63-я Всероссийская научная конференция МФТИ

ФПМИ - Секция динамики и управления движением космических аппаратов

Математическая модель космического аппарата с произвольным числом нежестких элементов

А.И.Шестопёров, *С.С.Ткачев*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Долгопрудный, Россия,
23-29 ноября 2020 г.

Содержание

- Актуальность рассматриваемой проблемы
- Постановка задачи
- Способы вывода уравнений движения КА с произвольным числом НЭ
- Алгоритм вывода уравнений движения КА с произвольным числом НЭ (6 шагов)
- Отличительные особенности предложенной процедуры вывода уравнений движения
- Результаты работы

Актуальность

Космические аппараты с нежесткими элементами (КА с НЭ):

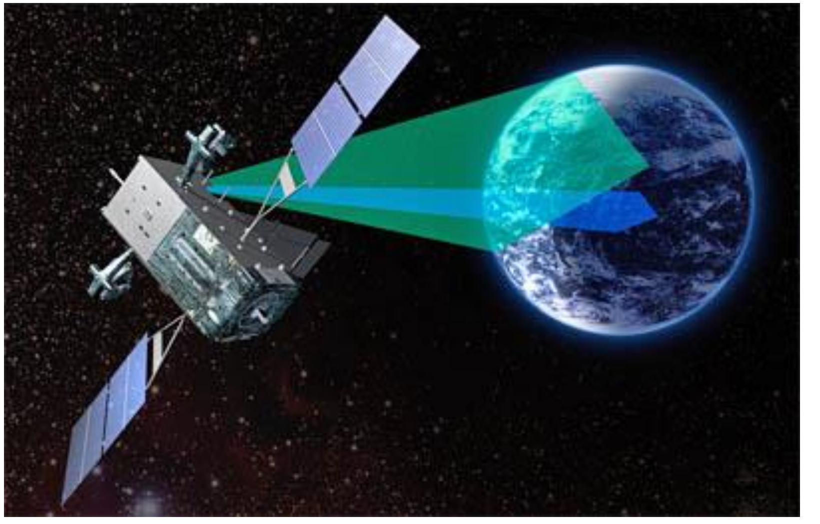
• орбитальные телескопы

• спутники ДЗЗ высокого и сверхвысокого

разрешения

• геостационарные спутники связи

Важно обеспечить высокую точность ориентации КА.



Свойства НЭ:
– большая протяженность
– производятся из легких материалов

→ Возникновение вибраций в НЭ

→ Ухудшение точности ориентации

Постановка задачи

- Рассматривается угловое движение КА, центр масс которого движется по геостационарной орбите в гравитационном поле.
- КА состоит из:
  - корпуса, моделируемого как твердое тело
  - произвольного числа НЭ, присоединенных к корпусу КА
- Допустимые типы сочленения КНЭК с корпусом КА:
  - консольное закрепление
  - с помощью одностепенного шарнира
  - с помощью двухстепенного шарнира
- Требуется:
  - разработать математическую модель КА с произвольным числом НЭ , сочлененных с корпусом КА
  - провести верификацию полученной математической модели КА

Способы вывода уравнений движения КА с НЭ*

Желательно, чтобы процедура вывода уравнений движения КА с НЭ:

- требовала как можно меньше вычислительных операций
- обладала наглядностью
- допускала изменение конфигурации КА с НЭ без изменения вида уравнений движения

Вывод может осуществляться на основе:

- уравнений Лагранжа 2го рода
- общих уравнений динамики

Для получения модели КА с несколькими НЭ общие уравнения динамики могут быть выписаны

- для всего КА (в обобщенных координатах)
- отдельно для корпуса КА и каждого НЭ. В этом случае возможно
  – дополнить уравнения движения уравнениями связи в каждой точке сочленения НЭ с корпусом КА
  – установить связь между набором переменных, описывающих движение КА с НЭ с набором обобщенных координат

*_P. Santini, P. Gasbarri_. General background and approach to multibody dynamics for space applications // Acta Astronautica, 2009, v. 64, p. 1224–1251

Алгоритм вывода уравнений движения КА с НЭ

1. Используя общее уравнение динамики получить уравнения движения для каждого элемента КА.
2. Выписать условие идеальности связей для всего КА с использованием обобщенных координат каждого элемента конструкции КА (отдельно!).
3. Определить вектор обобщенных координат КА с НЭ (в целом!).
4. Выразить 2е производные векторов состояний корпуса $\ddot{\mathbf{x}}_s$ и каждого НЭ КА $\ddot{\mathbf{y}}_n$ через 2е производные обобщенных координат $\ddot{\mathbf{x}}$.
5. Выразить вариации векторов состояний корпуса $\delta\mathbf{x}_s$ и каждого НЭ КА $\delta\mathbf{y}_n$ через вариации обобщенных координат $\delta\mathbf{x}$.
6. Пользуясь независимостью вариаций обобщенных координат, получить уравнения движения КА с КНЭК.

Вывод уравнений движения КА с произвольным числом НЭ, представленный в докладе, описан в работе
М.Ю. Овчинников, С.С. Ткачев, А.И. Шестопёров
«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СПУТНИКА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ НЕЖЕСТКИХ ЭЛЕМЕНТОВ» //
Математическое моделирование, 2020 год, том 32, номер 12, стр. 14-28

Шаг 1. Уравнения движения корпуса КА

- Корпус КА моделируется, как твердое тело и уравнения его движения имеют вид:

$$
(\mathrm{I})\quad \begin{cases} M_s\ddot{\mathbf{R}}_s = \mathbf{F}_s + \sum_{n=1}^{N}\mathbf{G}_{spn}, \\ \mathbf{J}_s\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = \mathbf{N}_s + \boldsymbol{\Phi}_s + \sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\Theta}_{sn}\mathbf{G}_{spn}, \end{cases}
$$

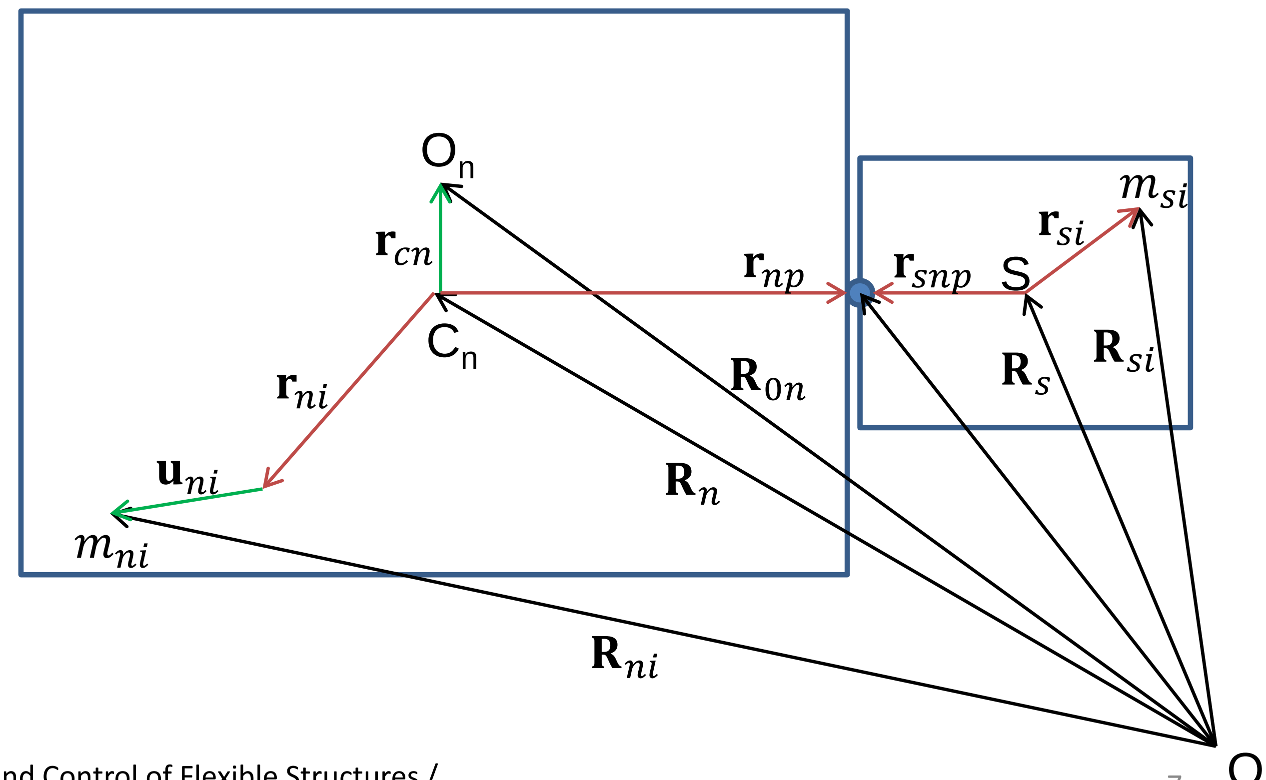
Здесь: $\mathbf{F}_s = \sum_i \mathbf{F}_{si}$, $\mathbf{N}_s = -\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{J}_s\boldsymbol{\omega}_s$,

$\boldsymbol{\Phi}_s = \sum_i \mathbf{r}_{si} \times \mathbf{F}_{si}$, $\boldsymbol{\Theta}_{sn} = \left[\mathbf{r}_{spn}\right]_\times$.

Здесь $\boldsymbol{\omega}_s$ – абсолютная угловая скорость СК , связанной с корпусом КА, относительно ИСК.

$\mathbf{u}_{ni} = \mathbf{A}_{ni}(\mathbf{r}_{ni})\mathbf{q}_n(t)$,

где $\mathbf{A}_{ni}(\mathbf{r}_{ni})$ – матрица собственных мод колебаний, $\mathbf{q}_n(t)$ – амплитуды собственных мод колебаний *n*-го НЭ*.



*Junkins J., Kim Y. Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures / Washington, DC: AIAA Education Series, AIAA, 1993. - 452 p.

Шаг 1. Уравнения движения *n*-ого НЭ

Общее уравнение динамики: $$\sum_i \left(m_{ni}\ddot{\mathbf{R}}_{ni} - \mathbf{F}_{ni} - \mathbf{G}_{ni} \right)\delta\mathbf{R}_{ni} = 0,$$

Здесь $\mathbf{F}_{ni}$ и $\mathbf{G}_{ni}$ – внешняя сила и сила реакции, действующие на *i*-ю точку *n*-ого НЭ

Вариации обобщенных координат НЭ*:

- $\delta\boldsymbol{\theta}_n$ – элементарный поворот НЭ;
- $\delta\mathbf{R}_n$ – возможное перемещение центра масс недеформированного *n*-го НЭ;
- $\delta\mathbf{q}_n$ – вариация амплитуд собственных мод колебаний *n*-го НЭ.

Связь возможного поворот *n*-го КНЭК относительно корпуса КА

$$\delta\mathbf{R}_{ni} = \delta\mathbf{R}_n + \delta\boldsymbol{\theta}_n \times \left(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni} \right) + \mathbf{A}_{ni}\delta\mathbf{q}_n$$

Ввиду независимости обобщенных координат, уравнения движения НЭ:

$$\text{1е уравнение}: \sum_i \left(m_{ni}\ddot{\mathbf{R}}_{ni} - \mathbf{F}_{ni} \right) = \mathbf{G}_{np},$$

$$\text{2е уравнение}: \sum_i \left(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni} \right) \times \left(m_{si}\ddot{\mathbf{R}}_{ni} - \mathbf{F}_{ni} \right) = \left(\mathbf{r}_{np} + \mathbf{u}_{np} \right) \times \mathbf{G}_{np},$$

$$\text{3е уравнение}: \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T \left(m_{ni}\ddot{\mathbf{R}}_{ni} - \mathbf{F}_{ni} \right) = \mathbf{A}_{np}^T \mathbf{G}_{np}.$$

где $\mathbf{G}_{np}$ – сила реакции, действующая на *n*-ый НЭ в точке его крепления к корпусу КА.

**Н.В. Баничук, И.И. Карпов, Д.М. Климов, А.П. Маркеев, Б.Н. Соколов, А.В. Шаранюк*.
Механика больших космических конструкций. – М.: Факториал, 1997, 302 с.

Шаг 1. Уравнения движения *n*-ого НЭ

1е уравнение после суммирования по всем точкам НЭ: $\left(\mathrm{II}\right)\; M_n \ddot{\mathbf{R}}_{0n} = \mathbf{F}_n + \mathbf{G}_{np},$

где $\mathbf{R}_{0n}$– вектор центра масс деформированного НЭ.

Используя выражение $\mathbf{R}_{ni} = \mathbf{R}_n + \mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}$, выразим $\dot{\mathbf{R}}_{ni}$ и $\ddot{\mathbf{R}}_{ni}$ через $\dot{\mathbf{R}}_n$ и $\ddot{\mathbf{R}}_n$:

$$\dot{\mathbf{R}}_{ni} = \dot{\mathbf{R}}_n + \boldsymbol{\omega}_n \times \left(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}\right) + \dot{\mathbf{u}}_{ni},$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_{ni} = \ddot{\mathbf{R}}_n + \dot{\boldsymbol{\omega}}_n \times \left(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}\right) + \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times \left(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}\right) + 2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{u}}_{ni} + \ddot{\mathbf{u}}_{ni},$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_n$ – абсолютная угловая скорость СК , связанной с *n*-ым КНЭК, относительно инерциальной СК.

Далее выполняются следующие шаги:

- подставляем выражения $\dot{\mathbf{R}}_{ni}$ и $\ddot{\mathbf{R}}_{ni}$ во 2е и 3е уравнения движения НЭ
- производим суммирование по всем точкам НЭ
- используя 1е уравнение и связь $\mathbf{R}_{0n} = \mathbf{R}_n + \mathbf{r}_{cn}$, где $\mathbf{r}_{cn}$ – смещение центра масс *n*-го КНЭК, вызванное его деформацией, исключаем из 2го и 3го уравнений $\ddot{\mathbf{R}}_n$.

Окончательно, 2е и 3е уравнения движения НЭ записываются в матричном виде:

$$\left(\mathrm{III}\right)\; \mathbf{S}_{\omega q} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_n \\ \ddot{\mathbf{q}}_n \end{pmatrix} = \mathbf{N}_n + \boldsymbol{\Phi}_n + \boldsymbol{\Theta}_n \mathbf{G}_{np}.$$

Матрицы из (III) выписаны в приложении 1

Шаг 2. Уравнения движения КА с НЭ. Идеальные связи

Обозначения. Векторы 2х производных координат, описывающие движение корпуса КА $\ddot{\mathbf{x}}_s = \left(\ddot{\mathbf{R}}_s^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_s^T\right)^T$ и *n*-го НЭ $\ddot{\mathbf{y}}_n = \left(\ddot{\mathbf{R}}_{0n}^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_n^T \quad \ddot{\mathbf{q}}_n^T\right)^T$.

Объединим уравнения (I), (II) (III). ***Уравнения движения КА с НЭ***:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_s\ddot{\mathbf{x}}_s - \mathbf{H}_s = \boldsymbol{\Gamma}_s, \\ \mathbf{S}_n\ddot{\mathbf{y}}_n - \mathbf{H}_n = \boldsymbol{\Gamma}_n, \ n = \overline{1, N}, \end{cases}$$

$$\mathbf{S}_s = \begin{pmatrix} M_s\mathbf{E}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{J}_s \end{pmatrix}, \ \mathbf{H}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{N}_s + \boldsymbol{\Phi}_s \end{pmatrix}, \ \mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} M_n\mathbf{E}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times(3+k_n)} \\ \mathbf{0}_{(3+k_n)\times3} & \mathbf{S}_{\omega q} \end{pmatrix}, \ \mathbf{H}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_n \\ \mathbf{N}_n + \boldsymbol{\Phi}_n \end{pmatrix}$$

Здесь $\boldsymbol{\Gamma}_s$ и $\boldsymbol{\Gamma}_n$ – столбцы сил реакций, действующих на корпус КА и НЭ, соответственно.

Условие идеальности связей:

$$\delta\mathbf{x}_s^T\boldsymbol{\Gamma}_s + \sum_{n=1}^{N}\delta\mathbf{y}_n^T\boldsymbol{\Gamma}_n = 0, \text{ где } \delta\mathbf{x}_s = \left(\delta\mathbf{R}_s^T \quad \delta\boldsymbol{\theta}_s^T\right)^T \text{ и } \delta\mathbf{y}_n = \left(\delta\mathbf{R}_{0n}^T \quad \delta\boldsymbol{\theta}_n^T \quad \delta\mathbf{q}_n^T\right)^T$$

– вариации, соответствующие движению КА и *n*-го НЭ.

Предполагается, что l_1 НЭ закреплены консольно, l_2 присоеденены с помощью одностепенного шарнира, а N- l_1 - l_2 с помощью двухстепенного.

Шаг 3. Обобщенные координаты КА с произвольным числом НЭ

Вектор вариаций обобщенных координат* :

$$\delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{x}_s^T & \left(\delta\mathbf{x}^0\right)^T & \left(\delta\mathbf{x}^{\mathrm{I}}\right)^T & \left(\delta\mathbf{x}^{\mathrm{II}}\right)^T \end{pmatrix}^T, \ \dim\mathbf{x} = l_2 + 2\left(N - l_1 - l_2\right) + \sum_{n=1}^{N} k_n$$

где $\delta\mathbf{x}_s = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{R}_s^T & \delta\boldsymbol{\theta}_s^T \end{pmatrix}^T$, $\delta\mathbf{x}^0 = \left(\delta\mathbf{x}_n^0\right)\Big|_{n=1}^{l_1} = \left(\delta\mathbf{q}_n\right)\Big|_{n=1}^{l_1}$,

$$\delta\mathbf{x}^{\mathrm{I}} = \left(\delta\mathbf{x}_n^{\mathrm{I}}\right)\Big|_{n=l_1+1}^{l_1+l_2}, \ \delta\mathbf{x}_n^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} \delta\varphi_n \\ \delta\mathbf{q}_n \end{pmatrix}, \ \delta\mathbf{x}^{\mathrm{II}} = \left(\delta\mathbf{x}_n^{\mathrm{II}}\right)\Big|_{n=l_1+l_2+1}^{N}, \ \delta\mathbf{x}_n^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \delta\boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{II}} \\ \delta\mathbf{q}_n \end{pmatrix}, \ \delta\boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \delta\varphi_n^1 \\ \delta\varphi_n^2 \end{pmatrix}$$

$\delta\mathbf{x}_s$ – вариации возможных перемещений корпуса КА, где
$\delta\boldsymbol{\theta}_s$ – элементарный поворот НЭ
$\delta\mathbf{R}_s$ – возможное перемещение центра масс корпуса

$\delta\mathbf{x}^0$, $\delta\mathbf{x}^{\mathrm{I}}$, $\delta\mathbf{x}^{\mathrm{II}}$ – вариации возможных перемещений НЭ, закрепленных консольно, с помощью одностепенных и двухстепенных шарниров, соответственно, где
$\delta\varphi_n$ – возможный поворот в одностепенном шарнире
$\delta\varphi_n^1$, $\delta\varphi_n^2$ – возможные повороты в двухстепенном шарнире
$\delta\mathbf{q}_n$ – амплитуды собственных мод колебаний *n*-го НЭ

1. *А.Ю. Каргашин, С.А. Мирер, В.В. Сазонов*. Математическая модель манипулятора с грузом // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 1981, № 169;
2. *M.Yu. Ovchinnikov, S.S. Tkachev, D.S. Roldugin, A.B. Nuralieva, Y.V. Mashtakov*. Angular Motion Equations for a Satellite with Hinged Flexible Solar Panel // Acta Astronautica, 2016. v. 128. p. 534–539

Шаг 4. Преобразование вторых производных

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_s^T & \left(\ddot{\mathbf{x}}^0\right)^T & \left(\ddot{\mathbf{x}}^{\mathrm{I}}\right)^T & \left(\ddot{\mathbf{x}}^{\mathrm{II}}\right)^T \end{pmatrix}^T, \text{где } \ddot{\mathbf{x}}^0 = \left(\ddot{\mathbf{x}}_n^0\right)\Big|_{n=1}^{l_1} = \left(\ddot{\mathbf{q}}_n\right)\Big|_{n=1}^{l_1},$$

$$\ddot{\mathbf{x}}^{\mathrm{I}} = \left(\ddot{\mathbf{x}}_n^{\mathrm{I}}\right)\Big|_{n=l_1+1}^{l_1+l_2}, \ddot{\mathbf{x}}_n^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_n \\ \ddot{\mathbf{q}}_n \end{pmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}^{\mathrm{II}} = \left(\ddot{\mathbf{x}}_n^{\mathrm{II}}\right)\Big|_{n=l_1+l_2+1}^{N}, \ddot{\mathbf{x}}_n^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\psi}}_n^{\mathrm{II}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_n \end{pmatrix}, \dot{\boldsymbol{\psi}}_n^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_n^1 \\ \dot{\psi}_n^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\psi_n,\ \psi_n^1,\ \psi_n^2$ – угловые скорости в шарнирах.

Связь $\ddot{\mathbf{x}}_s$ с $\ddot{\mathbf{x}}$: $\ddot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{D}_s\ddot{\mathbf{x}}$, где $\mathbf{D}_s = (\mathbf{E}_{6\times 6} \quad \mathbf{0})$.

Связь $\ddot{\mathbf{y}}_n$ с $\ddot{\mathbf{x}}$ устанавливается в два этапа. Требуется выразить:

1. $\ddot{\mathbf{R}}_{0n}$ через $\ddot{\mathbf{R}}_s$. Аналогично **шагу 1** (уравнения движения НЭ)

2. $\dot{\boldsymbol{\omega}}_n$ через $\dot{\psi}_n,\ \dot{\psi}_n^1,\ \dot{\psi}_n^2$

Пусть $\boldsymbol{\omega}_{\mu n}$ – угловая скорость *n*-го КНЭК относительно корпуса КА, $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n^1, \mathbf{e}_n^2$ – направления осей вращения в шарнирах. Тогда $\dot{\boldsymbol{\omega}}_n = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mu n} + \boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\omega}_{\mu n}$, где

$$\boldsymbol{\omega}_{\mu n} = \begin{cases} \mathbf{0}_{3\times 1} \\ \psi_n \mathbf{e}_n \\ \psi_n^1 \mathbf{e}_n^1 + \psi_n^2 \mathbf{e}_n^2 \end{cases}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mu n} = \begin{cases} \mathbf{0}_{3\times 1}, & n = \overline{1, l_1}, \\ \mathbf{e}_n \dot{\psi}_n, & n = \overline{l_1+1, l_1+l_2}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{e}_n^1 & \mathbf{e}_n^2 \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\psi}}_n^{\mathrm{II}} + \psi_n^1 \mathbf{e}_n^1 \times \psi_n^2 \mathbf{e}_n^2, & n = \overline{l_1+l_2+1, N}, \end{cases}$$

Окончательно: $\ddot{\mathbf{y}}_n = \mathbf{D}_n \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{d}_n$. Вид матриц в приложении 2.

Шаги 5 и 6. Преобразование вариаций. Уравнения движения КА с НЭ

Так как $\delta \mathbf{x}_s^T = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{D}_s^T$, $\delta \mathbf{y}_n^T = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{D}_n^T$

и $\ddot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{D}_s \ddot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{y}}_n = \mathbf{D}_n \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{d}_n$,

Подставим вышеуказанные выражения в условие идеальности связей. Получим:

$$\delta \mathbf{x}^T \left(\mathbf{D}_s^T \left(\mathbf{S}_s \mathbf{D}_s \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{H}_s \right) + \sum_{n=1}^{N} \mathbf{D}_n^T \left(\mathbf{S}_n \left(\mathbf{D}_n \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{d}_n \right) - \mathbf{H}_n \right) \right) = 0.$$

Ввиду независимости обобщенных координат, ***уравнения движения КА с НЭ*** имеют вид:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{D}_s^T \mathbf{S}_s \mathbf{D}_s + \sum_{n=1}^{N} \left(\mathbf{D}_n^T \mathbf{S}_n \mathbf{D}_n \right) \right)^{-1} \left(-\sum_{n=1}^{N} \mathbf{D}_n^T \mathbf{S}_n \mathbf{d}_n + \mathbf{D}_s^T \mathbf{H}_s + \sum_{n=1}^{N} \mathbf{D}_n^T \mathbf{H}_n \right).$$

- ***Кинематические соотношения***:

$$\dot{\mathbf{R}}_s = \mathbf{V}_s, \;\; \dot{\lambda}_{0s} = -\frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\omega}_s, \boldsymbol{\lambda}_s \right), \;\; \dot{\boldsymbol{\lambda}}_{0s} = \frac{1}{2} \left(\lambda_{0s} \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\lambda}_s \times \boldsymbol{\omega}_s \right),$$

$$\dot{\varphi}_n = \psi_n, \; n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}, \;\; \dot{\varphi}_n^1 = \psi_n^1, \; \dot{\varphi}_n^2 = \psi_n^2, \; n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{V}_{\mathbf{q}_n}, \;\; n = \overline{1, N}.$$

- Была проведена ***верификация*** полученной модели КА с КНЭК, которая заключается в проверке сохранения кинетического момента и энергии в отсутствии гравитационного и управляющего моментов.

Отличия предложенной процедуры вывода уравнений движения КА с НЭ от используемой ранее*

1. Общие уравнения динамики выписываются сразу для всего КА с НЭ.
2. В качестве обобщенной координаты вместо радиус-вектора центра масс корпуса КА $\mathbf{R}_s$ выступает радиус-вектор центра масс всего КА с НЭ $\mathbf{R}_0$.

Преимущество.
Орбитальное движение центра масс КА отделяется от углового, т.е. $m\ddot{\mathbf{R}}_0 - \mathbf{F}_0 = 0$.

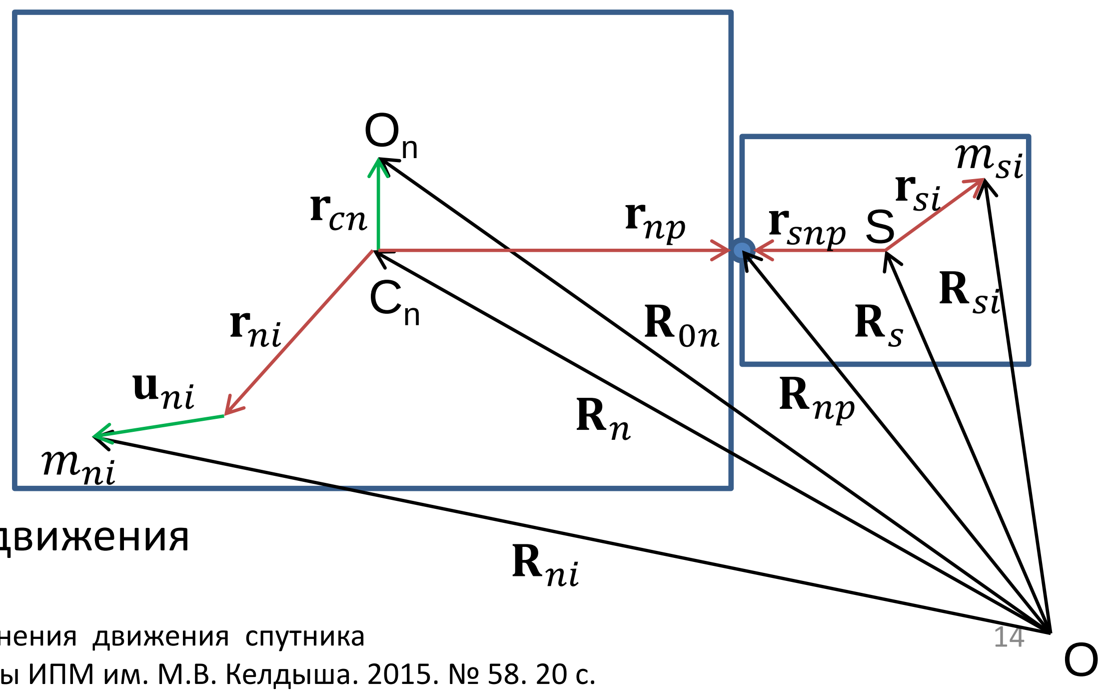
Недостаток. Необходимость выражать векторы через $\mathbf{R}_0$.

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_O - \frac{1}{m}\sum_n m_n\left(\mathbf{r}_{snp} - \mathbf{r}_{np} + \mathbf{r}_{cn}\right),\ \ \mathbf{R}_{np} = \mathbf{R}_s + \mathbf{r}_{snp}.$$

$$\mathbf{R}_{ni} = \mathbf{R}_n + \mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}$$

Замена

$$\mathbf{R}_{ni} = \mathbf{R}_s + \mathbf{r}_{snp} - \mathbf{r}_{np} + \mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}$$



Итог:
1. громоздкие вычисления
2. сильно перевязанные уравнения движения

*Ткачев С.С., Ролдугин Д.С., Овчинников М.Ю. Уравнения движения спутника с нежесткими элементами конструкции // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 58. 20 с.

Результаты работы

- Получены уравнения движения КА с произвольным с числом НЭ.
- Уравнения допускают включение в модель трех ранее типов крепления НЭ к корпусу КА: консольное закрепление, а также с помощью одностепенного и двухстепенного шарниров.
- Полученные уравнения записаны в обобщенных координатах системы, что минимизирует их количество.
- Матрицы, соответствующие каждому элементу конструкции КА, рассчитываются независимо друг от друга, что позволяет добавлять НЭ в модель КА, не переписывая уравнений.
- Предложенная процедура вывода уравнений движения КА с НЭ, по сравнению с использованной авторами ранее, обладает следующими преимуществами:
  - значительно упрощен процесс получения итоговых уравнений;
  - более структурированный вид итоговых уравнений упрощает программную реализацию.

Работа выполнена при финансовой поддержке

гранта РФФИ Аспиранты № 19-31-90047

Спасибо за внимание!

Приложение 1. Матрицы из уравнений движения НЭ

- При написании уравнений движения НЭ (слайд 9) были использованы обозначения:

$$\mathbf{S}_{\omega q} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{\omega q}^{11} & \mathbf{S}_{\omega q}^{12} \\ \left(\mathbf{S}_{\omega q}^{12}\right)^T & \mathbf{S}_{\omega q}^{22} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\mathbf{S}_{\omega q}^{11} = \tilde{\mathbf{J}}_n + M_n \left[\mathbf{r}_{cn}\right]_\times \left[\mathbf{r}_{cn}\right]_\times, \quad \mathbf{S}_{\omega q}^{12} = \sum_i m_{ni} \left(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}\right) \times \mathbf{A}_{ni} - \left[\mathbf{r}_{cn}\right]_\times \mathbf{A}_n,$$

$$\mathbf{S}_{\omega q}^{22} = \sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{A}_{ni} - \left(1/M_n\right) \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_n,$$

$$\mathbf{N}_n = \begin{pmatrix} M_n \left[\mathbf{r}_{cn}\right]_\times \mathbf{g}_{cn} - \boldsymbol{\omega}_n \times \tilde{\mathbf{J}}_n \boldsymbol{\omega}_n - \sum_i m_{ni} \left(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}\right) \times \left(2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{u}}_{ni}\right) \\ \mathbf{A}_n^T \mathbf{g}_{cn} - \sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T \left(\boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times \left(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}\right) + 2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{u}}_{ni}\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_{cn} = \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{cn} + 2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{r}}_{cn}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_n = \begin{pmatrix} \sum_i \left(\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}\right) \times \mathbf{F}_{ni} - \left[\mathbf{r}_{cn}\right]_\times \mathbf{F}_n \\ \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{F}_{ni} - \left(1/M_n\right) \mathbf{A}_n^T \mathbf{F}_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Theta}_n = \begin{pmatrix} \left[\mathbf{r}_{np} + \mathbf{u}_{np} - \mathbf{r}_{cn}\right]_\times \\ \mathbf{A}_{np}^T - \left(1/M_n\right) \mathbf{A}_n^T \end{pmatrix}.$$

Приложение 2. Матрицы связи вторых производных векторов состояния НЭ и обобщенных координат (1)

$$\ddot{\mathbf{y}}_n = \mathbf{D}_n \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{d}_n, \text{ где } \mathbf{D}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_n^s & \mathbf{D}_n^n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{d}_n = \begin{cases} \mathbf{b}_n^0, \ n = \overline{1, l_1}, \\ \mathbf{b}_n^{\mathrm{I}}, \ n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}, \\ \mathbf{b}_n^{\mathrm{II}}, \ n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N} \end{cases} \quad \mathbf{D}_n^s = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{3\times 3} & -\left[\mathbf{r}_{spn} + \mathbf{r}_{cn} - \mathbf{r}_{np}\right]_\times \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{E}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{k_n \times 3} & \mathbf{0}_{k_n \times 3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_n^n = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_n^{n0} & \mathbf{D}_n^{n\mathrm{I}} & \mathbf{D}_n^{n\mathrm{II}} \end{pmatrix}, \ \ n = \overline{1, N}:$$

при $n = \overline{1, l_1} : \mathbf{D}_n^{n\mathrm{I}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}_n^{n\mathrm{II}} = \mathbf{0},$

$$\mathbf{D}_n^{n0} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(6+k_n)\times(3+k_1)} & \cdots & \mathbf{0}_{(6+k_n)\times(3+k_{n-1})} & \mathbf{B}_n^0 & \mathbf{0}_{(6+k_n)\times(3+k_{n+1})} & \cdots & \mathbf{0}_{(6+k_n)\times\left(3+k_{l_1}\right)} \end{pmatrix};$$

при $n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2} : \ \mathbf{D}_n^{n0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}_n^{n\mathrm{II}} = \mathbf{0},$

$$\mathbf{D}_n^{n\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(6+k_n)\times\left(3+k_{l_1+1}\right)} & \cdots & \mathbf{0}_{(6+k_n)\times(3+k_{n-1})} & \mathbf{B}_n^{\mathrm{I}} & \mathbf{0}_{(6+k_n)\times(3+k_{n+1})} & \cdots & \mathbf{0}_{(6+k_n)\times\left(3+k_{l_1+l_2}\right)} \end{pmatrix};$$

при $n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N} : \ \mathbf{D}_n^{n0} = \mathbf{0}, \ \mathbf{D}_n^{n\mathrm{I}} = \mathbf{0},$

$$\mathbf{D}_n^{n\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(6+k_n)\times\left(3+k_{l_1+l_2+1}\right)} & \cdots & \mathbf{0}_{(6+k_n)\times(3+k_{n-1})} & \mathbf{B}_n^{\mathrm{II}} & \mathbf{0}_{(6+k_n)\times(3+k_{n+1})} & \cdots & \mathbf{0}_{(6+k_n)\times(3+k_N)} \end{pmatrix}.$$

Приложение 2. Матрицы связи вторых производных векторов состояния НЭ и обобщенных координат (2)

$$\mathbf{B}_n^0 = \begin{pmatrix} (1/M_n)\mathbf{A}_n \\ \mathbf{0}_{3\times k_n} \\ \mathbf{E}_{k_n\times k_n} \end{pmatrix},\ \mathbf{B}_n^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} -\left[\mathbf{r}_{cn}-\mathbf{r}_{np}\right]_\times \mathbf{\Psi}_n^{\mathrm{I}} & (1/M_n)\mathbf{A}_n \\ \mathbf{\Psi}_n^{\mathrm{I}} & \mathbf{0}_{3\times k_n} \\ \mathbf{0}_{k_n\times 1} & \mathbf{E}_{k_n\times k_n} \end{pmatrix},\ \mathbf{B}_n^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} -\left[\mathbf{r}_{cn}-\mathbf{r}_{np}\right]_\times \mathbf{\Psi}_n^{\mathrm{II}} & (1/M_n)\mathbf{A}_n \\ \mathbf{\Psi}_n^{\mathrm{II}} & \mathbf{0}_{3\times k_n} \\ \mathbf{0}_{k_n\times 2} & \mathbf{E}_{k_n\times k_n} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_n^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\Delta n} \\ \mathbf{0}_{3\times 1} \\ \mathbf{0}_{k_n\times 1} \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_n^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\Delta n} \\ \boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\omega}_{\mu n} \\ \mathbf{0}_{k_n\times 1} \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_n^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\Delta n} - \left[\mathbf{r}_{cn}-\mathbf{r}_{np}\right]_\times \psi_n^1 \mathbf{e}_n^1 \times \psi_n^2 \mathbf{e}_n^2 \\ \boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\omega}_{\mu n} + \psi_n^1 \mathbf{e}_n^1 \times \psi_n^2 \mathbf{e}_n^2 \\ \mathbf{0}_{k_n\times 1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{\Delta n} = \boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{r}_{spn} + \left(\boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\omega}_{\mu n}\right) \times \left(\mathbf{r}_{cn} - \mathbf{r}_{np}\right) + \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times \left(\mathbf{r}_{cn} - \mathbf{r}_{np}\right) + 2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{r}}_{cn},$$

$$\mathbf{\Psi}_n^{\mathrm{I}} = \mathbf{e}_n,\ \ \mathbf{\Psi}_n^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_n^1 & \mathbf{e}_n^2 \end{pmatrix}.$$