63-я научная конференция МФТИ
23–29 ноября 2020 года, Москва

Метод Чебышева—Пикара для решения краевых задач астродинамики

О.М. Мыльникова[1], М.Г. Широбоков[2]

[1]Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Содержание

- Введение
- Метод Чебышева-Пикара для решения системы ОДУ 1-го и 2-го порядка
- Задача Ламберта
- Параллельная пристрелка
- Заключение

Введение

- Оптимизация межпланетных перелетов сводится к численному решению краевых задач для системы ОДУ
- Известные методы решения краевых задач:
  - Метод параллельной пристрелки требует расчета градиента функций ограничений
  - Метод конечных разностей требует обращения матриц больших размерностей

Метод Чебышева-Пикара для решения системы ОДУ 1-го порядка

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)),\ \ t \in [t_0, t_f] \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

Преобразование времени

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\tau) = \boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau)),\ \ \tau \in [-1, 1] \qquad \boldsymbol{x}(-1) = \boldsymbol{x}_0$$

Метод последовательных приближений Пикара

Аналитическое решение

$$\boldsymbol{x}^i(\tau) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{-1}^{\tau} \boldsymbol{g}(s, \boldsymbol{x}^{i-1}(s))\,ds \rightarrow \{\boldsymbol{x}^0(\tau)\,\boldsymbol{x}^1(\tau), ..\}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{-1}^{\tau} \boldsymbol{g}(s, \boldsymbol{x}(s))\,ds}$$

Аппроксимация функций правых частей полиномами Чебышева

$$\boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{x}^{i-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{F}_k^{i-1} T_k(\tau)$$

$$\tau_j = -\cos\frac{j\pi}{M} \quad j = 0, 1, .., M$$

$$T_0(\tau) = 1$$
$$T_1(\tau) = \tau$$
$$T_{k+1}(\tau) = 2\tau T_k(\tau) - T_{k-1}(\tau)$$

Метод Чебышева-Пикара для решения системы ОДУ 1-го порядка

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \;\; t \in [t_0, t_f] \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

Преобразование времени

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\tau) = \boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau)), \;\; \tau \in [-1, 1] \qquad \boldsymbol{x}(-1) = \boldsymbol{x}_0$$

Итерация Пикара и полиномы Чебышева

$$\boldsymbol{x}^i(\tau) = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{\beta}_k^i T_k(\tau) = \boldsymbol{x}(-1) + \int_{-1}^{\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{F}_k^{i-1} T_k(s) ds$$

Коэффициенты разложения решения по полиномам Чебышева

$$\boldsymbol{\beta}_1^i = \frac{1}{2}(2\boldsymbol{F}_0^{i-1} - \boldsymbol{F}_2^{i-1}) \qquad \boldsymbol{\beta}_0^i = \boldsymbol{x}_0 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \boldsymbol{\beta}_k^i$$

$$\boldsymbol{\beta}_k^i = \frac{1}{2k}(\boldsymbol{F}_{k-1}^{i-1} - \boldsymbol{F}_{k+1}^{i-1}), \;\; k = 2, 3, .., N-2 \quad \boldsymbol{\beta}_{N-1}^i = \frac{\boldsymbol{F}_{N-2}^{i-1}}{2(N-1)} \quad \boldsymbol{\beta}_N^i = \frac{\boldsymbol{F}_{N-1}^{i-1}}{2N}$$

Метод Чебышева-Пикара для решения системы ОДУ 2-го порядка

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \dot{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{x}(t)), \quad t \in [t_0, t_f]$$

Краевая задача

Итерация Пикара и полиномы Чебышева

Задача Коши

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{r}_0, \quad \boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{r}_1$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{r}_0, \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t_f) = \boldsymbol{v}_1$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{r}_1$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{r}_0, \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{v}_0$$

$$\boldsymbol{v}^i(\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{\beta}_k^i T_k(\tau) = \boldsymbol{v}(-1) + \int_{-1}^{s} \sum_{k=0}^{N-2} \boldsymbol{F}_k^{i-1} T_k(q)\,dq$$

$$\boldsymbol{x}^i(\tau) = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{\alpha}_k^i T_k(\tau) = \boldsymbol{x}(-1) + \int_{-1}^{\tau} \sum_{k=0}^{N-1} [\boldsymbol{v}(-1) + \int_{-1}^{s} \sum_{k=0}^{N-2} \boldsymbol{F}_k^{i-1} T_k(q)\,dq]\,ds$$

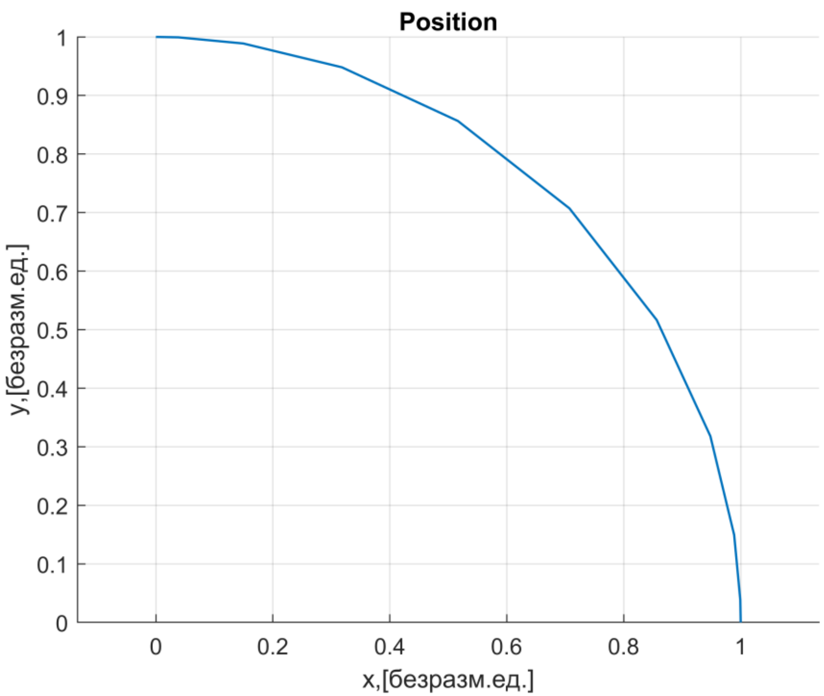
Краевые условия

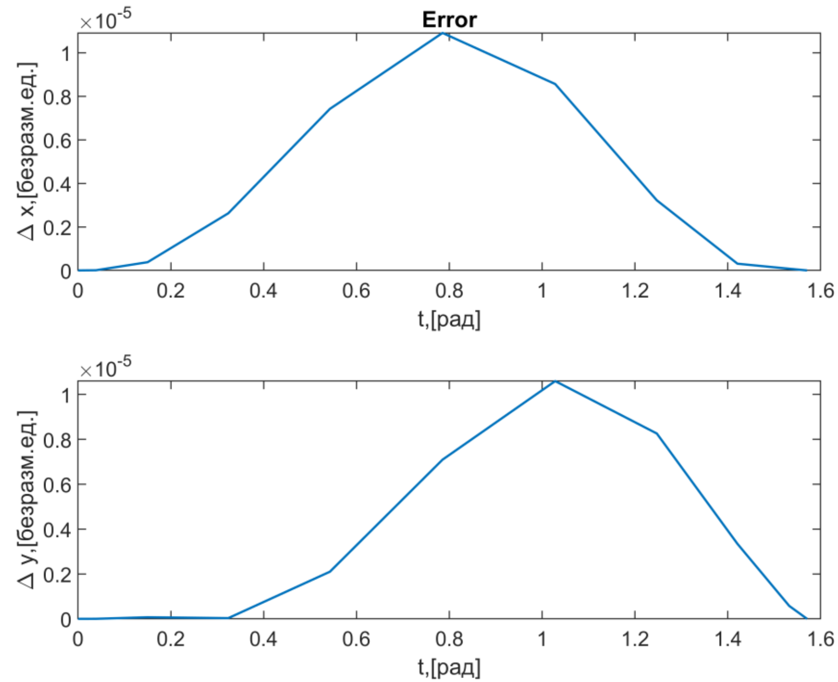
$$\boldsymbol{x}(-1) = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{\alpha}_k^i T_k(-1) \qquad \boldsymbol{x}(1) = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{\alpha}_k^i T_k(1)$$

$$\boldsymbol{v}(-1) = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{\beta}_k^i T_k(-1) \qquad \boldsymbol{v}(1) = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{\beta}_k^i T_k(1)$$

Задача Ламберта

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad t \in [t_0, t_f]$$





$$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\boldsymbol{r}_0 = [1; 0; 0], \quad \boldsymbol{r}_1 = [0; 1; 0]$$

$$\boxed{Iter = 10}$$

$$N = 10, \quad M = 10$$

используется безразмерная система единиц

Параллельная пристрелка

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad t \in [t_0, t_f] \qquad \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0, \quad \boldsymbol{r}(t_f) = \boldsymbol{r}_1$$

Разделим нашу задачу на 2 подзадачи

$$\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0, \quad \boldsymbol{r}\left(t = \frac{t_f + t_0}{2}\right) = \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{r}\left(t = \frac{t_f + t_0}{2}\right) = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{r}(t_f) = \boldsymbol{r}_1$$

Правило изменения скорости

Условие сшивки

$$\boxed{\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^2, \quad \dot{\boldsymbol{x}}^1 = \dot{\boldsymbol{x}}^2}$$

$$\boldsymbol{v}_f^1, \boldsymbol{v}_0^2 \quad \rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}_f^1 + \boldsymbol{v}_0^2}{2}$$

$$\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0, \quad \boldsymbol{v}\left(t = \frac{t_f + t_0}{2}\right) = \boldsymbol{v}$$

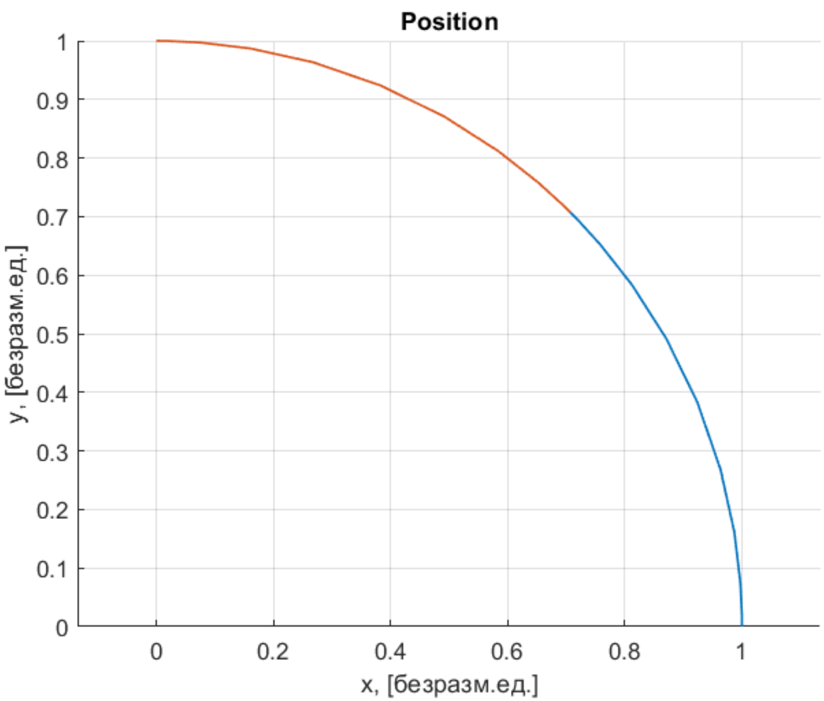
$$\boldsymbol{v}\left(t = \frac{t_f + t_0}{2}\right) = \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{r}(t_f) = \boldsymbol{r}_1$$

Правило изменения координаты

$$\boldsymbol{x}_f^1, \boldsymbol{x}_0^2 \quad \rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}_f^1 + \boldsymbol{x}_0^2}{2}$$

Параллельная пристрелка

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad t \in [t_0, t_f]$$



Iter	**Err_r**	**Err_v**
1	3.6539	0.6050
2	0.0344	0.0026
3	3.5037e-04	2.6618e-05
4	3.6183e-06	2.9978e-07
5	7.9225e-08	1.7539-08

$$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\boxed{Iter = 0}$$

$$\boldsymbol{r}_0 = [1; 0; 0], \quad \boldsymbol{r}_1 = [0; 1; 0]$$

$$N = 10, \quad M = 10$$

используется безразмерная система единиц

Заключение

- Реализован численный метод Чебышева—Пикара для решения задачи Коши и краевых задач второго порядка
- На языке MATLAB подготовлена единая функция, реализующая метод и позволяющая решать краевые задачи всех типов (положение-положение, положение-скорость и так далее)
- Предложен неградиентный вариант параллельной пристрелки на основе метода Чебышева—Пикара

Спасибо за внимание!

Back up

Преобразование времени

Постановка задачи:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \quad \boldsymbol{x} \in R^l, \boldsymbol{f} \in R^l$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

Преобразование времени:

$$t = \frac{t_f - t_0}{2}\tau + \frac{t_f + t_0}{2} = \omega_2 \tau + \omega_1, \quad \tau \in [-1, 1]$$

Новая постановка задачи:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\tau) = \omega_2 \boldsymbol{f}(\omega_2 \tau + \omega_1, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{x}), \quad \tau \in [-1, 1], \quad \boldsymbol{x} \in R^l, \boldsymbol{g} \in R^l$$

$$\boldsymbol{x}(-1) = \boldsymbol{x}_0$$

Метод последовательных приближений Пикара

После преобразования времени:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\tau) = \boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{x}), \quad \tau \in [-1, 1], \quad \boldsymbol{x} \in R^l, \boldsymbol{g} \in R^l$$

$$\boldsymbol{x}(-1) = \boldsymbol{x}_0$$

Аналитическое решение:

$$\boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{-1}^{\tau} \boldsymbol{g}(s, \boldsymbol{x}(s))ds$$

Метод последовательных приближений Пикара:

$$\boldsymbol{x}^i(\tau) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{-1}^{\tau} \boldsymbol{g}(s, \boldsymbol{x}^{i-1}(s))ds \quad \rightarrow \quad \{\boldsymbol{x}^0(\tau)\, \boldsymbol{x}^1(\tau), ..\}$$

Полиномы Чебышева

Полиномы Чебышева 1-го рода:

$$T_k(\tau) = \cos(k \arccos(\tau)), \quad \tau \in [-1, 1], \; k = 0, 1, .., N$$

Аппроксимация функций ограничений:

$$\boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{x}) \approx \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{F}_k T_k(\tau) \qquad \tau_j = -\cos\frac{j\pi}{M} \quad j = 0, 1, .., M$$

Невязка: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{x}) - \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{F}_k T_k(\tau)$

Из задачи минимизации $\boldsymbol{r}^T W \boldsymbol{r} \rightarrow min \quad W = diag\{\frac{1}{2}, 1, .., 1, \frac{1}{2}\}$

находим:

$$\boldsymbol{F}_k = \sum_{j=0}^{M} V_{kj} W_{kj} \boldsymbol{f}(\tau_j, \boldsymbol{x}(\tau_j)) T_k(\tau_j)$$

$$M = N: \quad V = diag(\frac{1}{M}, \frac{2}{M}, .., \frac{2}{M}, \frac{1}{M}) \qquad M > N: \quad V = diag(\frac{1}{M}, \frac{2}{M}, .., \frac{2}{M}, \frac{2}{M})$$