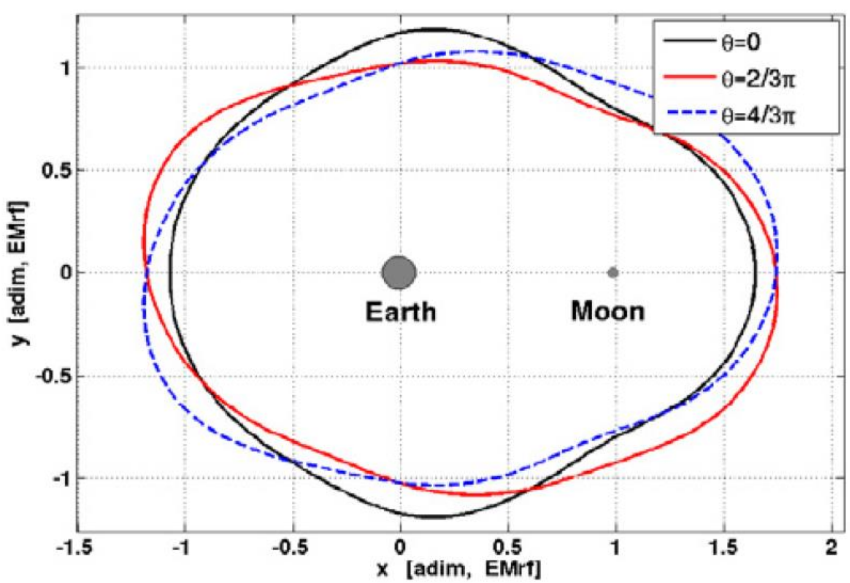
Ошибки моделей задачи трех тел: $\Delta_{EM} = |\mathbf{a}_{BCR4BP} - \mathbf{a}_{CR3BP_{EM}}|$

$$\Delta_{SE} = |\mathbf{a}_{BCR4BP} - \mathbf{a}_{CR3BP_{SE}}|$$

Граница областей влияния: $\Delta_{EM} = \Delta_{SE}$



Вращающаяся система координат системы Земля-Луна



Вращающаяся система координат системы Солнце-Земля

Credit: Castelli (2012)