

63-я научная конференция МФТИ

Построение оптимальной траектории КА с использованием
регуляризованных уравнений движения

Корнеев К.Р., МФТИ

Трофимов С.П., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Исследование выполнено при финансовой поддержке
гранта Российского научного фонда (РНФ) 19-11-00256.



Содержание

- Введение
- Принцип максимума Понтрягина
- Метод
- Результаты

Малая тяга

Миссии, использовавшие двигатели с малой тягой



DeepSpace 1 и комета Борелли



Smart-1

Подходы к решению

- Прямые методы
- Непрямые методы

Метод продолжения (встречающиеся проблемы)

- Чувствительность к начальным условиям
- Сходимость к локальному минимуму
- Уравнения в декартовых координатах неустойчивы
- Существование ветвления решений

Принцип максимума Понтрягина

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n, a_1, a_2, \dots, a_r) \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n, a_1, a_2, \dots, a_r) \\ \dots \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n, a_1, a_2, \dots, a_r) \end{cases}$$

$$J = \int_a^b \psi(t, y_1, y_2, \dots, y_n, a_1, a_2, \dots, a_r) dt$$

$$H = -\psi(\dots) + \sum_{i, 1 \leq i \leq n} p_i f_i(\dots)$$

Постановка задачи

- КА оснащен двигателем малой тяги
- На движение КА влияет только центральное гравитационное поле Солнца

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_f \\ \mathbf{V}(t_f) - \mathbf{V}_f \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Задача сопровождения}$$

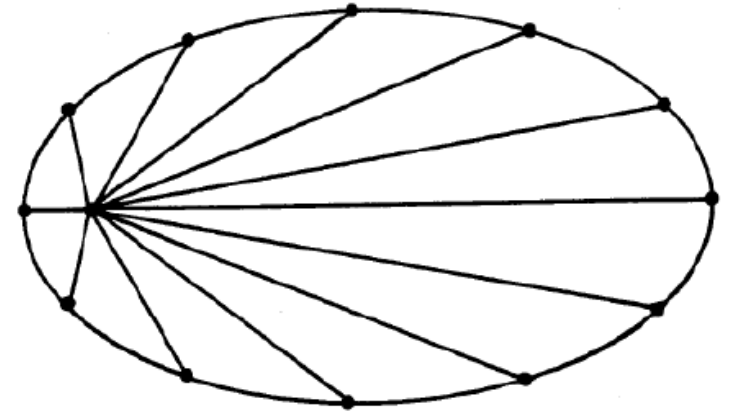
$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_f \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Задача пролёта}$$

Сглаживающие преобразования

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}$$

Преобразование Сундмана

$$dt = \frac{r}{\sqrt{-2h}} ds$$



Распределение точек орбиты равномерно по эксцентрической аномалии

Преобразование Кустаанхеймо-Штифеля

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = L(u)u \quad \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = 0 \longrightarrow \mathbf{u}'' + \frac{\mathbf{u}}{4} = 0$$

Функционалы

Квадратичный функционал

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{a}^2(t) dt \quad \mathbf{a} = L \left(-\frac{\mathbf{u}^2}{4h} \mathbf{p}_v + \mathbf{v} \left(2p_h - \frac{1}{h} \mathbf{p}_v^T \mathbf{v} \right) + p_\tau \frac{1}{(-2h)^{3/2}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right)$$

Функционал быстродействия

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad \boldsymbol{\lambda} = L \cdot \left(-\mathbf{p}_v \frac{\mathbf{u}^2}{4h} + \left(2p_h - \frac{\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{v}}{h} \right) \mathbf{v} + p_\tau \frac{1}{(-2h)^{3/2}} (4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{u}) \right)$$
$$\mathbf{a} = a_{max} \cdot \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\|\boldsymbol{\lambda}\|}$$

Оптимизационная задача

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_E, s = s_0$$

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_E, s = s_0$$

$$\|\mathbf{f}_{1,2}\| \rightarrow \min, s = s_f$$

В качестве переменных s_f, p_1, \dots, p_n

Ограничения

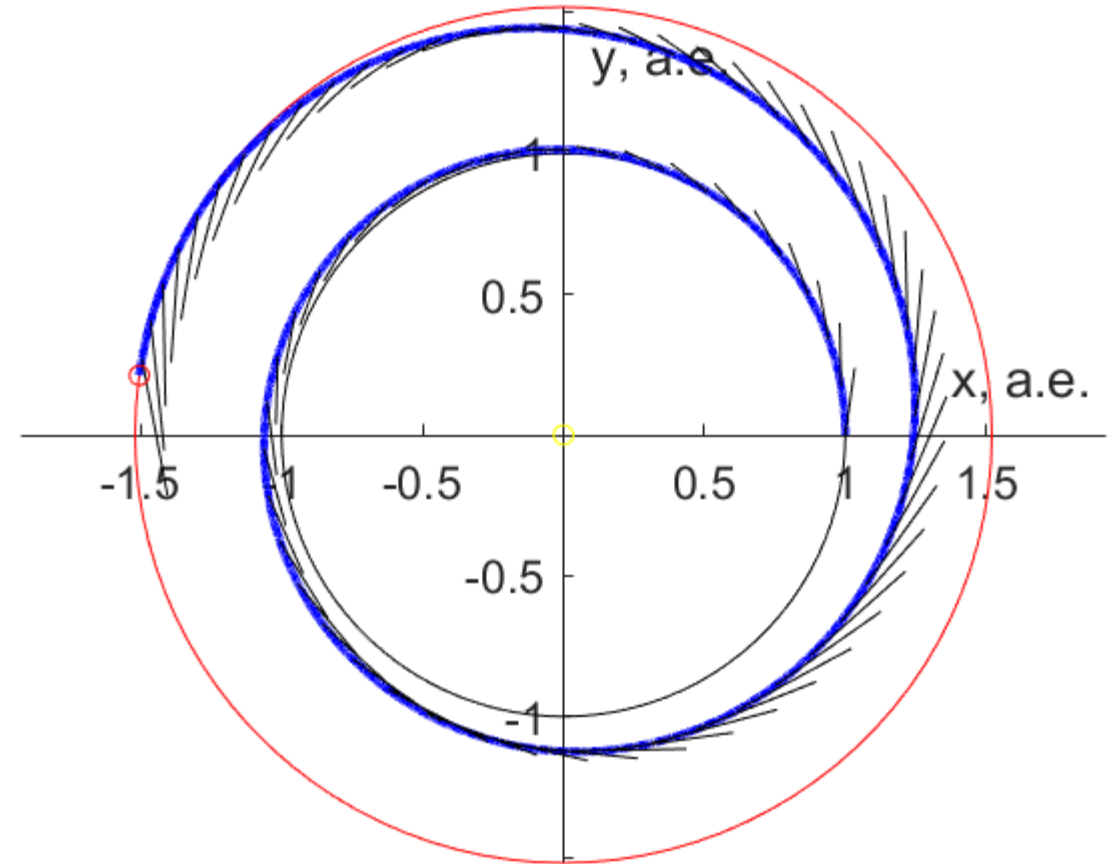
$$s_0 = 0$$

$$s_f \in [s_a, s_b]$$

$$p_i \in [p_a^i, p_b^i], s = 0$$

Нулевое начальное приближение

$$p_i = 0, s = s_0$$



Задача сопровождения с квадратичным функционалом

Численные результаты

Расчёты проводились в MATLAB

Использовался fmincon

- 'OptimalTolerance' – $1e-10$
- 'Algorithm' – interior point

Функционал	Задача	δr , км	δv , км/с	Δm , кг	Итерации	Вызов функции правых частей	Время работы
квадратичный	сопровождения	8.2	$1.9e-06$	56.9	165	2035	14.8
квадратичный	пролёта	$1.3e+02$	-	190.2	156	1925	13.3
быстродействия	сопровождения	$8.0e+01$	$3.8e-05$	124.7	381	4864	60.6
быстродействия	пролёта	$2.5e+02$	-	99.8	109	1594	99.4

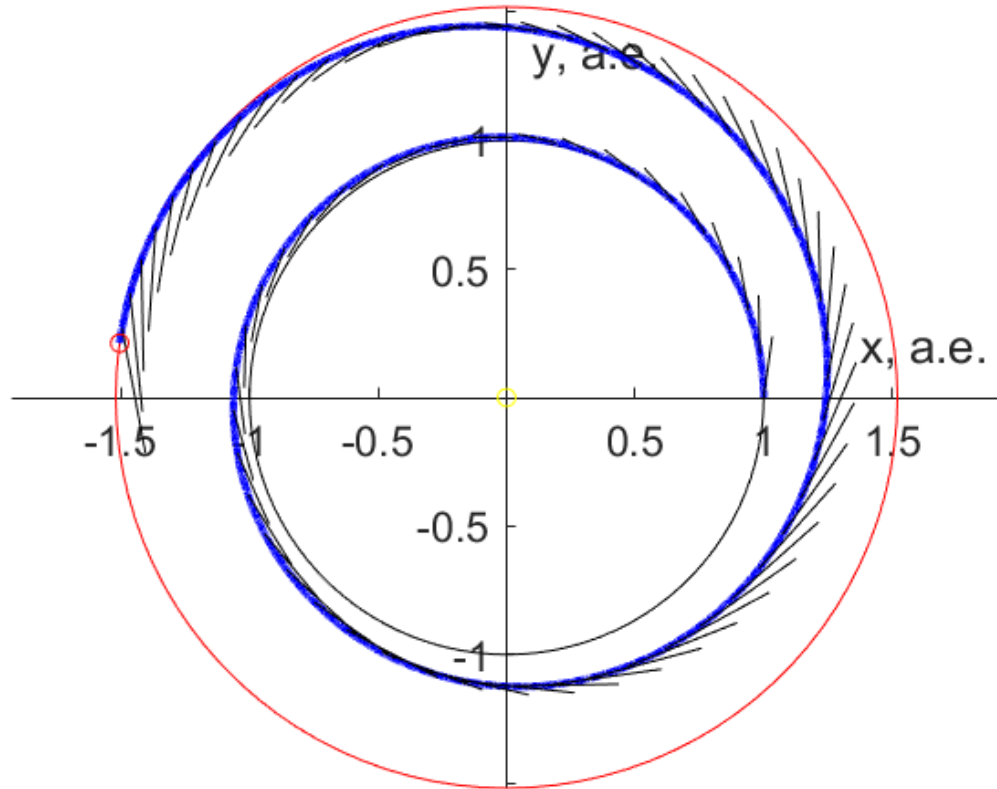
Планы на будущее

- Доработка оптимального по быстродействию решения
- Проверка устойчивости и сходимости
- Переход к `fsolve` вместо `fmincon`
- Сравнение чисел обусловленности матриц градиентов
- Оптимизация по линейному функционалу

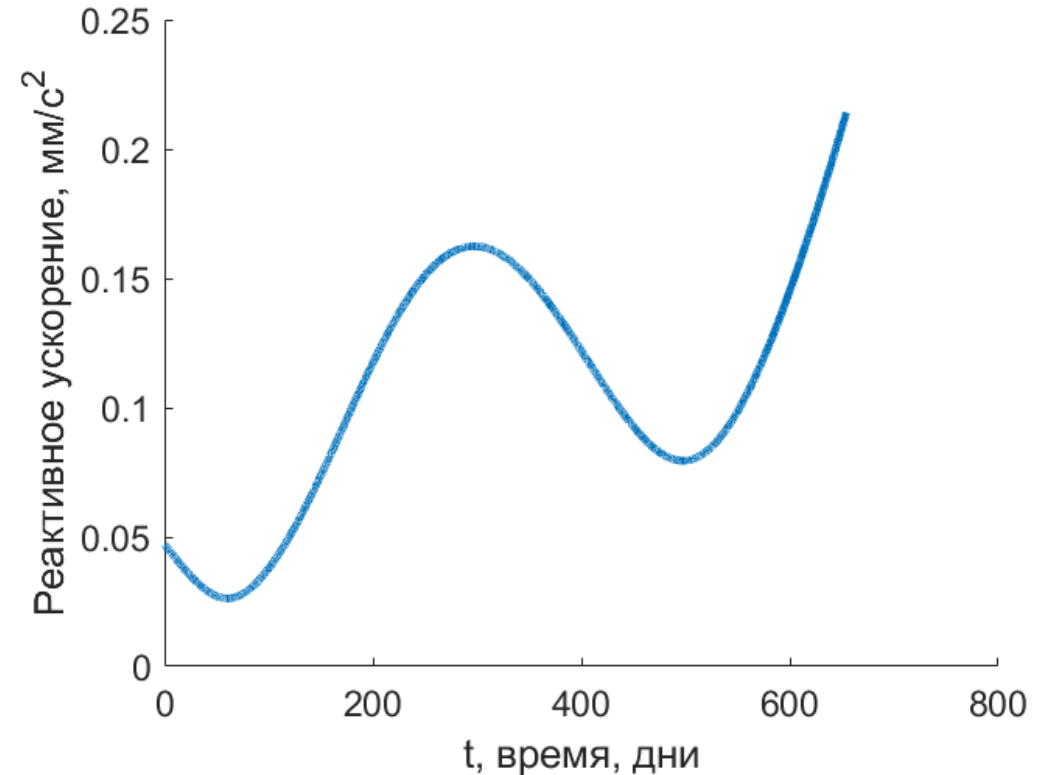
Спасибо за внимание

<https://github.com/KirillRnd/nir>

Задача сопровождения

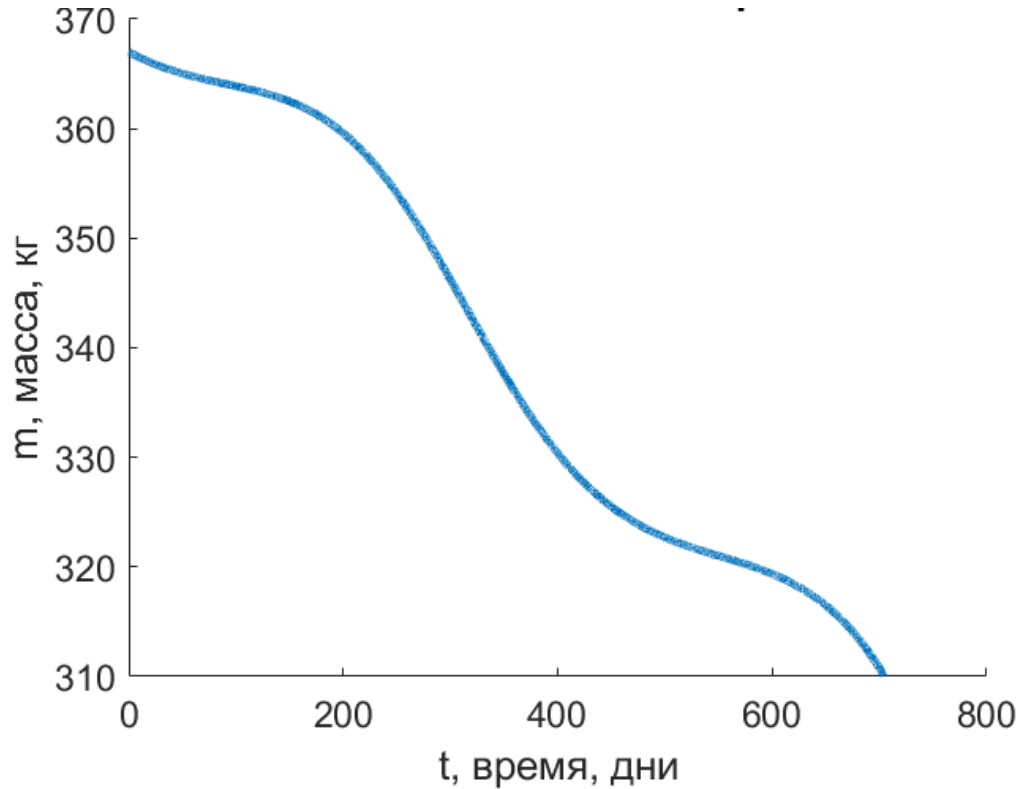


Задача сопровождения, квадратичный функционал

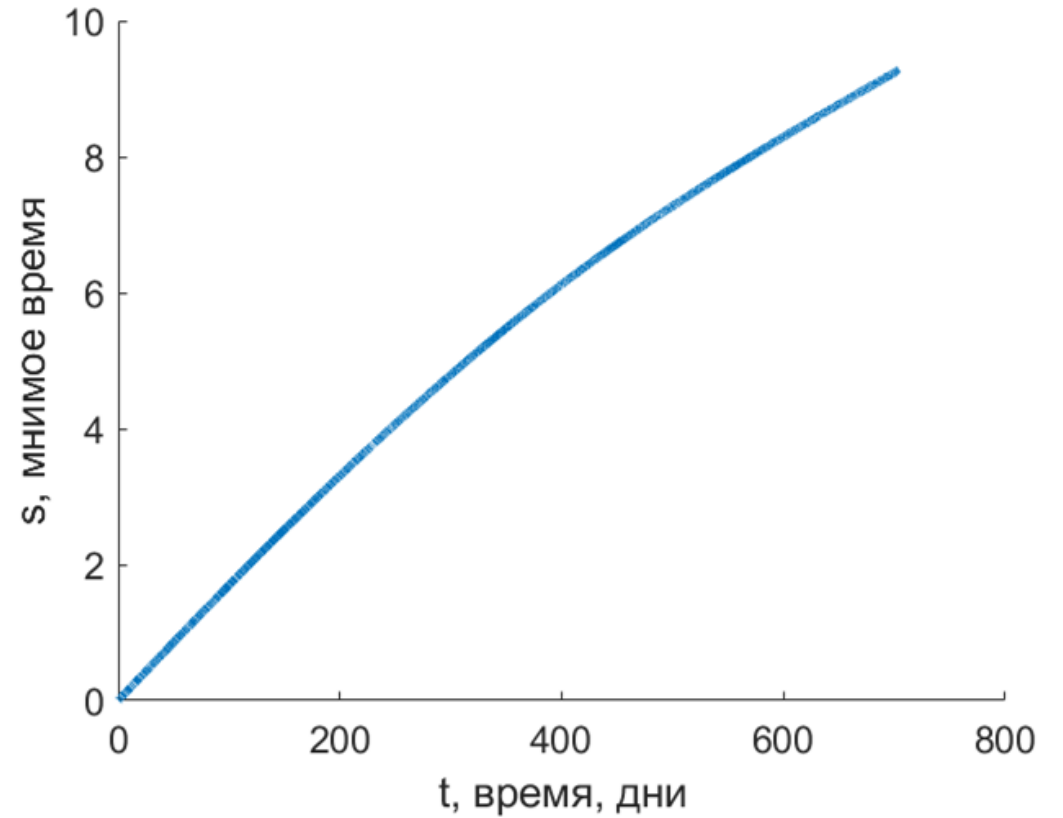


Зависимость величины управления от времени

Задача сопровождения

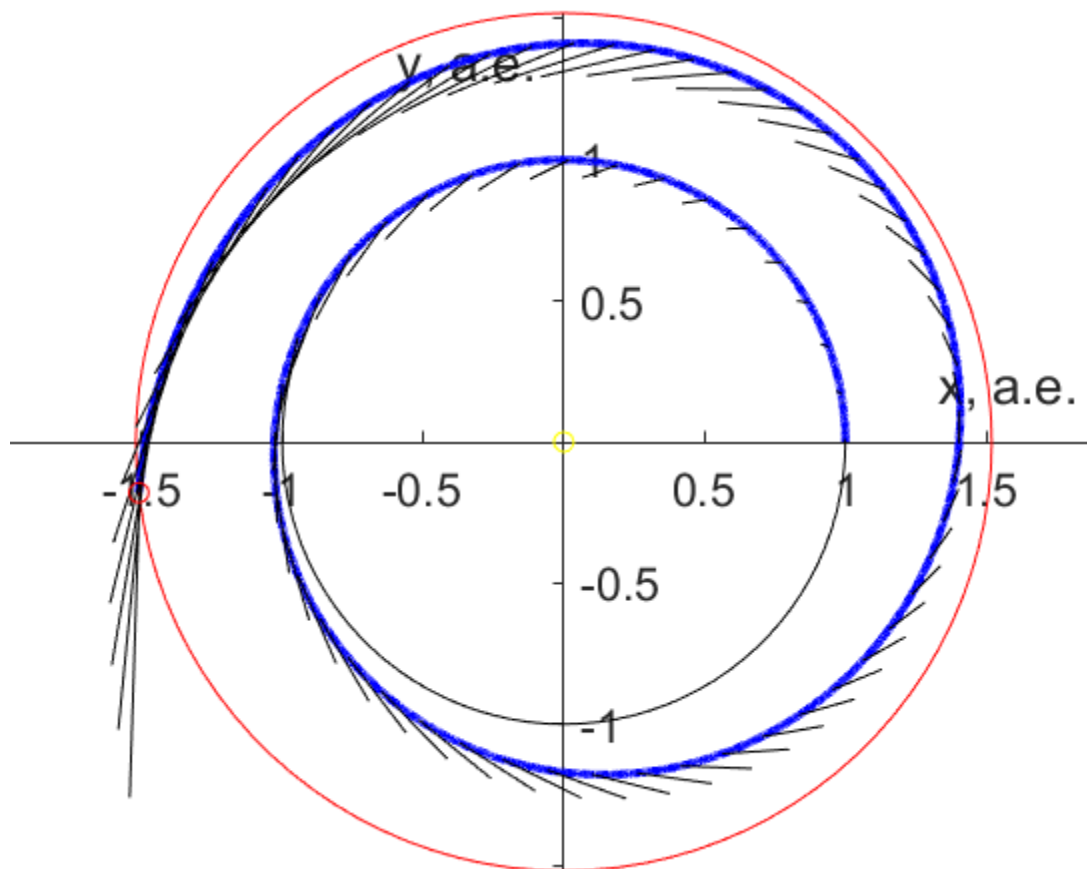


Зависимость массы от времени

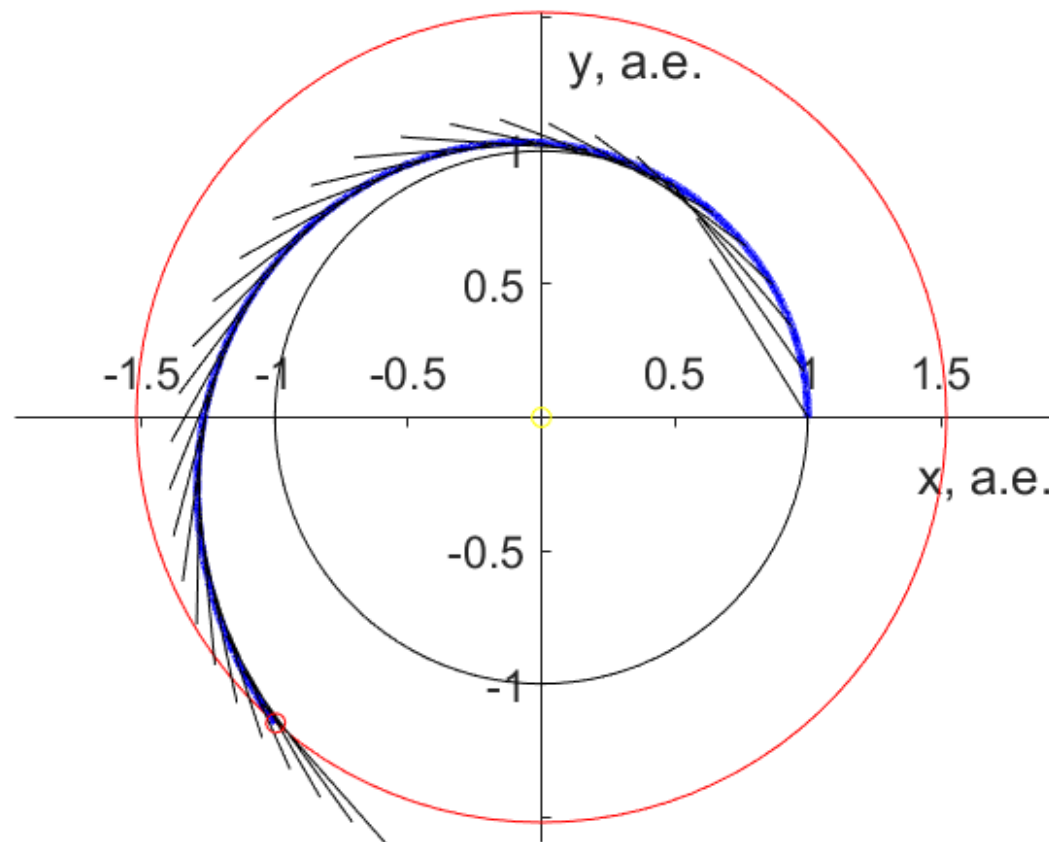


Связь физического времени и мнимого

Задача пролёта

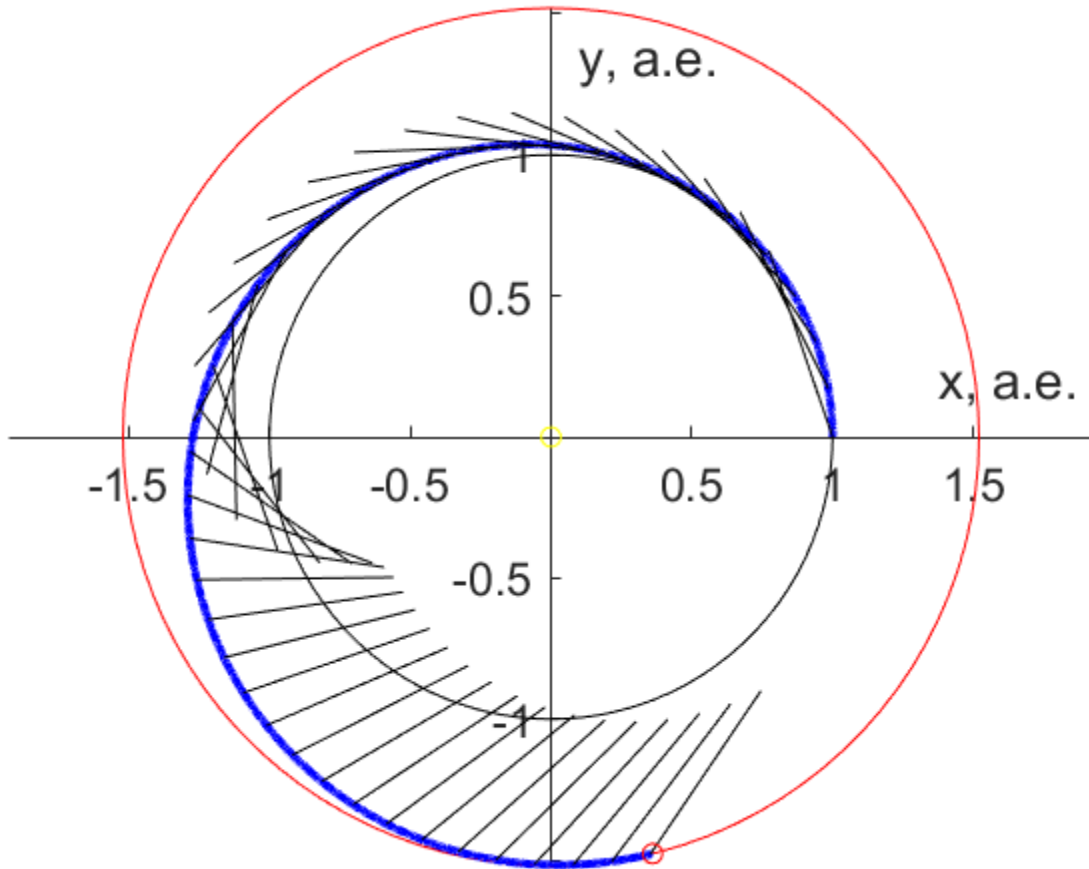


Задача пролёта, квадратичный функционал

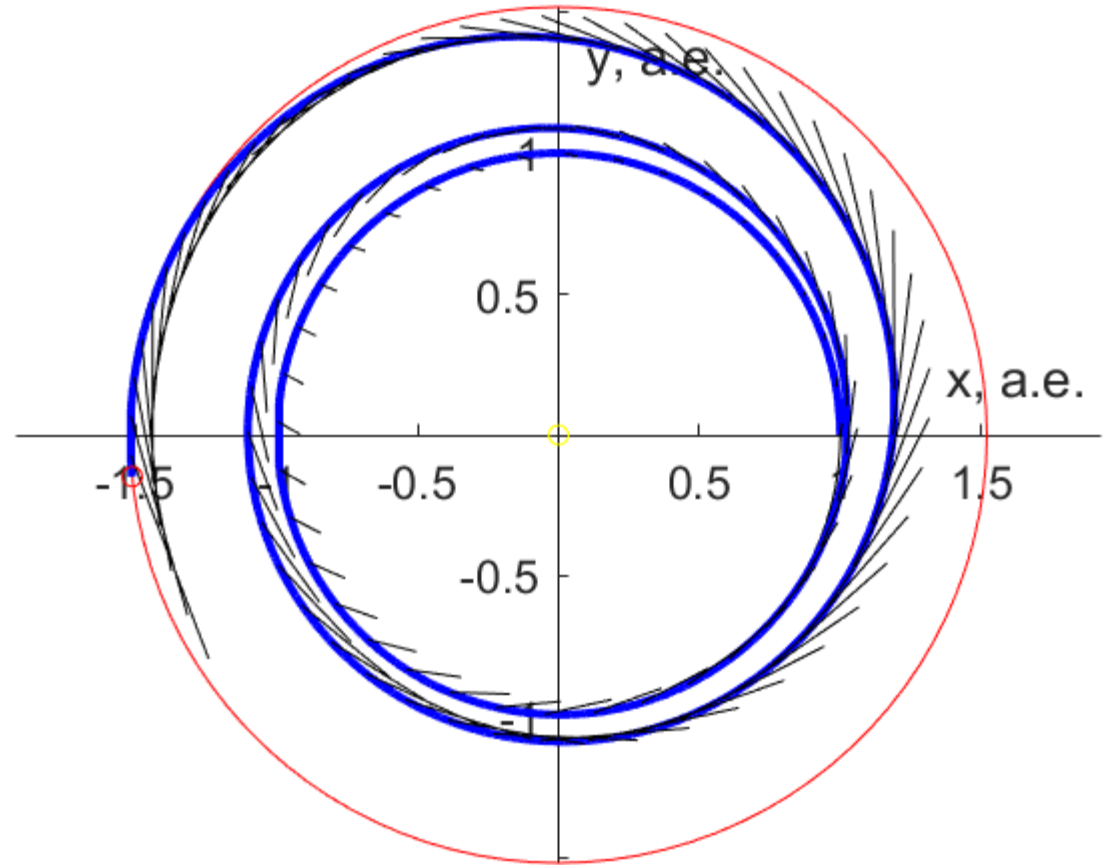


Задача пролёта, функционал быстрогодействия

Дополнительные примеры



Функционал быстродействия,
задача сопровождения



Квадратичный функционал, задача
сопровождения, 2 витка

Недостатки

- Нет проверки оптимальности второго порядка
- Нет прямого перевода сил из параметрического пространства
- На траекториях не выполняется билинейное соотношение

Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' = -\frac{\mathbf{u}}{4} - \frac{\mathbf{u}^2}{4h} L^T \mathbf{a} - \frac{h'}{2h} \mathbf{v} \\ h' = 2\mathbf{v}^T L^T \mathbf{a} \\ \tau' = \frac{1}{(-2h)^{3/2}} [\mu + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})h' + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} L^T \mathbf{a}] \end{cases}$$

Функция Гамильтона-Понтрягина

Задача сопровождения

$$H = -\frac{\mathbf{a}^2}{2} + \mathbf{p}_u^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \left(-\frac{\mathbf{u}}{4} - \frac{\mathbf{u}^2}{4h} L^T \mathbf{a} \right) + (2p_h - \mathbf{p}_v^T \frac{\mathbf{v}}{h}) \mathbf{v}^T L^T \mathbf{a} +$$
$$+ p_\tau^T \frac{1}{(-2h)^{3/2}} [\mu + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})h' + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} L^T \mathbf{a}]$$
$$\mathbf{a} = L \left(-\frac{\mathbf{u}^2}{4h} \mathbf{p}_v + \mathbf{v} \left(2p_h - \frac{1}{h} \mathbf{p}_v^T \mathbf{v} \right) + p_\tau \frac{1}{(-2h)^{3/2}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right)$$

Функция Гамильтона-Понтрягина

Задача пролёта

$$H = -1 + \mathbf{p}_u^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \left(-\frac{\mathbf{u}}{4} - \frac{\mathbf{u}^2}{4h} L^T \mathbf{a} \right) + \left(2p_h - \mathbf{p}_v^T \frac{\mathbf{v}}{h} \right) \mathbf{v}^T L^T \mathbf{a} + \\ + p_\tau^T \frac{1}{(-2h)^{3/2}} \left[\mu + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})h' + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} L^T \mathbf{a} \right]$$

$$\boldsymbol{\lambda} = L \cdot \left(-\mathbf{p}_v \frac{\mathbf{u}^2}{4h} + \left(2p_h - \frac{\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{v}}{h} \right) \mathbf{v} + p_\tau \frac{1}{(-2h)^{3/2}} (4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{u}) \right)$$

$$\mathbf{a} = a_{max} \cdot \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\|\boldsymbol{\lambda}\|}$$

Преобразование Кустаанхеймо-Штифеля

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = L(u)u$$

$$\mathbf{r} = L(u)\mathbf{u}$$

$$r = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{r}' = 2L(\mathbf{u})\mathbf{u}'$$

$$L'(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}')$$

$$L^{-1}(\mathbf{u}) = \frac{L^T(\mathbf{u})}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{u})\mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = L(\mathbf{x})$$