



62-я научная конференция МФТИ  
18-23 ноября 2019 года



Динамика и управление движением космических аппаратов

# Методы обхода сингулярных положений гиродинов при управлении ориентацией космического аппарата

*Д.А. Вознюк<sup>1</sup>, С.С. Ткачев<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (НИУ)

<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН



# Содержание

- Введение
- Постановка задачи
- Формирование управляющего воздействия
- Методы обхода сингулярностей
- Моделирование
- Заключение



# Введение

## Достоинства гироскопов:

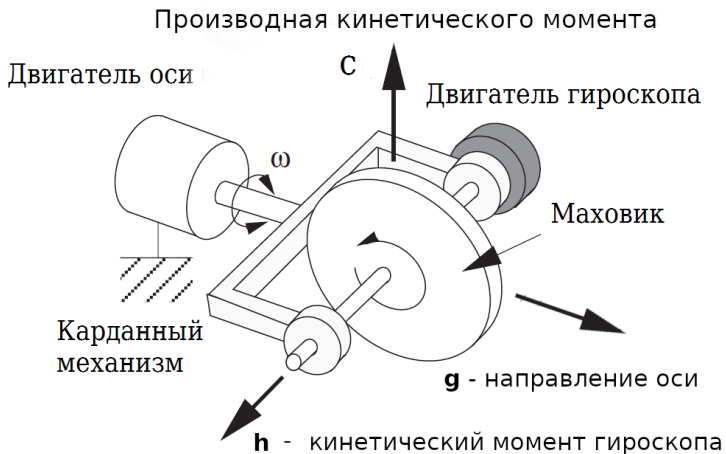
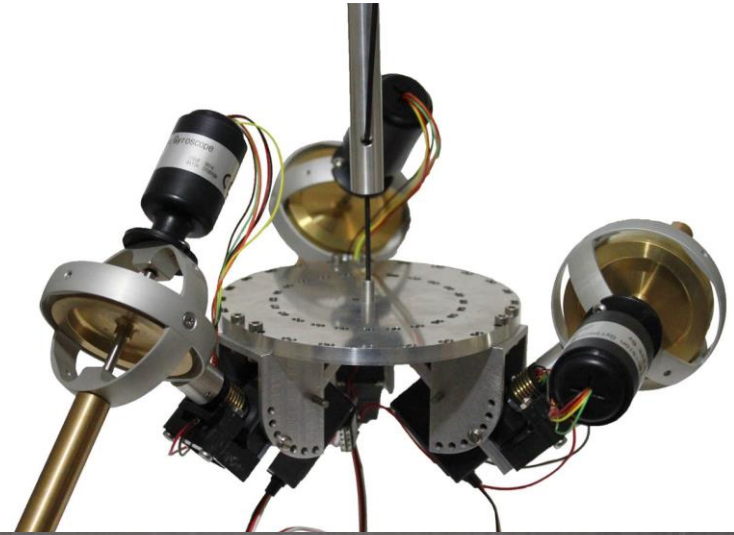
Высокая точность

Большой момент в сравнении с маховиками

## Особенности гироскопов:

Сложная механика

Наличие особых конфигураций системы, где теряется управляемость (сингулярность)



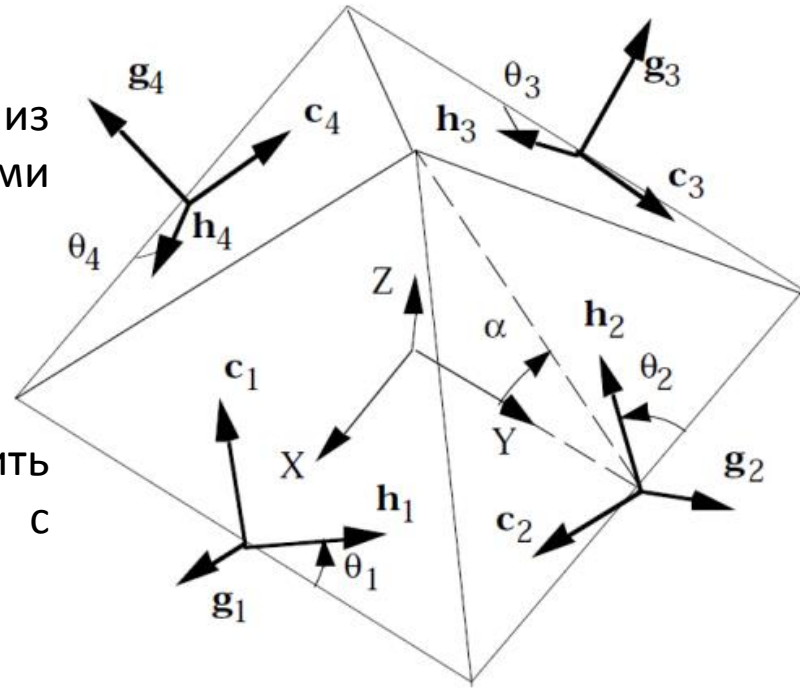


# Постановка задачи

Конфигурация: 4-угольная пирамида из одинаковых гиринов со сферическими тензорами инерции

На систему действует внешний момент

Задача: парировать момент и обеспечить прохождение сингулярностей с наибольшей точностью





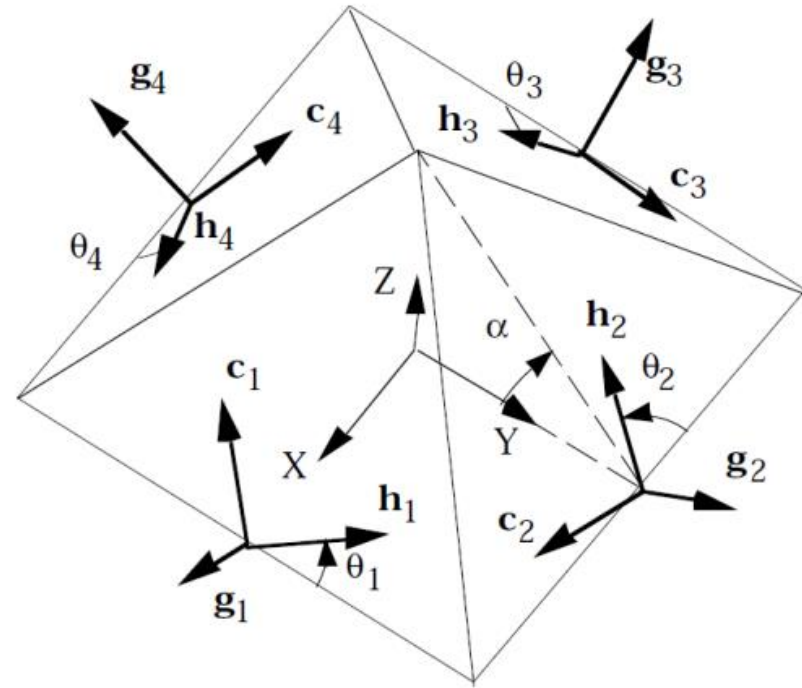
# Формирование управляющего воздействия

$\mathbf{h}_i$  — нормированный вектор  
кинетического момента  $i$ -го  
гиродина.

$\mathbf{g}_i$  — направление оси  $i$ -го  
гиродина.

$\mathbf{c}_i$  — производная кинетического  
момента  $i$ -го гиродина, причем  
 $\mathbf{c}_i = \partial \mathbf{h}_i / \partial \theta_i = \mathbf{g}_i \times \mathbf{h}_i$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \sin(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$





## Формирование управляющего воздействия

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{T}_{ext},$$

$$\dot{\mathbf{q}} = 0.5 \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} \circ \mathbf{q},$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} + \mathbf{T}_{ext},$$

$$\mathbf{U} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{H}} = -\mathbf{U} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H},$$

Полный кинетический момент:

$$\mathbf{H}h = \sum \mathbf{h}_i(\boldsymbol{\theta})h, \text{ где } \boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4)^T$$

$h$  - модуль кинетического момента одного гиродина

$$\mathbf{H} = f(\boldsymbol{\theta}).$$

Итоговый нормированный вектор управляющего момента получается при помощи дифференцирования по времени кинетического момента.

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{H}} = \sum \partial \mathbf{h}_i / \partial \theta_i \cdot d\theta_i / dt = \sum \mathbf{c}_i \dot{\theta}_i = \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}},$$

где  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_4)$ ,  $\dot{\theta}_i = d\theta_i/dt$ , и  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4)^T$  — вектор угловых скоростей.



# Метод Мура-Пенроуза

Если матрица  $\mathbf{C}$  имеет ранг равный трем, то она имеет три линейно-независимых строки.

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{particular} = \sum \alpha_i \mathbf{R}_i = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\alpha}, \text{ где } \mathbf{R}_i - i\text{-ая строка матрицы } \mathbf{C}$$

Включив в это уравнение ограничение  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{T}$ , получим

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}$$

Отсюда находим  $\boldsymbol{\alpha}$ :

$$\boldsymbol{\alpha} = \left[ \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \right]^{-1} \mathbf{T}$$

$$\text{Следовательно: } \dot{\boldsymbol{\theta}}_{particular} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_{MP} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \left[ \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})^T \right]^{-1} \mathbf{T}$$

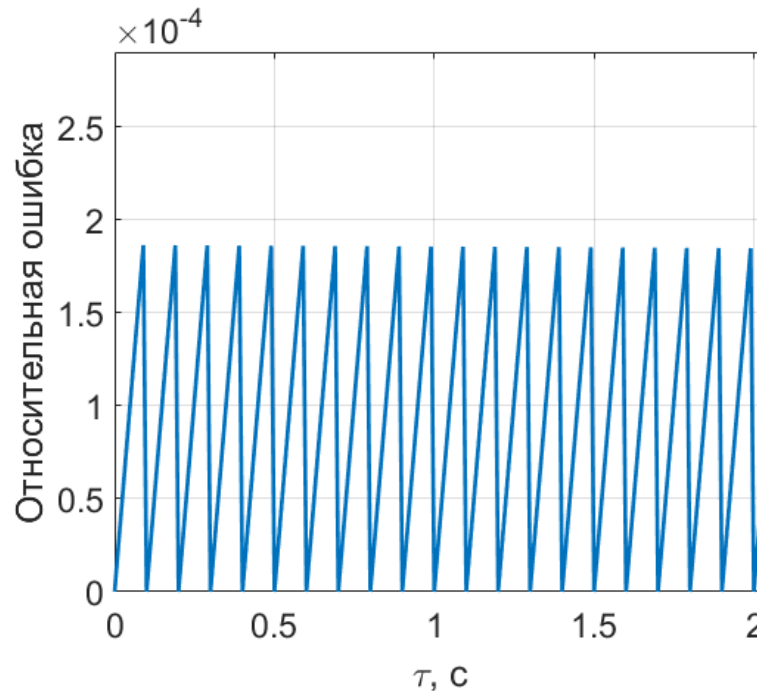
По сути данный метод эквивалентен решению следующей задачи минимизации:

$$\min_{\dot{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}}, \text{ с ограничением } \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{T}, \text{ где } \mathbf{A} = \mathbf{E}_4$$



# Метод Мура-Пенроуза

Наличие дискретности управления и угловой скорости вращения оси кардана приводит к тому, что во время между шагами подсчета управления даже при регулярном случае накапливается ошибка.



В окрестности сингулярности, т.е. когда ранг  $\mathbf{C}$  меньше 3 ситуация еще хуже

если  $\det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) \rightarrow 0 \Rightarrow |\boldsymbol{\omega}| \rightarrow \infty \Rightarrow \boldsymbol{\theta}$  быстро изменяется  $\Rightarrow$  растет ошибка





# Нуль-движение

$$\mathbf{T}_{\text{zero}} = \mathbf{C}\mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{n} = \left( \mathbf{I} - \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C} \right) \mathbf{d} - \text{вектор нуль движения,}$$

$\mathbf{d}$  - произвольный вектор.

С учетом этого общее решение будет представимо в виде

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{particular}} + \alpha \mathbf{n}$$

С помощью нуль-движения возможно перестроить конфигурацию гиродинов из текущего состояния  $\boldsymbol{\theta}$  в любое другое  $\boldsymbol{\theta}_{\text{fin}}$  :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{change}} = \left( \mathbf{I} - \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C} \right) (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_{\text{fin}}) \mathbf{k},$$

где  $\mathbf{k}$  – произвольная положительная константа.



# Singular Robust Inverse

$$\min_{\dot{\theta}} \frac{1}{2} \left\{ \dot{\theta}^T \mathbf{A} \dot{\theta} + \mathbf{T}_{err}^T \mathbf{B} \mathbf{T}_{err} \right\},$$

$$\mathbf{T}_{err} = \mathbf{C}(\theta) \dot{\theta} - \mathbf{T}$$

$$L_{\dot{\theta}} = \mathbf{C}(\theta)^T \mathbf{A} (\mathbf{C}(\theta) \dot{\theta} - \mathbf{T}) + \mathbf{B} \dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow (\mathbf{C}(\theta)^T \mathbf{A} \mathbf{C}(\theta) + \mathbf{B}) \dot{\theta} = \mathbf{C}(\theta)^T \mathbf{B} \mathbf{T}$$

$$\dot{\theta} = \mathbf{C}_{SR} \mathbf{T} = \left[ \mathbf{C}(\theta)^T \mathbf{A} \mathbf{C}(\theta) + \mathbf{B} \right]^{-1} \mathbf{C}(\theta) \mathbf{A} \mathbf{T}$$

Если  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – диагональные матрицы  $\mathbf{E}_3$  и  $\alpha \mathbf{E}_4$  соответственно, то получаем SR-обратную матрицу  $\mathbf{C}$ .

$$\mathbf{C}_{SR} = \mathbf{C}^T \left[ \alpha \mathbf{E}_3 + \mathbf{C} \mathbf{C}^T \right]^{-1}$$

$$\dot{\theta}_{SR} = \mathbf{C}_{SR} \mathbf{T}, \text{ где } \alpha = \begin{cases} 0, & \text{при } m \geq m_{cr} \\ \alpha_0 (1 - m / m_{cr})^2, & \text{при } m < m_{cr} \end{cases}, \text{ } m - \text{мера сингулярности}$$

в большинстве случаев  $m = \det(\mathbf{C}^T \mathbf{C})$



# Generalized Singular Robust

$$\dot{\theta}_{\text{GSR}} = \mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{C}^T + \lambda\mathbf{E}]^{-1} \mathbf{T},$$

$\lambda$  обычно задают как  $\alpha \cdot \exp(-kt)$ ,  $k, \alpha > 0$

где  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 1 \end{pmatrix} > 0$  и  $\varepsilon_i$  - модуляционные функции,

$\varepsilon_i = 0.01 \sin(0.5\pi t + \varphi_i)$ , где  $\varphi_i$  равен 0,  $\pi/2$  и  $\pi$  соответственно



# SVD-разложение

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$$

Здесь  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  – ортогональные матрицы

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ суть сводится в добавлении ошибки по третьей компоненте, которая стремится к нулю. Тогда:}$$

$$\mathbf{S}_{err} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3 + \alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{SVD}} = \mathbf{V}\mathbf{S}_{err}\mathbf{U}^T\mathbf{T}$$

Ошибку  $\alpha$  чаще всего задают как  $\alpha_0 \exp(-m^2)$ , где  $m$  – мера сингулярности. В рамках данного метода за  $m$  было выбрано  $\sigma_3$



# Моделирование

Моделирование происходило в программе Matlab R2016b. Для приближения задачи к реальным параметрам на гиродины были наложены следующие ограничения:

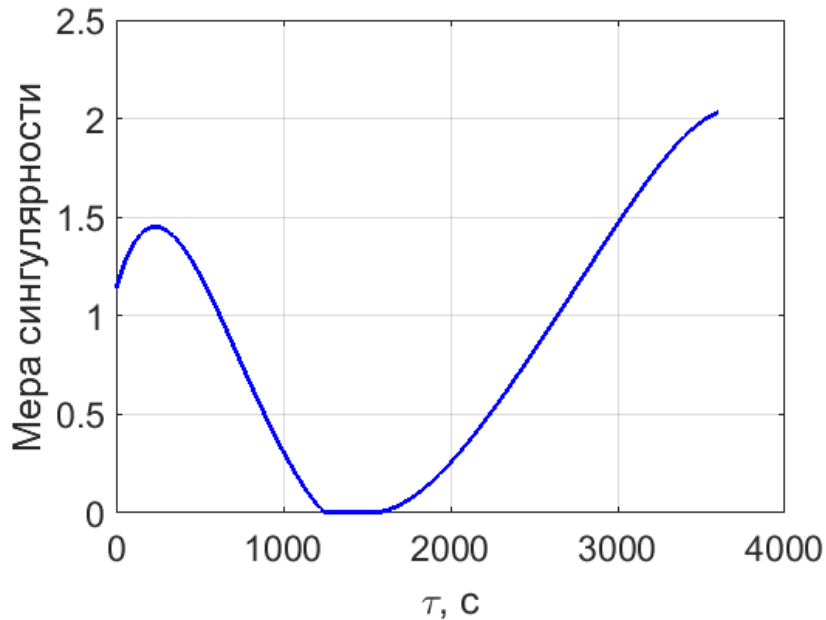
- $h = 0.013 \text{ Н} \cdot \text{м/сек}$
- $\dot{\theta}_{\max} = 0.1 \text{ рад/сек}$
- $m_{cr} = 0.05$
- Шаг интегрирования был выбран за 0.01 сек, а шаг управления - за 0.1 сек.
- Возмущение:  $\sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{\sigma_{new i}^2} - \frac{1}{\sigma_i^2} \right)$ , где  $\sigma_i$   $i$ -ое сингулярное число
- Если  $|\dot{\theta}_i| > \dot{\theta}_{\max}$ , то  $\dot{\theta} = \dot{\theta} \cdot \dot{\theta}_{\max} / \text{norm}(\dot{\theta})$



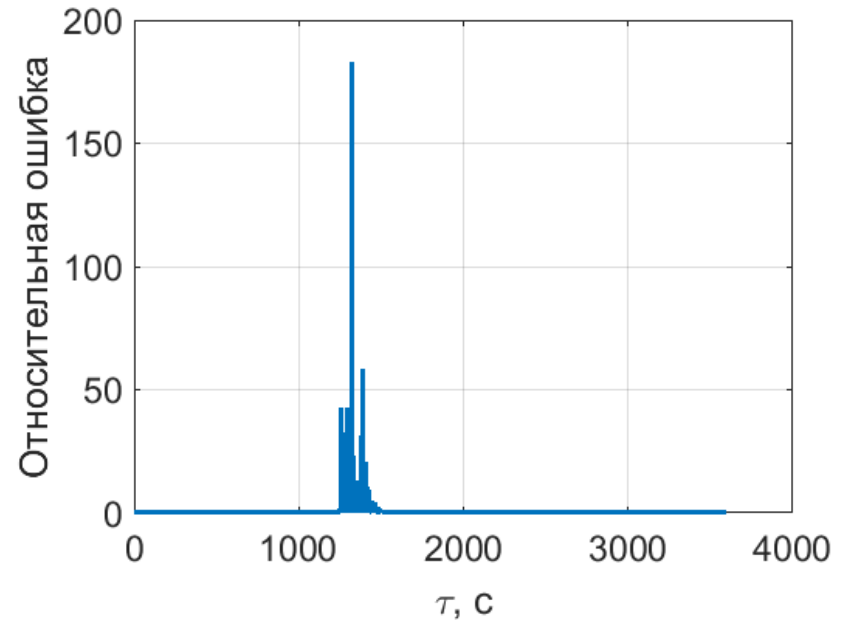
# Поведение метода Мура-Пенроуза

$\theta = (\pi/2 \quad \pi/8 \quad \pi/2 \quad \pi/2)^T$  - начальное положение осей корданов гироудинов

$T = (-10 \quad 4 \quad 12)^T \cdot 10^{-6}$  - внешний момент силы



Мера сингулярности

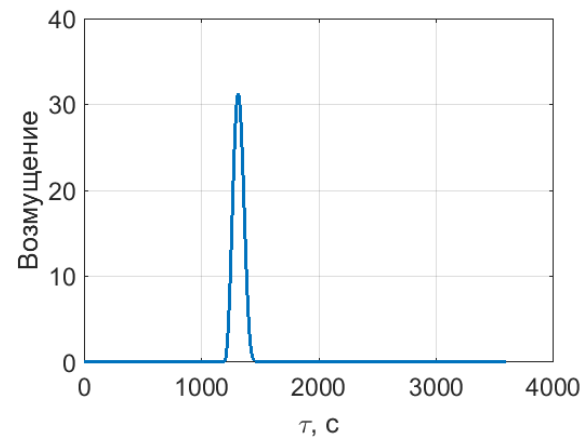


Относительная ошибка управления

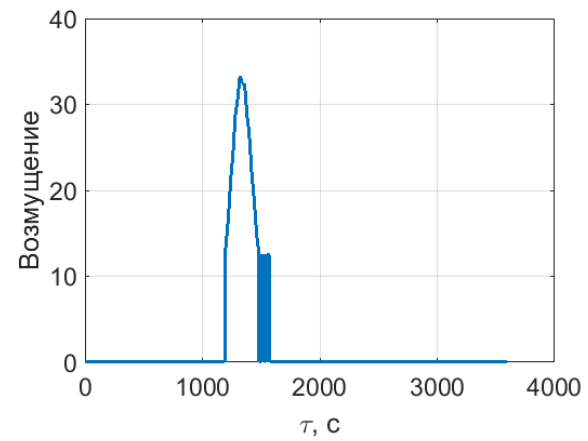


# Возмущения матриц системы

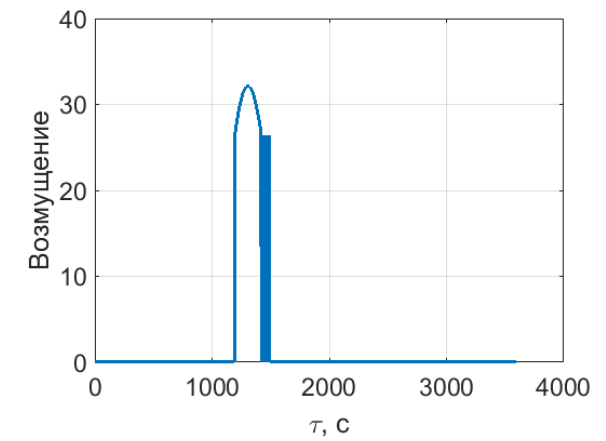
Ниже представлены возмущения матриц системы



Singular Robust



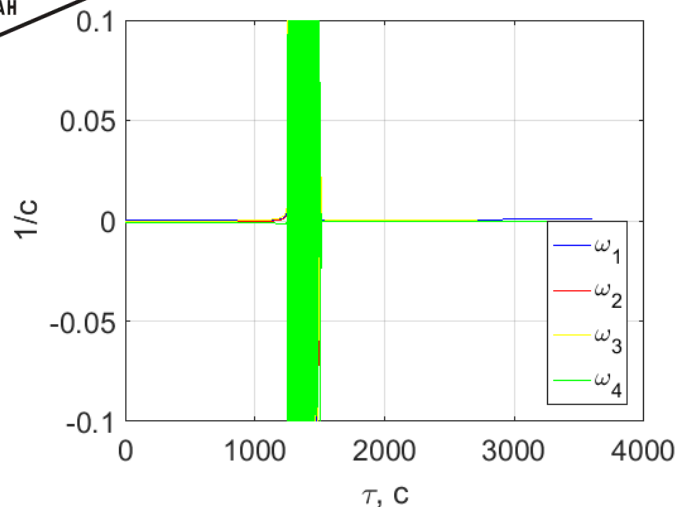
Generalized Singular Robust



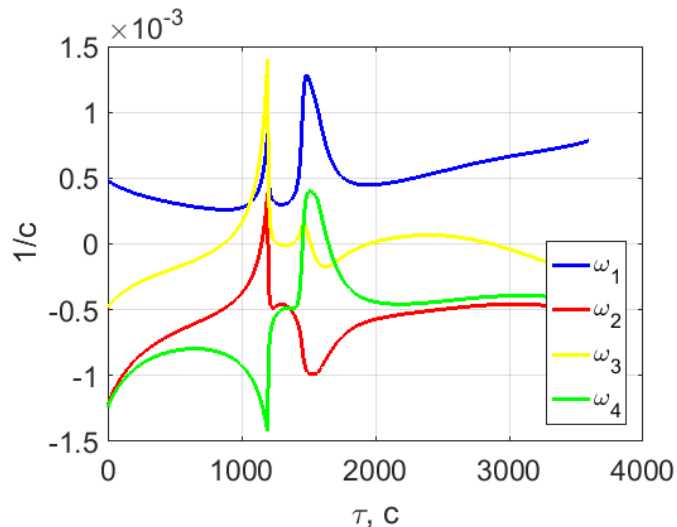
SVD-разложение



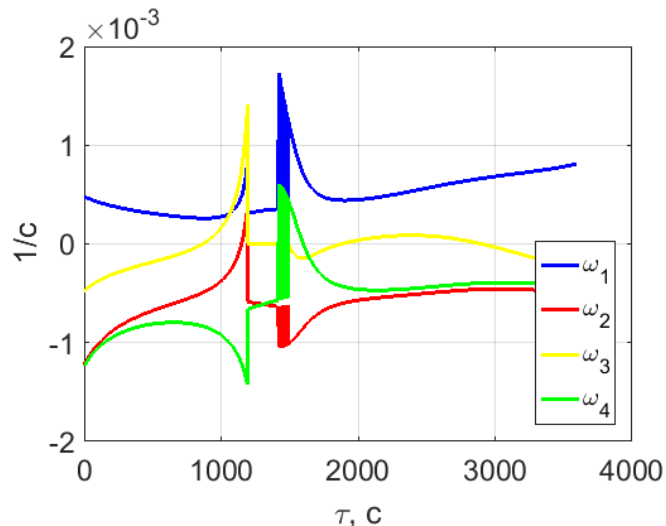
# Угловые скорости осей гиросдинов



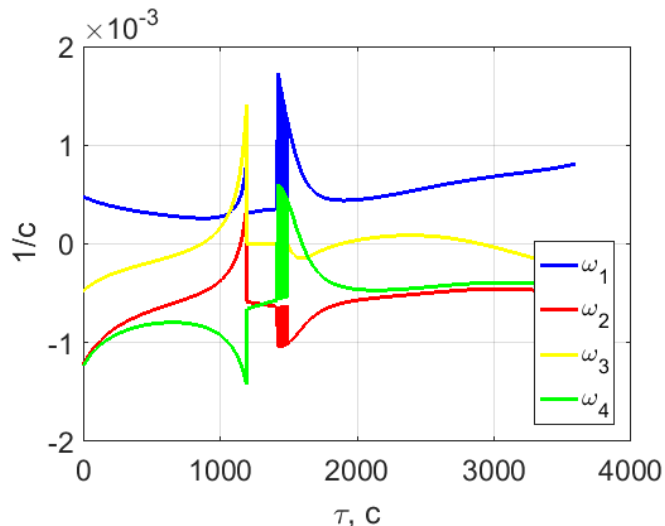
Мур-Пенроуз



Singular Robust



SVD-разложение



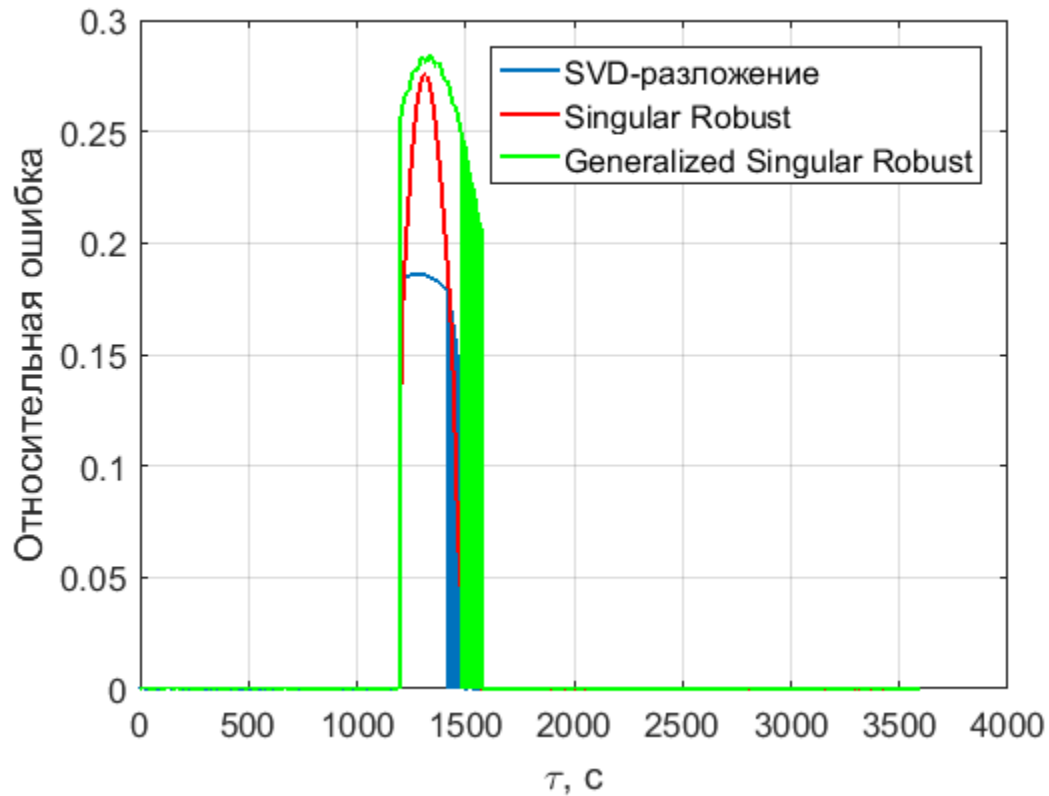
Generalized Singular Robust





# Относительная ошибка

Ниже представлена относительная ошибка в реализации момента управления.

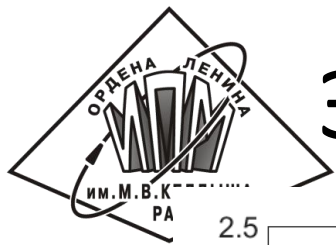




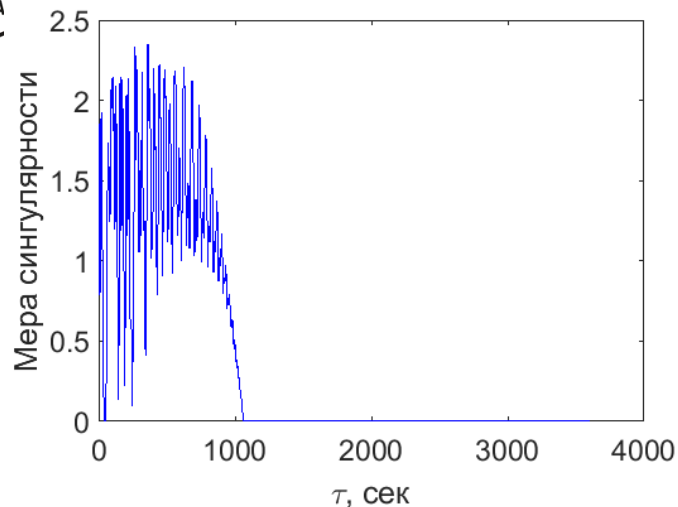
# Стабилизация в орбитальных осях

Параметры моделирования:

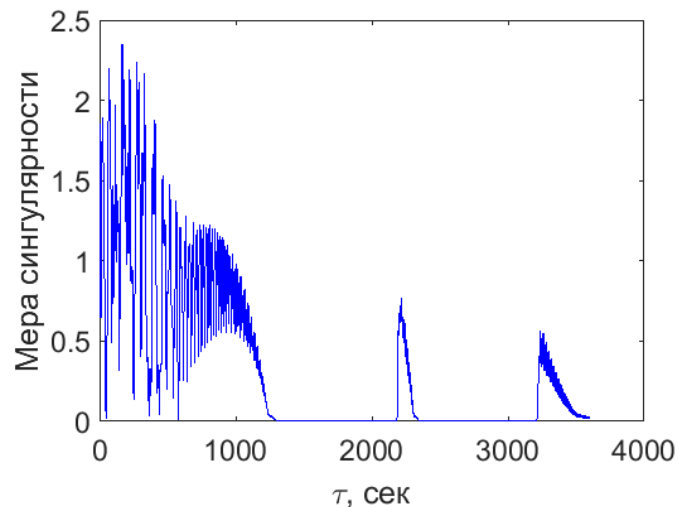
- Большая полуось орбиты спутника -  $6.73 \cdot 10^6$  м;
- Эксцентриситет орбиты спутника - 0.008;
- Долгота восходящего узла орбиты спутника - 1 рад;
- Наклонение орбиты спутника - 0.5 рад;
- Аргумент перицентра орбиты спутника -  $\pi$  рад;
- Тензор инерции спутника в ССК –  $J = \begin{pmatrix} 1.0255 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5393 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8172 \end{pmatrix}$ ;
- Кватернион начальной ориентации ССК отн. ИСК  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;
- Начальная абсолютная угловая скорость -  $\boldsymbol{\omega} = (1 \ 2 \ 3) \cdot 10^{-4}$  рад/с;
- Начальное положение гироскопов  $\boldsymbol{\theta}_0 = [0 \ \pi \cdot 4/3 \ \pi \cdot 2/3 \ \pi]$ .
- Кватернион конечной ориентации ОСК отн. ССК  $\mathbf{q}_0 = (0.9603 \ 0.2016 \ 0.1624 \ 0.1034)$
- $h = 0.056$  Н·м/сек



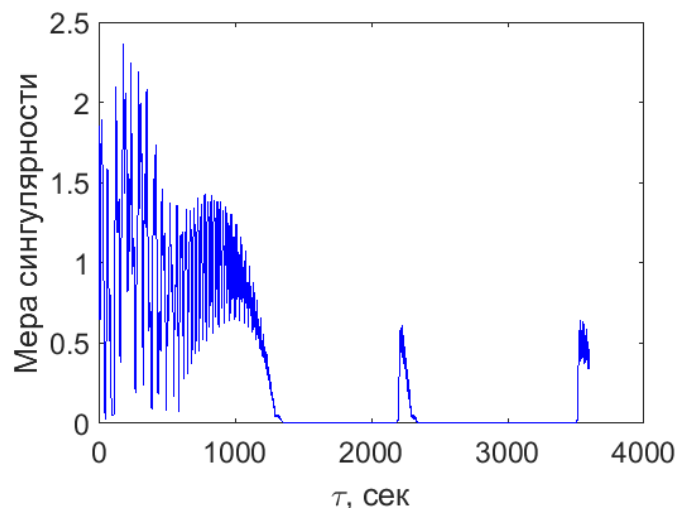
# Эволюция мер сингулярности



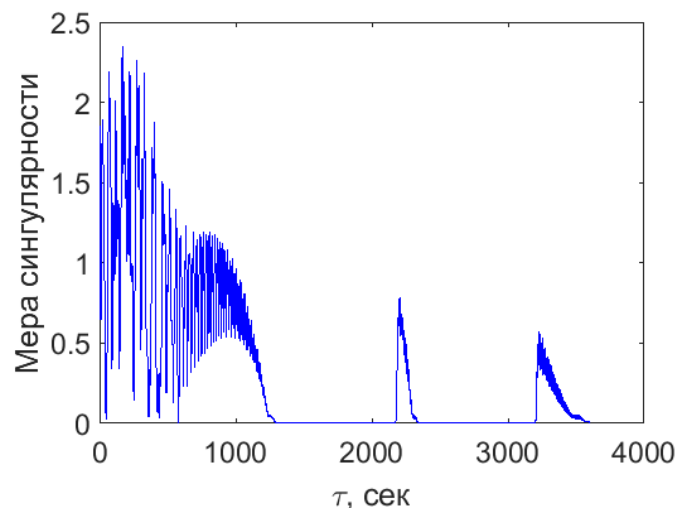
Мур-Пенроуз



Singular Robust



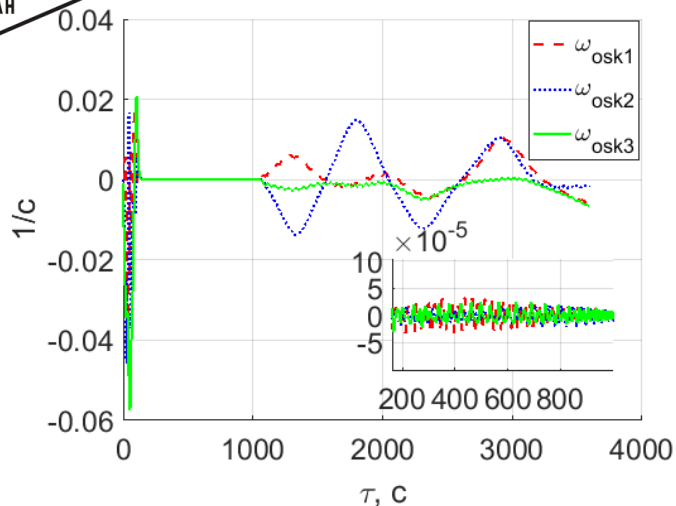
SVD-разложение



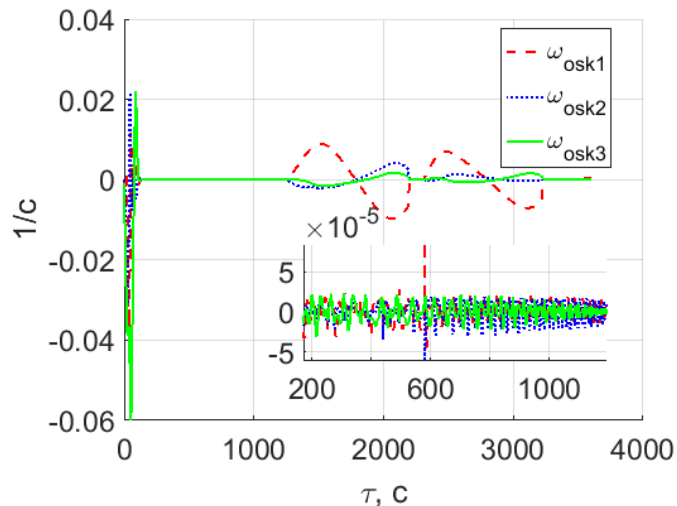
Generalized Singular Robust



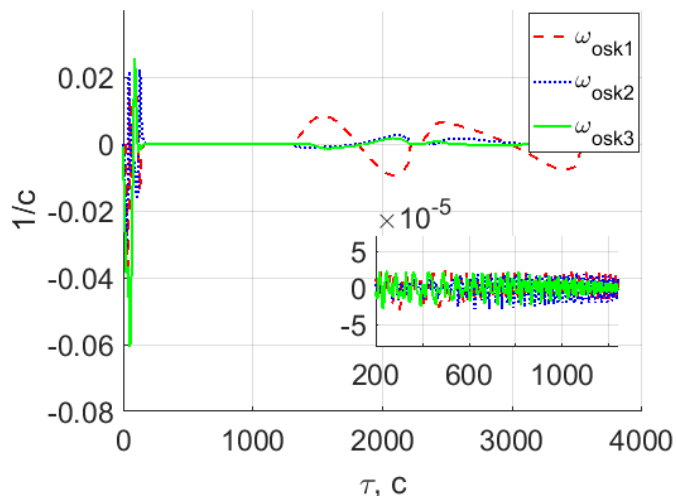
# Компоненты угловых скоростей спутника в ОСК



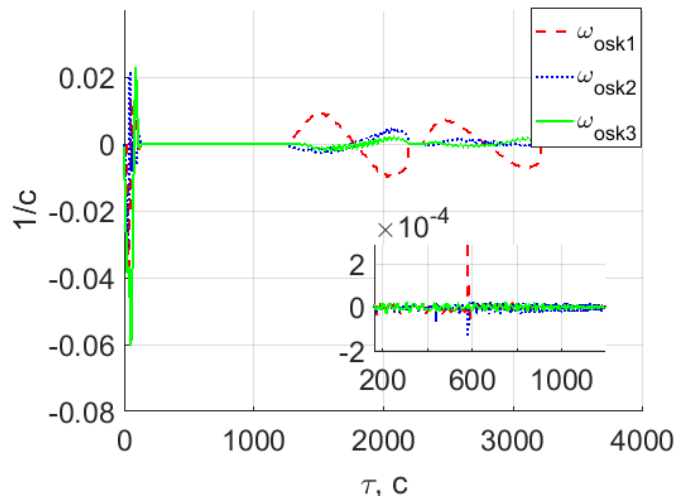
Мур-Пенроуз



Singular Robust



SVD-разложение



Generalized Singular Robust



# Заключение

В работе представлено сравнение 4-ех методов управления для 4-угольной пирамидальной конфигурации гиродинов.

Показано, что наиболее предпочтительным, с точки зрения выдачи управляющего момента, является метод SVD-разложения.

С точки зрения вычислительной сложности наиболее предпочтительным является метод SR.

Всегда рекомендуется использование нуль-движения, поскольку оно помогает избегать внутренние сингулярности.