



Оптимизация выбора траекторий наноспутников с солнечными рефлекторами для построения изображения в небе

Кирилл Чернов, Данил Иванов

**Московский физико-технический институт,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН**

63-я научная конференция МФТИ

Содержание работы

- Постановка задачи
- Алгоритм управления
- Оптимизация относительных перелетов
- Численное исследование
- Заключение

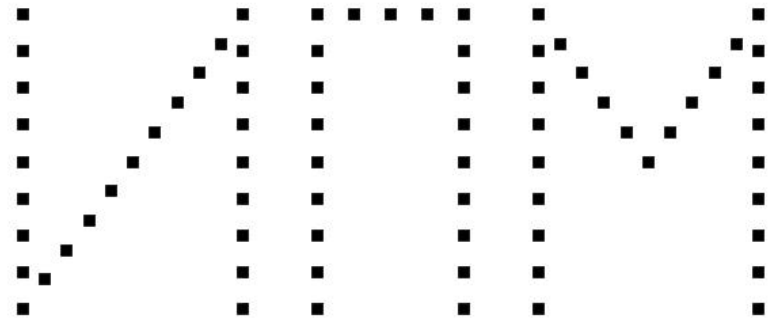
Постановка задачи

Дано:

- Изображение
- Зеркало-парус 4×4 м
- Кластерный запуск с интервалом Δt
- Низкая околоземная орбита

Требуется:

Построить управление с помощью аэродинамических сил для вывода спутников на опорные относительные траектории с целью формирования изображения



Пример требуемого изображения

Уравнения Хилла–Клохесси–Уилтшира

Линеаризованные уравнения относительного движения в ОСК [1]

$$\begin{cases} \ddot{x}_{ij} + 2\omega\dot{z}_{ij} = u_x^{ij} \\ \ddot{y}_{ij} + \omega^2 y_{ij} = u_y^{ij} \\ \ddot{z}_{ij} - 2\omega\dot{x}_{ij} - 3\omega^2 z_{ij} = u_z^{ij} \end{cases}$$

Для свободного движения решение имеет вид

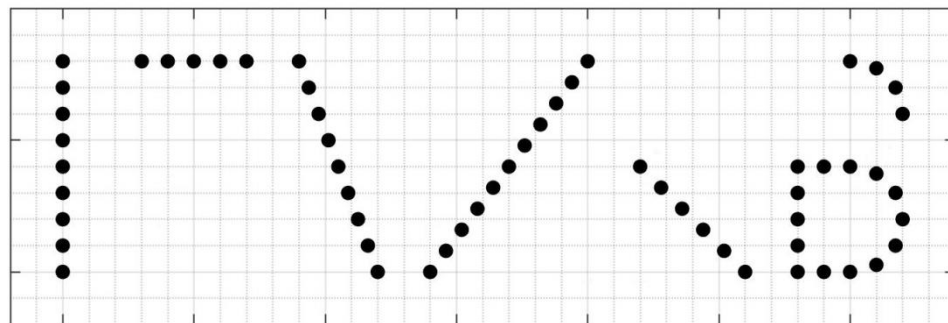
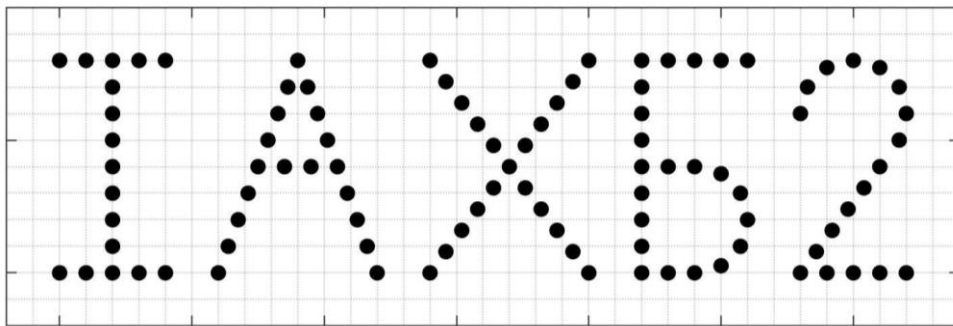
$$\begin{cases} x_{ij}(t) = -3C_1^{ij}\omega t + 2C_2^{ij}\cos(\omega t) - 2C_3^{ij}\sin(\omega t) + C_4^{ij} \\ y_{ij}(t) = C_5^{ij}\sin(\omega t) + C_6^{ij}\cos(\omega t) \\ z_{ij}(t) = 2C_1^{ij} + C_2^{ij}\sin(\omega t) + C_3^{ij}\cos(\omega t) \end{cases}$$

[1] Hill, G.W. Researches in Lunar Theory //

American Journal of Mathematics, 1878. Vol. 1. Pp. 5–26.

Построение опорных относительных траекторий

- Разбиение букв на элементы:
прямые и дуги окружностей
- Пикселизация



Построение опорных относительных траекторий

- Условие того, что проекции траекторий на плоскость, перпендикулярную взгляду наблюдателя, – окружности:

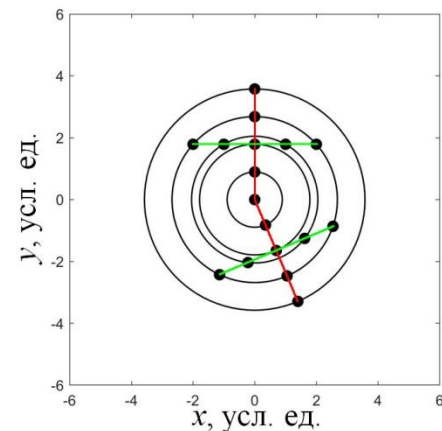
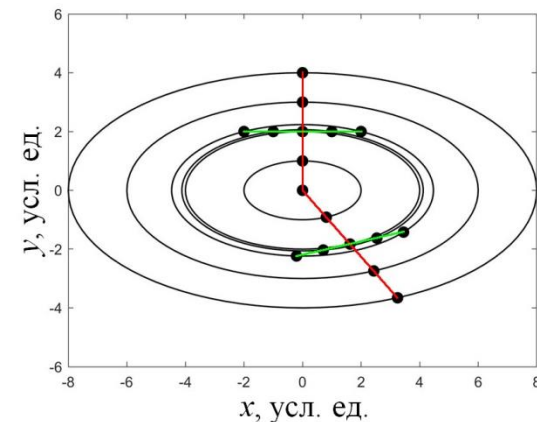
$$x_{ij}^2(t) + y_{ij}^2(t) = x_{ij}^2(0) + y_{ij}^2(0)$$



- Условия на константы $C_1^{ij}, \dots, C_6^{ij}$



- Относительные траектории $\mathbf{x}_{ij}^{\text{des}}(t)$



Переход к криволинейным координатам

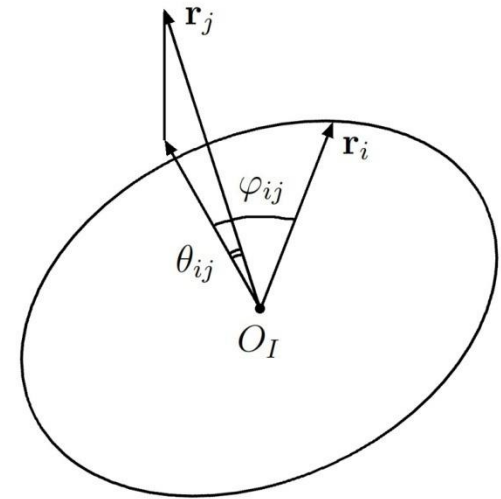
Для нахождения реальных относительных траекторий в криволинейных координатах [2]:

$\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ – радиус-вектора i -го и j -го спутников в ИСК

\mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j переводятся в ОСК i -го спутника

$$a_0 = |\mathbf{r}_i|$$

$$\varphi_{ij} = \text{atan} 2(x_j, z_j), \theta_{ij} = \arcsin \left(\frac{y_j}{r_j} \right), \delta r_{ij} = r_j - r_i$$



Уравнения движения в криволинейных координатах

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_{ij} = \mathbf{A}\mathbf{y}_{ij} + \mathbf{B}\mathbf{w}^{ij} \\ \dot{\mathbf{y}}_{ij}^{\text{des}} = \mathbf{A}\mathbf{y}_{ij}^{\text{des}} \end{cases}$$

$$\mathbf{y}_{ij} = \begin{bmatrix} \varphi_{ij} & \theta_{ij} & \delta r_{ij} & \dot{\varphi}_{ij} & \dot{\theta}_{ij} & \dot{\delta r}_{ij} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\omega/a_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\omega a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построение управления

Линейно-квадратичный регулятор [3]

- Ошибки траектории $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{y}_{ij} - \mathbf{y}_{ij}^{\text{des}}$
- Функционал $J = \int_0^{+\infty} (\mathbf{d}_{ij}^T \mathbf{Q} \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{w}_{ij}^T \mathbf{R} \mathbf{w}_{ij}) dt \rightarrow \min$
- Решение $\mathbf{w}^{ij} = \mathbf{K} \mathbf{d}_{ij}, \quad \mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$
- Уравнение Риккати $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$

Усреднение управления

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j \in J_i} \mathbf{u}^{ij} / N_{J_i}, \quad J_i = \{j : |\mathbf{e}_{ij}^{\text{rad}}| > \text{Err}\}, \quad N_{J_i} = |J_i|$$

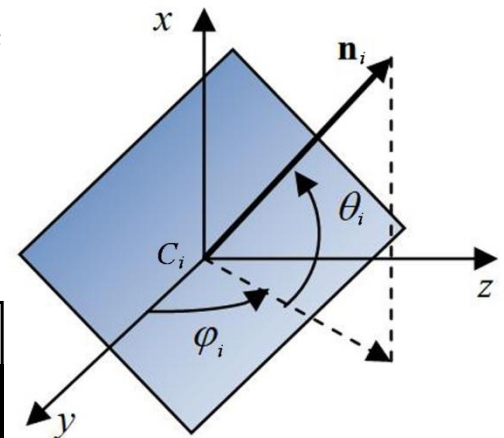
Модель аэродинамической силы

$$\mathbf{f}_i = -\frac{1}{m_i} \rho(\mathbf{r}_i) v_i^2 S_i \left[(1 - \varepsilon)(\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i) \mathbf{e}_v + 2\varepsilon(\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i)^2 \mathbf{n}_i + (1 - \varepsilon) \frac{v}{v_i} (\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \right]$$

- Моделируются сила сопротивления и подъемная сила
- Параметры ε и $\eta = v/v$ оценены В.В. Белецким [4]
- Подъемная составляющая на порядок меньше силы сопротивления

Вектор силы в ОСК

$$\mathbf{f}_i = k \begin{bmatrix} -2\varepsilon(\sin \theta_i)^3 + \eta(\varepsilon - 1)(\sin \theta_i)^2 + (\varepsilon - 1) \sin \theta_i \\ -\cos \theta_i \sin \theta_i (\eta - \varepsilon\eta + 2\varepsilon \sin \theta_i) \cos \varphi_i \\ -\cos \theta_i \sin \theta_i (\eta - \varepsilon\eta + 2\varepsilon \sin \theta_i) \sin \varphi_i \end{bmatrix}$$



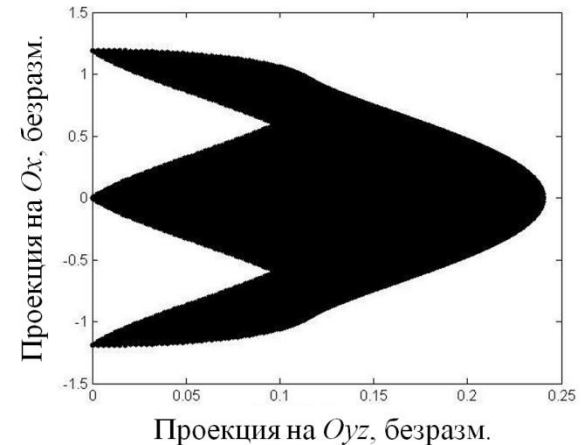
Углы ориентации
отражателя

[4] Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова Думка, 1984. 187 с.

Модель аэродинамической силы

Ограничения на величину аэродинамической силы [5]

$$\mathbf{f}_i = \begin{cases} -\mathbf{u}_{\max}^x, & \text{if } u_i^x > u_{\max}^x; \\ -\mathbf{u}_{\max}^{yz}, & \text{if } 0 < u_i^x \leq u_{\max}^x \\ & \text{and } \sqrt{(u_i^y)^2 + (u_i^z)^2} > u_{\max}^{yz}; \\ -\mathbf{u}_i, & \text{if } 0 < u_i^x \leq u_{\max}^x \\ & \text{and } \sqrt{(u_i^y)^2 + (u_i^z)^2} \leq u_{\max}^{yz}; \\ 0, & \text{if } u_i^x \leq 0; \end{cases}$$



Область допустимых значений управления

[5] Иванов Д.С., Кушнирук М.С. Исследование алгоритма управления пространственным движением группы спутников с помощью аэродинамической силы. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017. № 53. 32 с.

Оптимизация

$$\mathbf{x}_{ki}^{\text{real}}, \mathbf{x}_{kj}^{\text{des}}$$

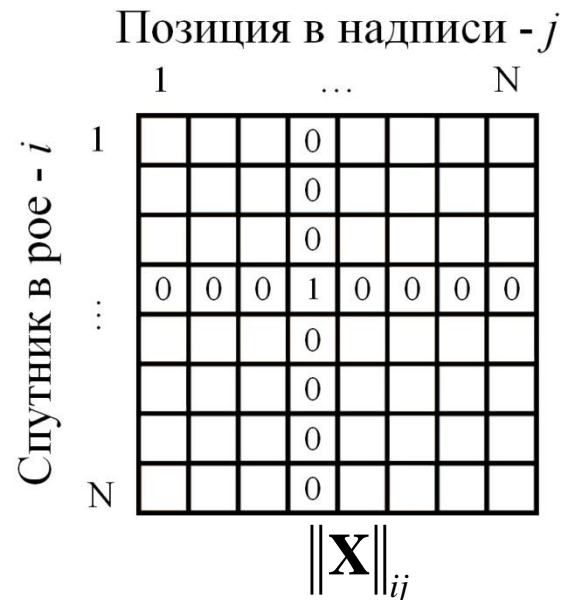
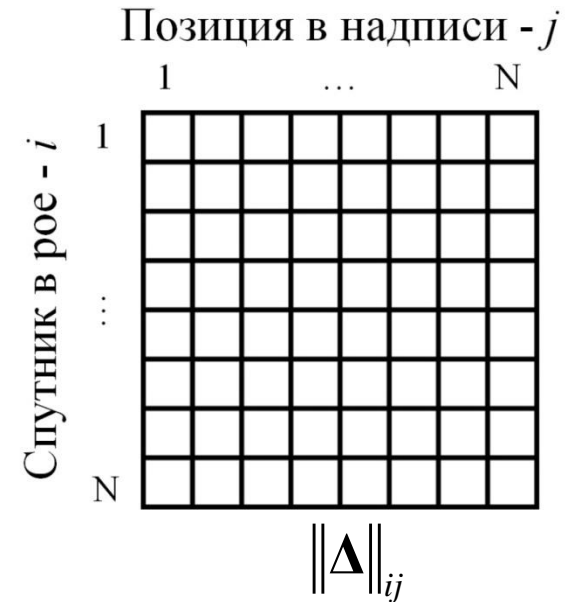
$$\Delta_{ij} = \sqrt{(\mathbf{x}_{kj}^{\text{des}} - \mathbf{x}_{ki}^{\text{real}})^T \mathbf{Q}_1 (\mathbf{x}_{kj}^{\text{des}} - \mathbf{x}_{ki}^{\text{real}})}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_{ij} = \left| \mathbf{r}_{kj}^{\text{des}} - \mathbf{r}_{ki}^{\text{real}} \right|$$

«Задача о назначениях»

$$J_1 = \sum_{i=1}^N \Delta_{ij(i)} \rightarrow \min_{j(i)}$$

Частный случай задачи
линейного программирования



ОПТИМИЗАЦИЯ

$$\sum_{i=1}^N \Delta_{ij(i)} \rightarrow \min_{j(i)} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1 \rightarrow \min & \mathbf{c}_1 = [\Delta_{11}, \dots, \Delta_{1N}, \Delta_{21}, \dots, \Delta_{2N}, \dots]_{N^2}^T \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{e}_1 \leq \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{e}_2 & \mathbf{x}_1 = [\mathbf{X}_{11}, \dots, \mathbf{X}_{1N}, \mathbf{X}_{21}, \dots, \mathbf{X}_{2N}, \dots]_{N^2}^T \end{cases}$$

$$\mathbf{b}_1 = [1 \dots 1]_{2N}^T$$

$$\mathbf{e}_1 = [0 \dots 0]_{N^2}^T$$

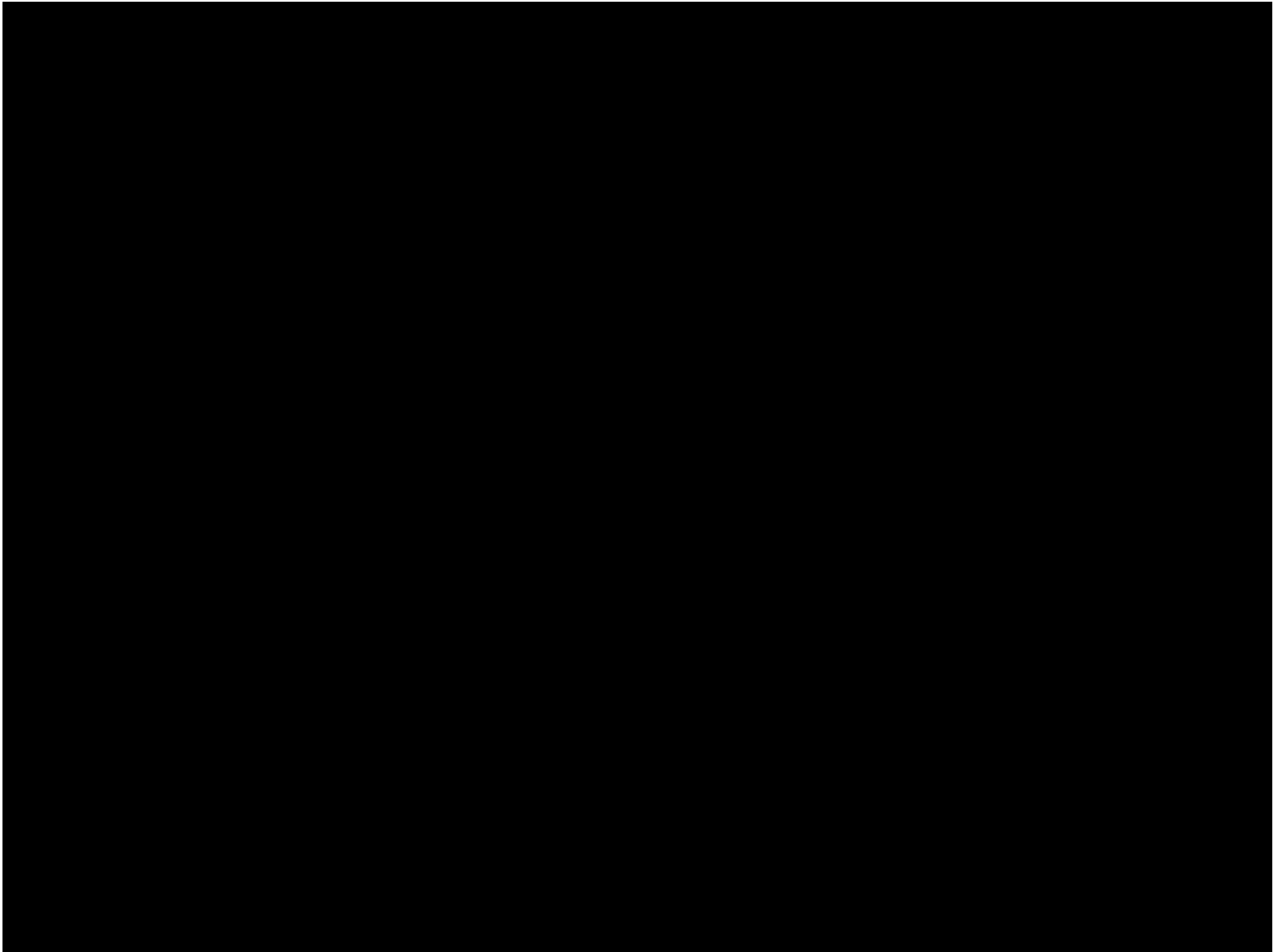
$$\mathbf{e}_2 = [1 \dots 1]_{N^2}^T$$

$$\mathbf{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \overbrace{1 & 1 & \dots & 1}^N & \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^N & \dots & \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^N \\ \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^N & \overbrace{1 & 1 & \dots & 1}^N & \dots & \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^N & \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^N & \dots & \overbrace{1 & 1 & \dots & 1}^N \\ \hline \overbrace{1 & 0 & \dots & 0}^N & \overbrace{1 & 0 & \dots & 0}^N & \dots & \overbrace{1 & 0 & \dots & 0}^N \\ \overbrace{0 & 1 & \dots & 0}^N & \overbrace{0 & 1 & \dots & 0}^N & \dots & \overbrace{0 & 1 & \dots & 0}^N \\ \overbrace{0 & 0 & \ddots & 0}^N & \overbrace{0 & 0 & \ddots & 0}^N & \dots & \overbrace{0 & 0 & \ddots & 0}^N \\ \overbrace{0 & 0 & \dots & 1}^N & \overbrace{0 & 0 & \dots & 1}^N & \dots & \overbrace{0 & 0 & \dots & 1}^N \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \vphantom{\mathbf{A}_1} \right\} N \\ \vphantom{\mathbf{A}_1} \right\} N$$

Параметры моделирования

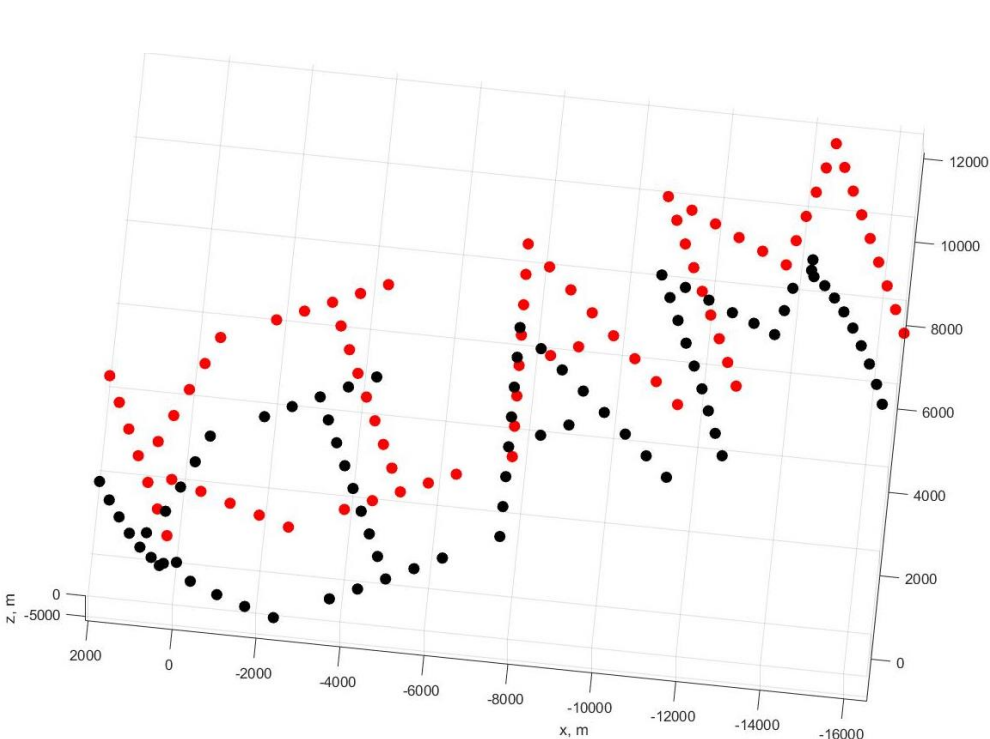
- Первая надпись «КИАМ»
- Вторая надпись «МИРТ»
- Число спутников 79
- Расстояние между спутниками 700 м
- Начальная высота орбиты 350 км
- Время моделирования 30 + 30 ч

Моделирование работы алгоритма

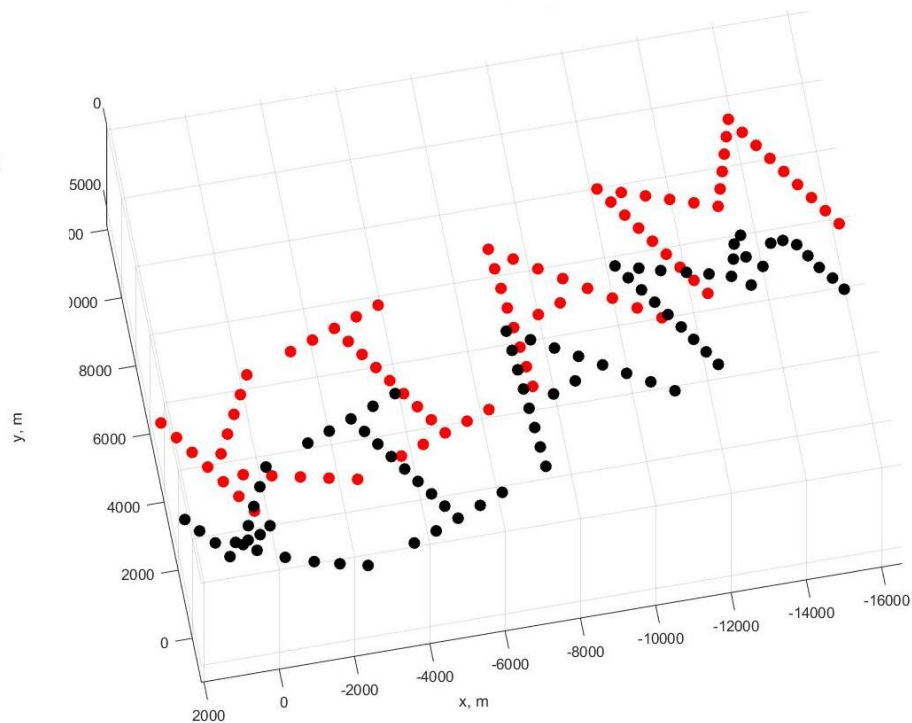


Относительное положение аппаратов перед изменением надписи

Без оптимизации



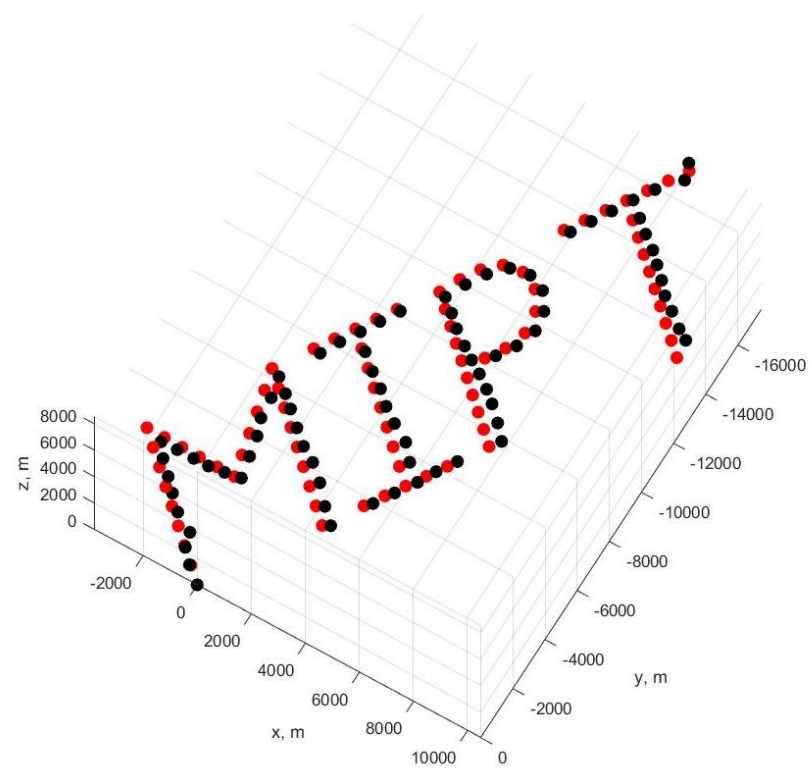
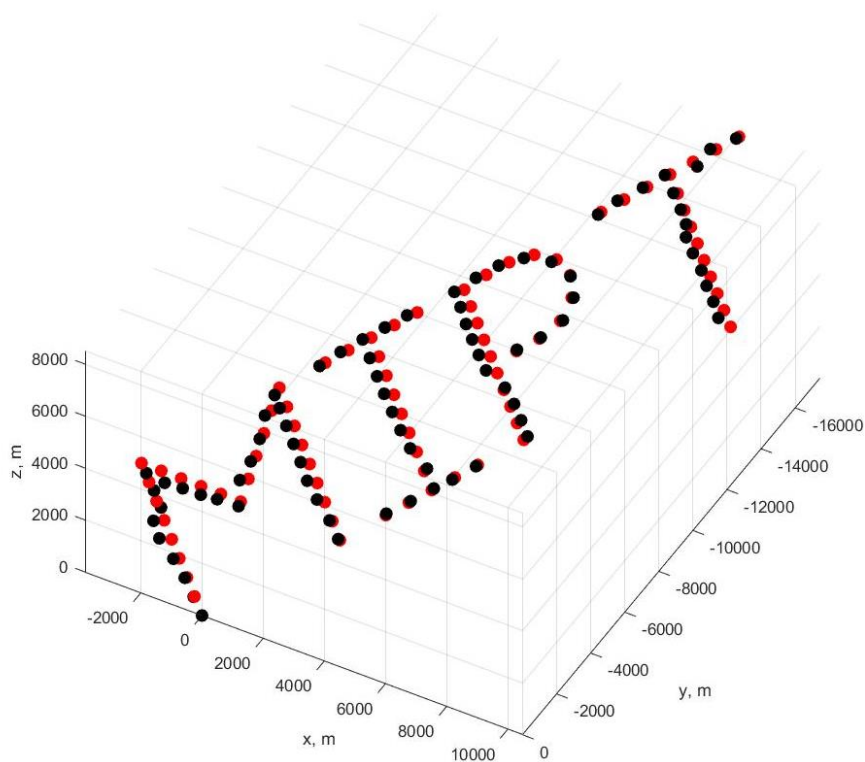
С оптимизацией



Конечное относительное положение аппаратов

Без оптимизации

С оптимизацией

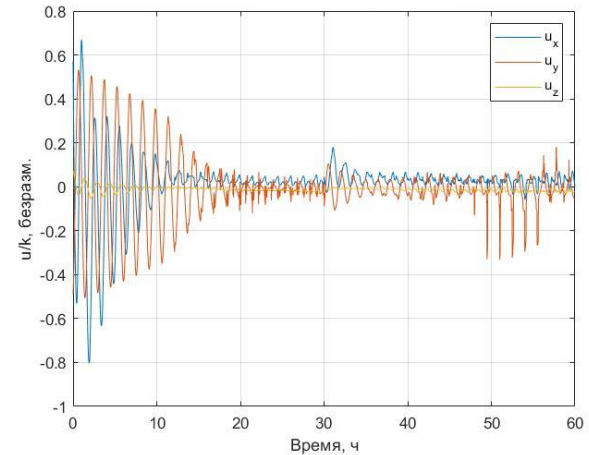
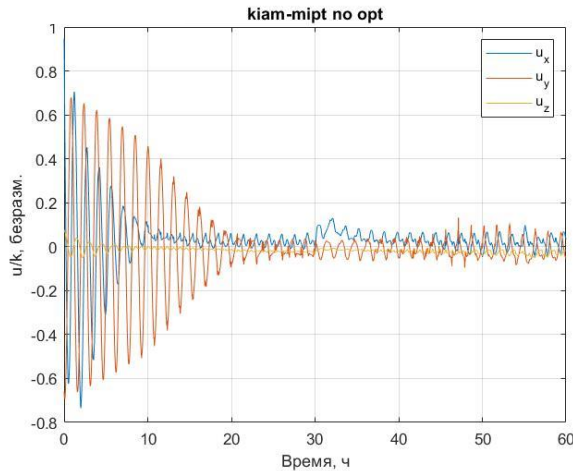


Расчетное и приложенное управление

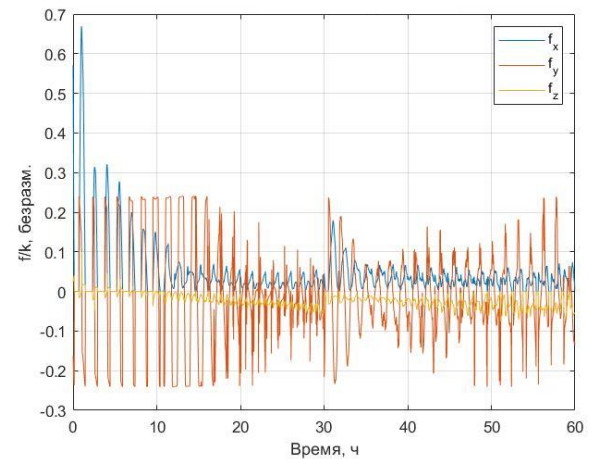
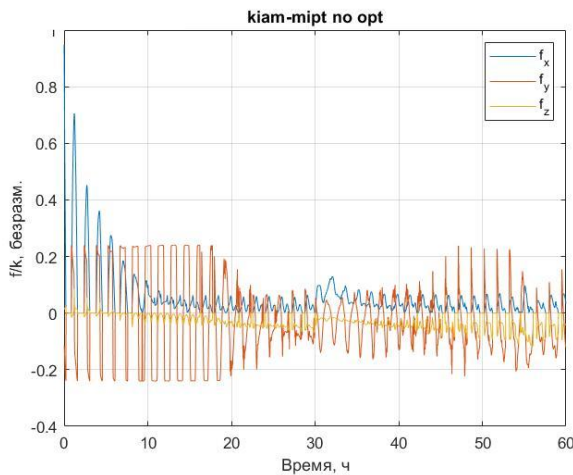
Без оптимизации

С оптимизацией

Расчетное



Приложенное

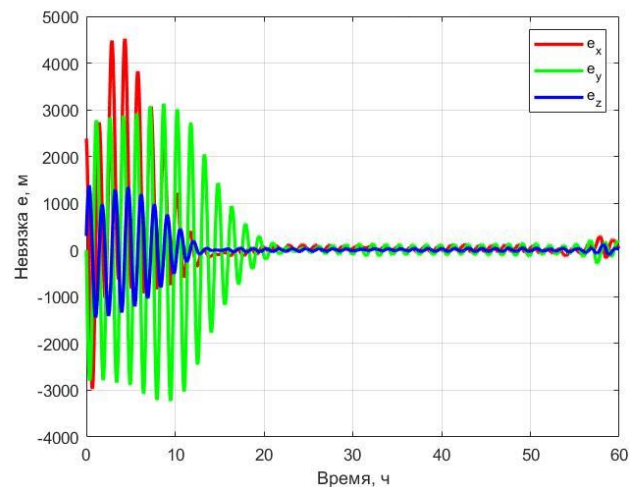
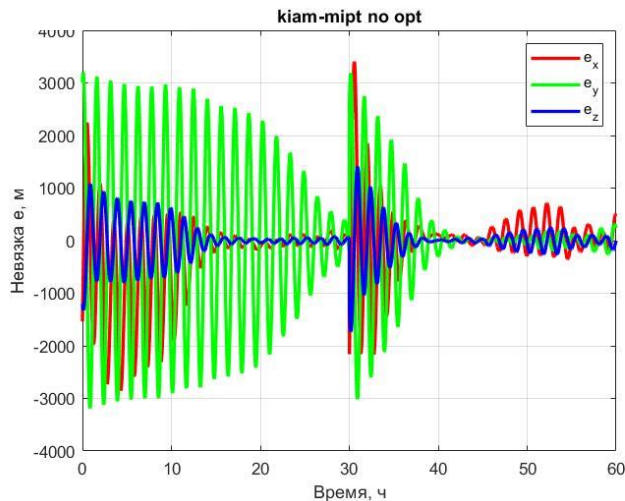


Ошибка траектории для выбранного спутника и средняя

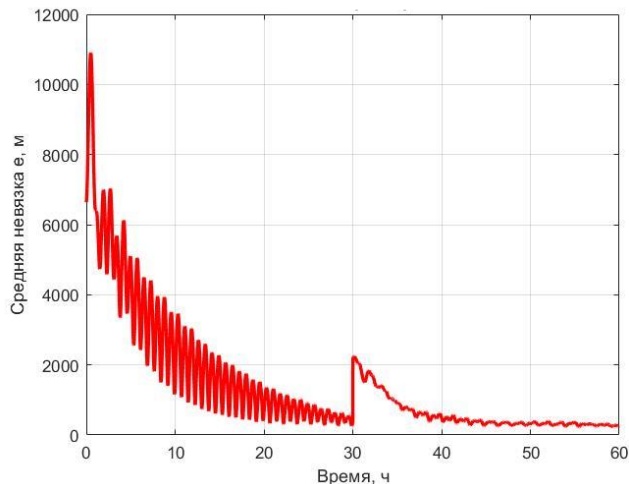
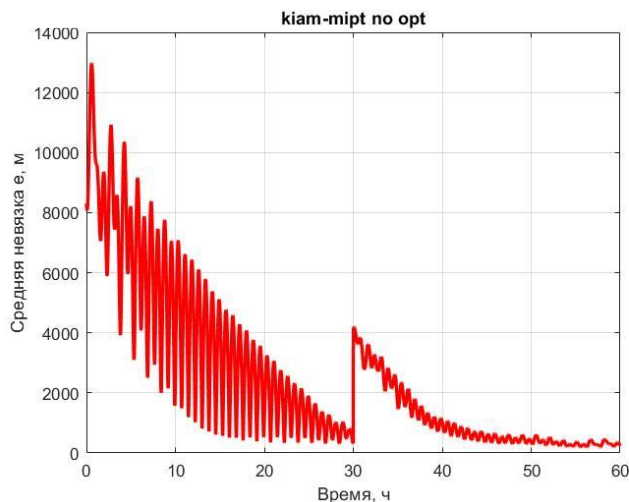
Без оптимизации

С оптимизацией

Невязка для
одного спутника



Средняя
невязка



Заключение

- Децентрализованное управление на основе аэродинамических сил позволяет сформировать требуемое изображение на низкой околоземной орбите
- Ограничения аэродинамической силы существенно влияют на работу алгоритма
- Оптимизация позволяет уменьшить невязку в момент перестроения, но конечное положение существенно не улучшается

Спасибо за внимание!