



62-я научная конференция МФТИ
18 ноября 2019 года



Динамика и управление движением КОСМИЧЕСКИХ аппаратов

**Методика уточнения сложного
гравитационного поля с помощью
группировки малых спутников на примере
астероида Эрос**

М.Ю. Воронина, М.Г. Ширококов

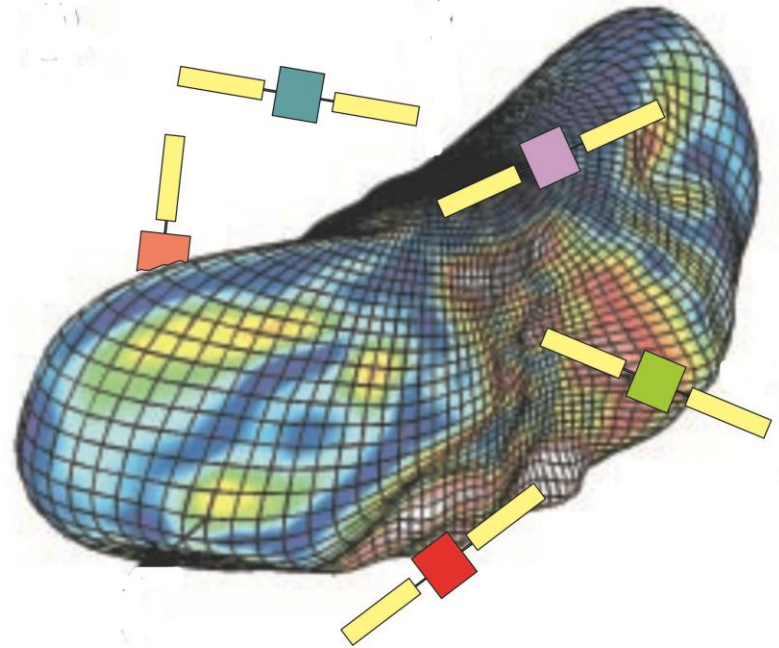
Содержание

- Постановка задачи
- Модель сферических гармоник гравитационного потенциала
- Задача нахождения коэффициентов перед гармониками
- Система отделения малых КА
- Результаты
- Заключение
- Продолжение работы

Постановка задачи

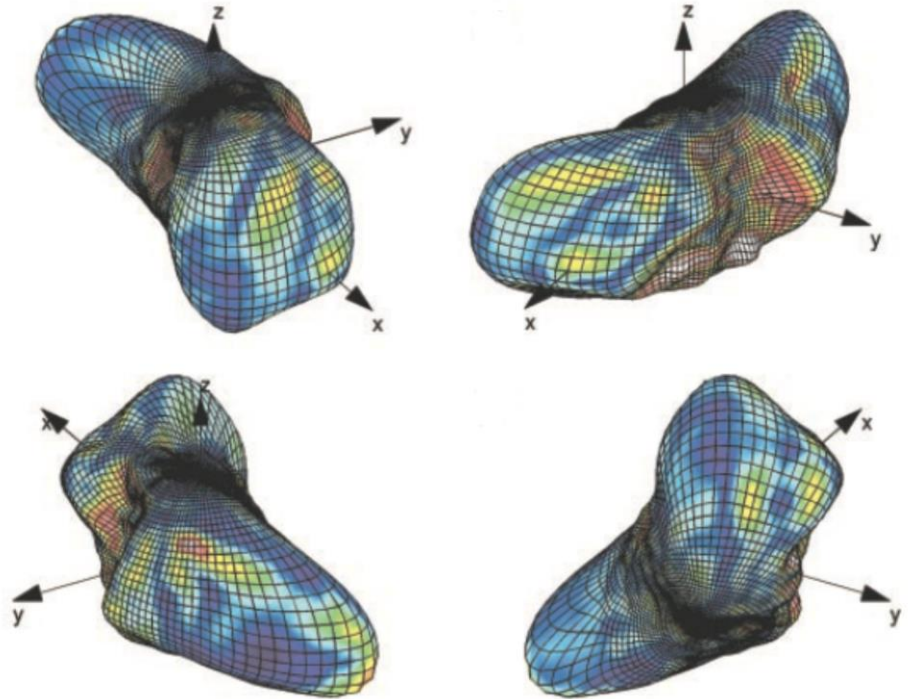
По данным измерений векторов состояния группы аппаратов необходимо определить коэффициенты разложения в модели сферических гармоник гравитационного поля астероида, если известно:

- Размер и гравитационный параметр астероида
- Угловая скорость вращения астероида
- Фазовый вектор каждого аппарата в группе в заданные моменты времени



Астероид Эрос

- Размеры астероида:
 $34.4 \times 11.2 \times 11.2$ км
- Угловая скорость вращения:
 $3.31 \cdot 10^{-4}$ рад/с
- Гравитационный параметр:
 $\mu = 4.4621 \cdot 10^{-4}$ км³/с²
- Известны коэффициенты перед гармониками $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ до 4 порядка включительно



Модель сферических гармоник гравитационного потенциала

$$\vec{F} = \nabla U$$

$$U = \frac{\mu}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \bar{P}_{nm}(\sin \theta) [\bar{C}_{nm} \cos m\phi + \bar{S}_{nm} \sin m\phi]$$

μ - гравитационный параметр

ρ - расстояние от начала координат до КА

R - радиус сферы притягивающего тела

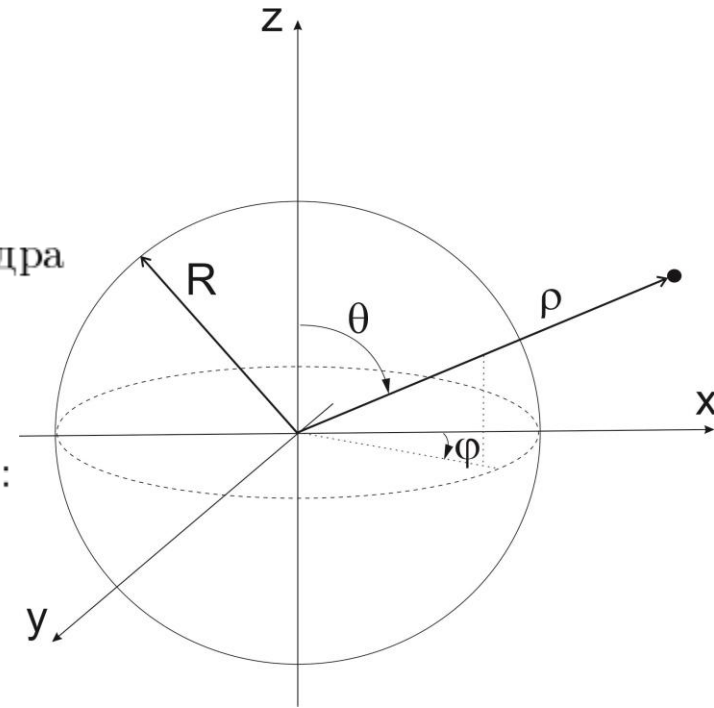
\bar{P}_{nm} - нормированная присоединенная функция Лежандра

θ, ϕ - зенитный и азимутальный углы

$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ - коэффициенты, нормированные по формуле:

$$(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}) = \left[\frac{(n+m)!}{(2-\delta_{0m})(2n+1)(n-m)!} \right]^{1/2} (C_{nm}, S_{nm})$$

δ_{0m} - символ Кронекера



Задача нахождения коэффициентов перед гармониками гравитационного поля

Уравнение движения аппарата имеет вид:

$$\ddot{\vec{r}} = \nabla U$$

где $\vec{r} = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)^T$

Коэффициенты $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ определяются
из задачи оптимизации

$$J(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}) \rightarrow \min$$

Целевая функция:

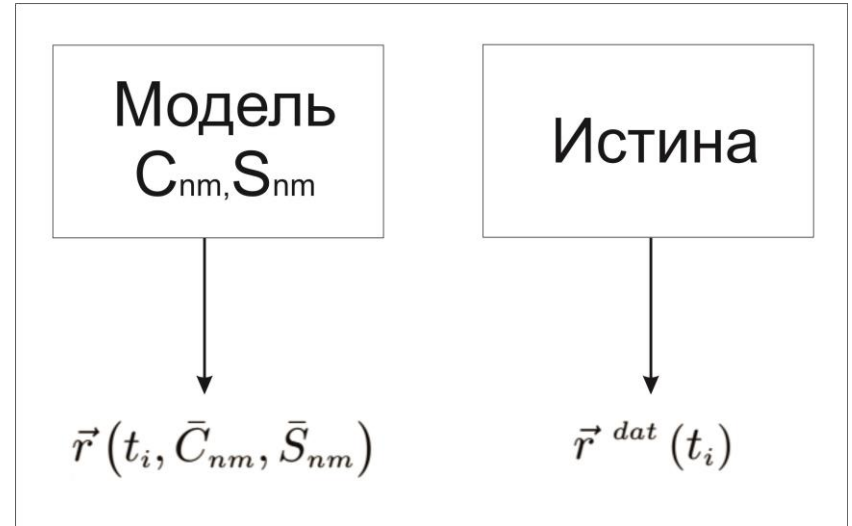
$$J(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}) = \sum_{i=1}^{N_t} [\vec{r}(t_i, \bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}) - \vec{r}^{dat}(t_i)]^T [\vec{r}(t_i, \bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}) - \vec{r}^{dat}(t_i)]$$

Заменяем $\vec{f} = [\vec{v}, \nabla U]^T$, $\vec{c} = [\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}]^T$. Тогда якобиан функционала имеет вид:

$$\frac{\partial J(\vec{c})}{\partial \vec{c}} = \sum_{i=1}^{N_t} 2 [\vec{r}(t_i, \vec{c}) - \vec{r}^{dat}(t_i)]^T \frac{\partial \vec{r}(t_i)}{\partial \vec{c}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{c}} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{c}} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{c}}$$

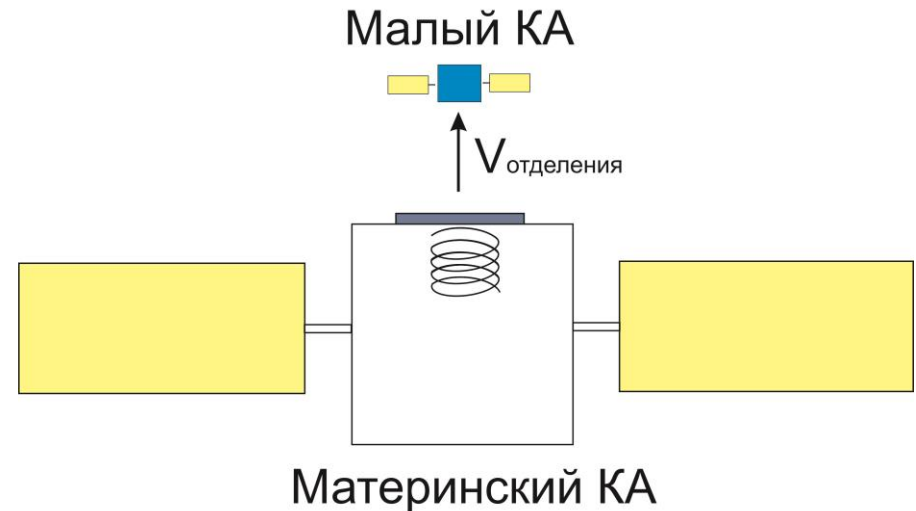
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{c}}(t_{i=1} = 0) = \mathbf{O}_{6 \times M}$$



Система отделения малых КА

В связанной с материнским КА системе координат:

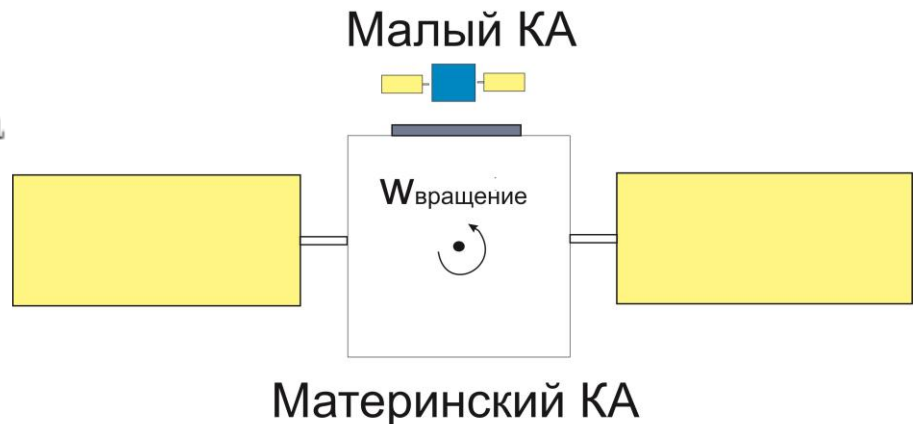
$$\vec{V}_{\text{отдел}} = \mathcal{N}(V_{\text{launch}}, \sigma^2) \vec{e}_{\text{launch}}$$



Малый КА отделяется за счет вращения материнского аппарата

В связанной с материнским КА системе координат:

$$\vec{V}_{\text{отдел}} = \vec{W}_{\text{вращ}} \times \vec{R}_{\text{отдел}}$$



Результаты

- При первой системе отделения:

Вотдел = 0.5 м/с

$K = 5, \varepsilon = 1$ км

$$inc = 0^\circ \quad cdiff = 10^{-4} \div 10^{-7}$$

$$inc = 45^\circ \quad cdiff = 10^{-3} \div 10^{-7}$$

$$inc = 90^\circ \quad cdiff = 10^{-2} \div 10^{-7}$$

$K = 10, \varepsilon = 3$ км

$$inc = 0^\circ \quad cdiff = 10^{-10} \div 10^{-13}$$

$$inc = 45^\circ \quad cdiff = 10^{-12} \div 10^{-16}$$

$$inc = 90^\circ \quad cdiff = 10^{-12} \div 10^{-14}$$

- При второй системе отделения:

Ввращ = 10^{-2} рад/с, $K = 5, \varepsilon = 1$ км

$$inc = 0^\circ \quad cdiff = 10^{-10} \div 10^{-12}$$

$$inc = 45^\circ \quad cdiff = 10^{-11} \div 10^{-13}$$

$$inc = 90^\circ \quad cdiff = 10^{-11} \div 10^{-14}$$

Ввращ = 10^{-3} рад/с, $K = 10, \varepsilon = 3$ км

$$inc = 0^\circ \quad cdiff = 10^{-10} \div 10^{-13}$$

$$inc = 45^\circ \quad cdiff = 10^{-12} \div 10^{-14}$$

$$inc = 90^\circ \quad cdiff = 10^{-12} \div 10^{-14}$$

- При смешанной системе отделения:

Ввращ = 10^{-2} рад/с

Вотдел = 0.2 м/с, $K = 5, \varepsilon = 1$ км

$$inc = 0^\circ \quad cdiff = 10^{-4} \div 10^{-9}$$

$$inc = 45^\circ \quad cdiff = 10^{-10} \div 10^{-14}$$

$$inc = 90^\circ \quad cdiff = 10^{-11} \div 10^{-14}$$

Вотдел = 0.5 м/с $K = 10, \varepsilon = 3$ км

$$inc = 0^\circ \quad cdiff = 10^{-4} \div 10^{-7}$$

$$inc = 45^\circ \quad cdiff = 10^{-12} \div 10^{-16}$$

$$inc = 90^\circ \quad cdiff = 10^{-11} \div 10^{-13}$$

Заключение

Точность определения коэффициентов перед гармониками зависит от объема данных фазового вектора следующим образом:

- Если объем данных меньше 30%, то точность коэффициентов зависит от наклонения орбиты
- В противном случае точность коэффициентов не зависит от орбиты

Продолжение работы

- Построить задачу нахождения коэффициентов гравитационного поля по данным относительного положения и радиальной скорости малого и материнского КА
- Построить задачу нахождения не только коэффициентов перед гармониками, но и угловой скорости вращения астероида
- Определить точность нахождения коэффициентов в зависимости от ошибок определения фазовых векторов и возмущающих сил

Спасибо за внимание!