63-я научная конференция МФТИ
23–29 ноября 2020 года, Москва

Построение семейства периодических орбит Ляпунова методом продолжения

К.С. Суслов[1], М.Г. Широбоков[2]

[1]Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Содержание

Введение и цель работы

- Сейчас актуальны задачи построения полётов к Луне, а также к различным объектам Солнечной системы
- Многие методы проектирования опираются на заранее рассчитанные периодические орбиты вокруг точек L_1 и L_2 систем трёх тел, в частности семейство плоских периодических орбит Ляпунова[1]
- Цель работы – провести прецизионное табулирование данного семейства в системе Земля–Луна

1. Tselousova A., Shirobokov M., Trofimov S. Geometrical Tools for the Systematic Design of Low-Energy Transfers in the Earth-Moon System // 2020 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. 2020. Paper AAS 20-695. pp. 1–18.

Плоская круговая ограниченная задача трех тел

Массовый параметр: $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$

Для системы Земля–Луна $\mu = 1.2150668 \cdot 10^{-2}$

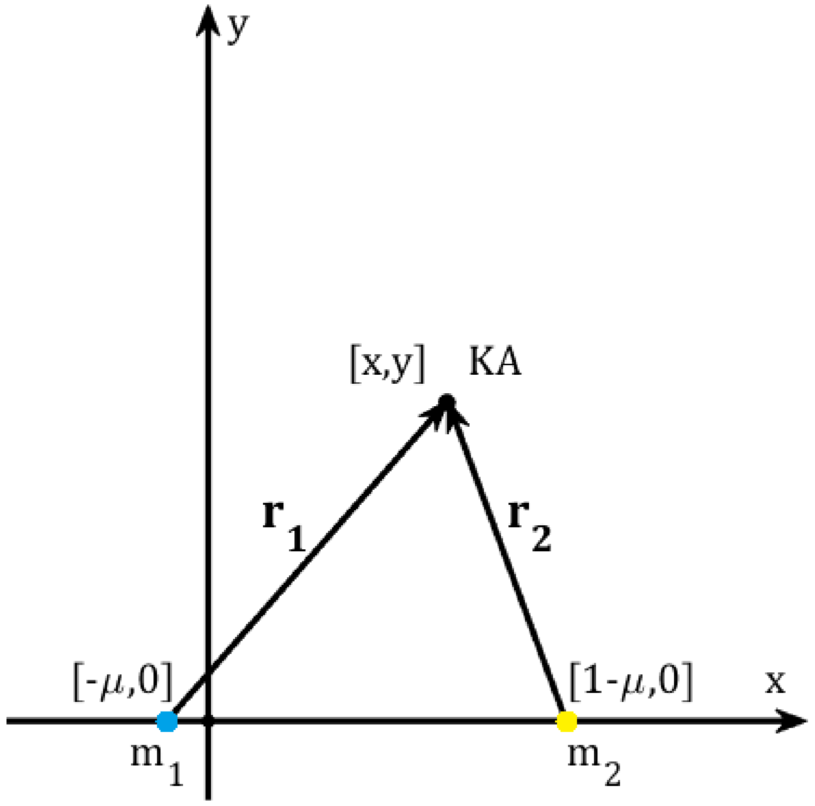
Безразмерные единицы:

$m_1 = 1 - \mu \qquad m_2 = \mu \qquad \omega_0 = 1$

$x_{m_1} = -\mu \qquad x_{m_2} = 1 - \mu$

Уравнения движения: $\ddot{x} - 2\dot{y} = U_x, \ddot{y} + 2\dot{x} = U_y$

где $U(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1-\mu)}{2}$



Семейство орбит Ляпунова

Положения равновесия системы соответствуют условиям $U_x = U_y = 0$ и называются *точками либрации*

Линеаризованные уравнения движения:

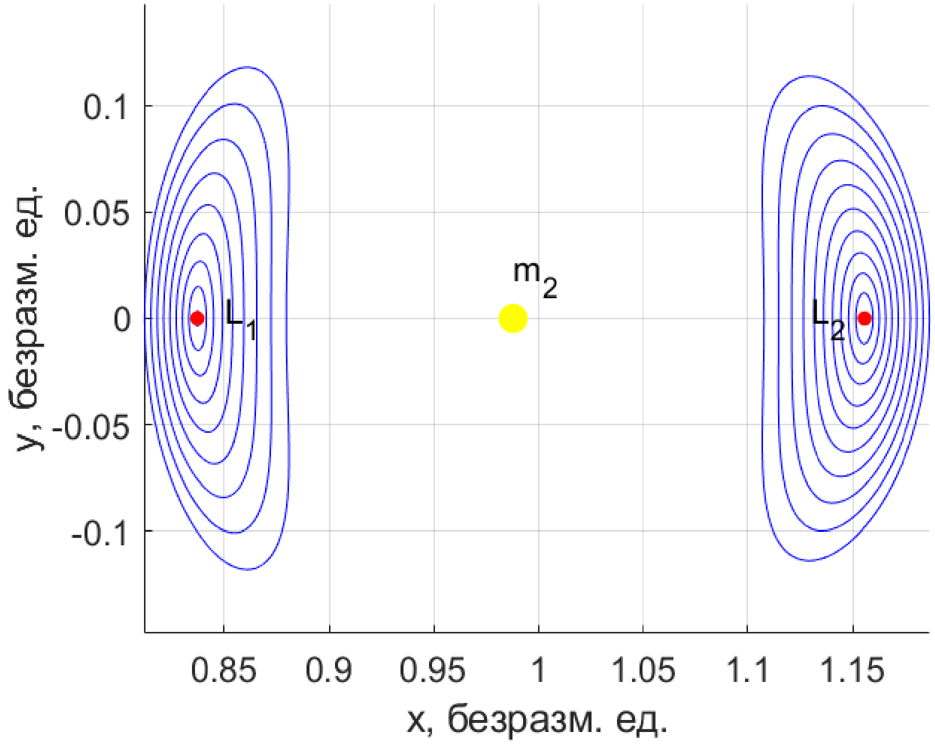
$$\delta\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\delta\boldsymbol{x},\ \delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_L$$

Частное решение:

$$\begin{cases} x(t) = x_L - (x_L - x(0))\cos\nu t \\ y(t) = \tau(x_L - x(0))\sin\nu t \end{cases}$$

Для $x(0)$ имеем

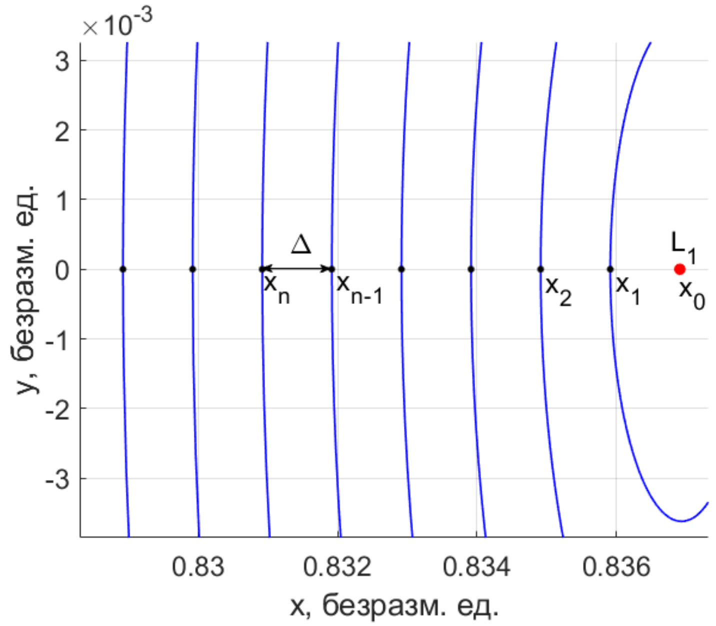
$$\dot{y}(0) = \big(x_L - x(0)\big)\tau\nu, \qquad T = \frac{2\pi}{\nu}$$



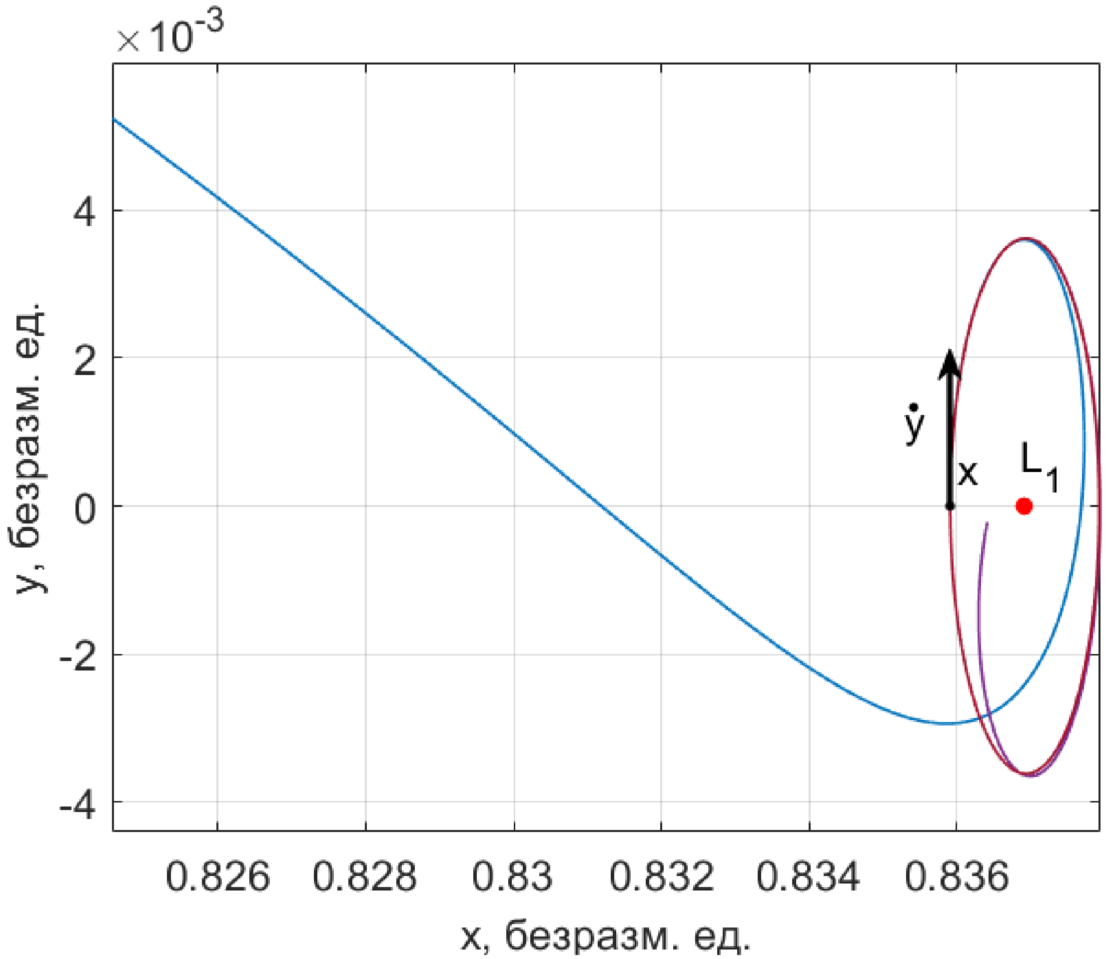
Постановка задачи

- Построить две таблицы с информацией об орбитах Ляпунова вокруг точек либрации L_1 и L_2 системы Земля–Луна
- Первый столбец соответствует точке либрации, последний – орбите, касающейся поверхности одного из главных тел
- Подобрать Δ так, чтобы гарантировать быструю сходимость последующей корректирующей процедуры для орбит не из таблицы

n	0	1	2	…
x_n	$x_0 = x_{L_i}$	$x_1 = x_0 + \Delta$	$x_2 = x_1 + \Delta$	…
$\dot{y}_n$	$\dot{y}_0 = 0$	$\dot{y}_1$	$\dot{y}_2$	…
T_n	$T_0 = T_{L_i}$	T_1	T_2	…
C_n	$C_0 = C_{L_i}$	C_1	C_2	…



Задача дифференциальной коррекции

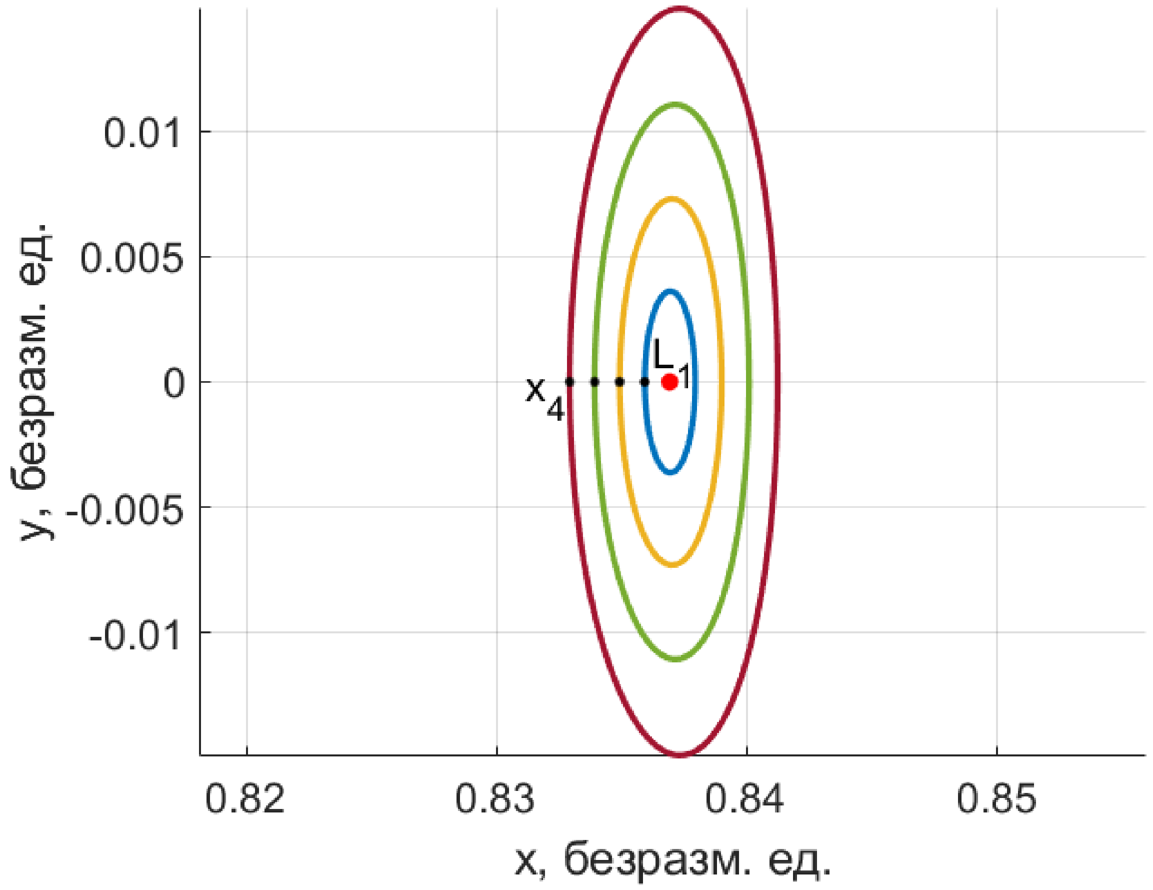


Для орбиты с заданной координатой x:

1. Вычислить начальное приближение для $\dot{y}$ и T
2. Найти точное значение $\dot{y}$ и T, решив оптимизационную задачу, посчитать C
3. Проверить, что алгоритм сошёлся к оптимальному решению, если да – закончить расчёт, если нет – уменьшить амплитуду орбиты и вернуться к пункту 1

Метод продолжения

1. Построить две “стартовые” орбиты
    1. Задать $x_1 = x_0 + \Delta$
    2. Начальное приближение взять из линеаризованных уравнений движения
    3. Решить задачу дифф. коррекции, получить точные значения $\dot{y}_1, T_1$ и C_1
    4. Аналогично для $x_2 = x_0 + 2\Delta$ получить $\dot{y}_2, T_2$ и C_2
2. Поочерёдно для каждого $n = 3,4,\ldots$
    1. Задать $x_n = x_{n-1} + \Delta$
    2. Начальное приближение – линейная экстраполяция двух предыдущих орбит
    3. Решить задачу дифф. коррекции, получить точные значения $\dot{y}_n, T_n$ и C_n
    4. Если орбита пересекает поверхность одного из главных тел, закончить расчёт



Реализация алгоритма

Задача оптимизации: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$, где $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \dot{y}(0) \\ T \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} x(T) - x(0) \\ y(T) \\ \dot{x}(T) \\ \dot{y}(T) - \dot{y}(0) \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})$ и $\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) / \partial \boldsymbol{z}$ находятся интегрированием совместной системы

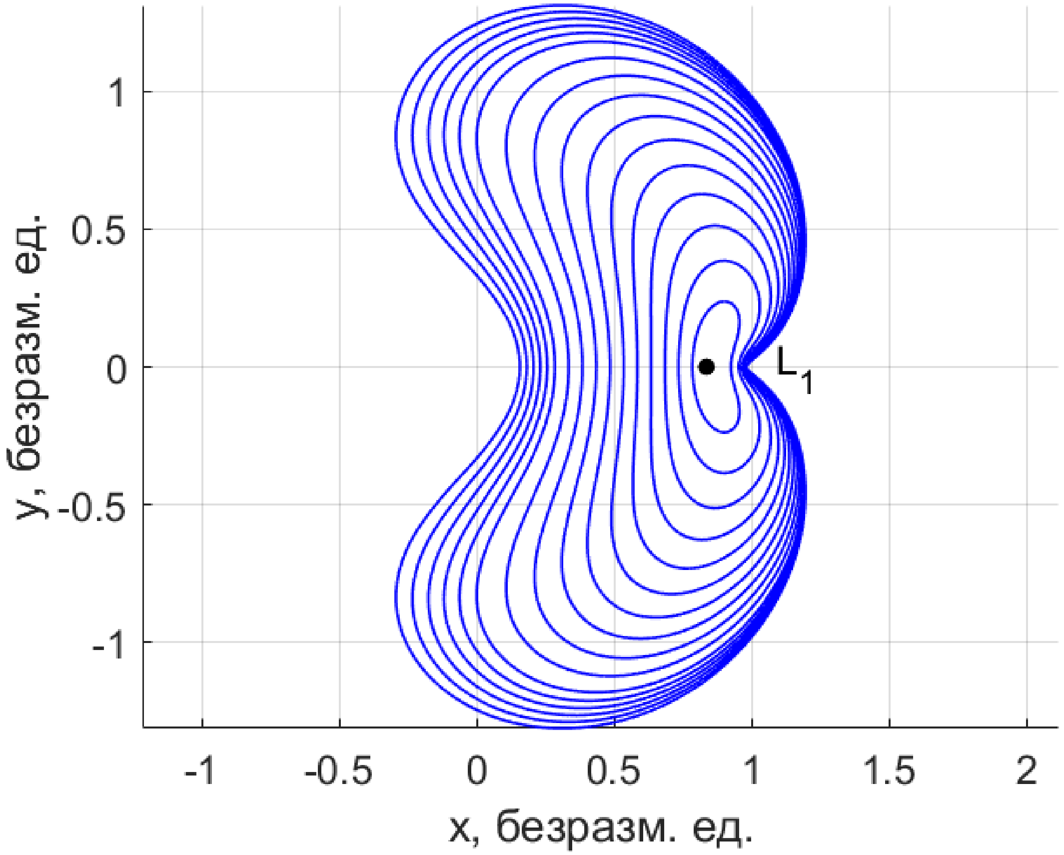
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}(T, \boldsymbol{x_0})}{\partial \boldsymbol{x_0}}\right) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(T)} \frac{\partial \boldsymbol{x}(T, \boldsymbol{x_0})}{\partial \boldsymbol{x_0}}$$

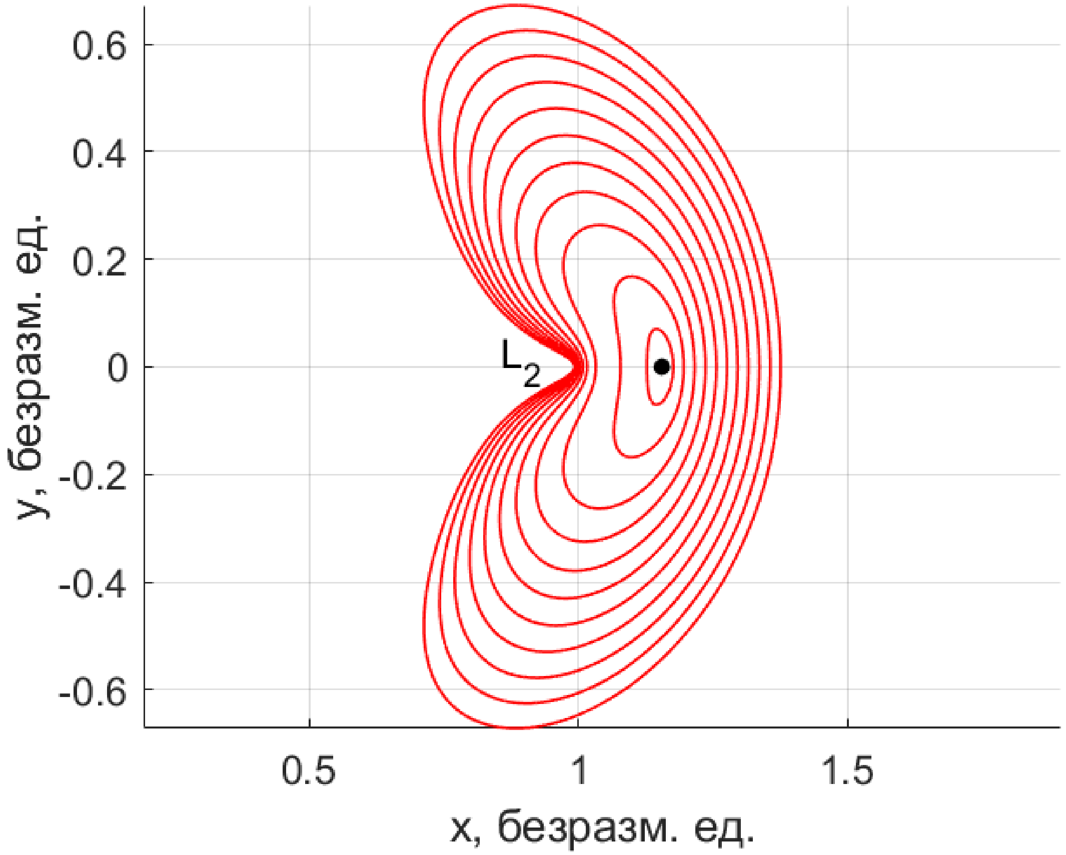
Шаг метода продолжения: $\Delta = -10^{-3}$ безразм. ед.

Метод Левенберга–Марквардта: относительное изменение $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{F}$ равно 10^{-6}

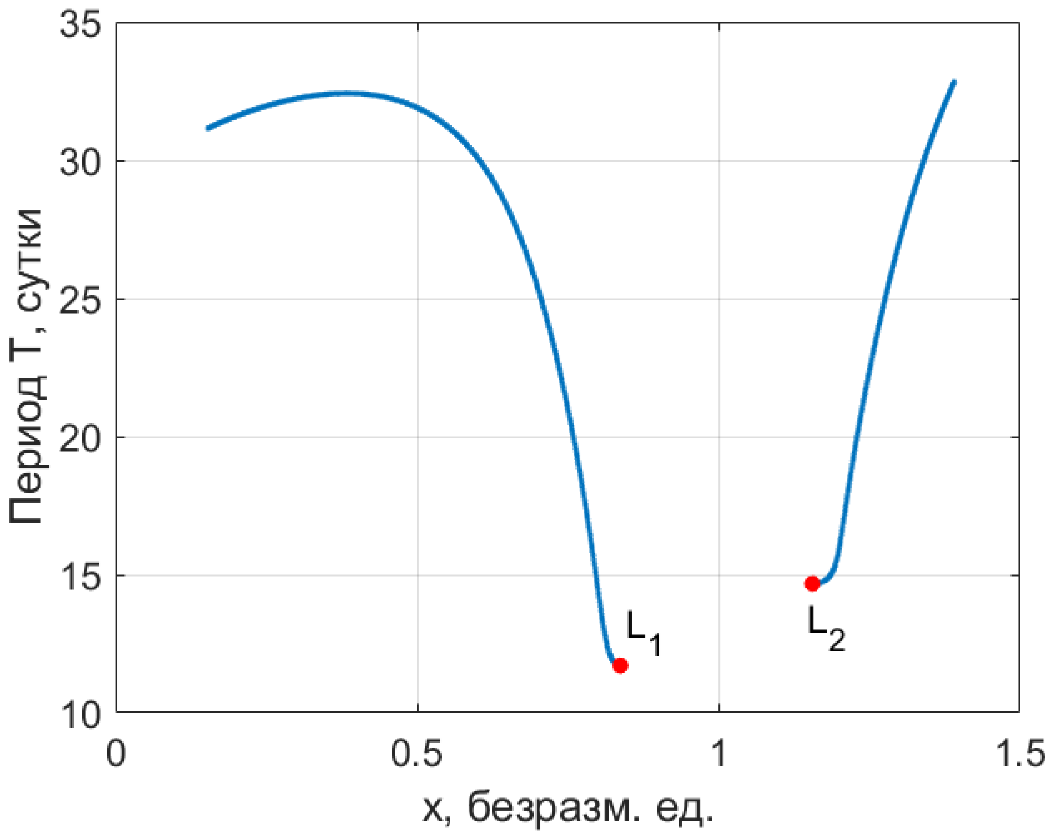
Вложенный метод Рунге–Кутты 5(4): абсолютная и относительная точность 10^{-6}

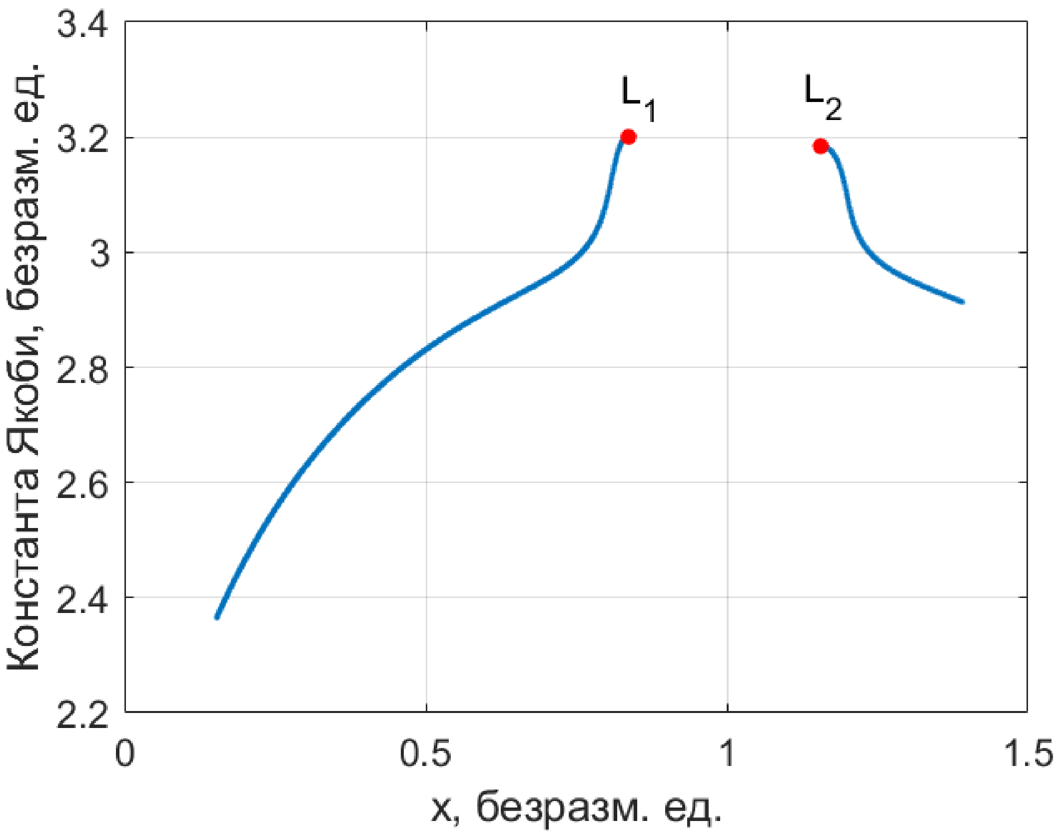
Рассчитанные семейства плоских орбит Ляпунова вокруг точек либрации L_1 и L_2 в системе Земля–Луна



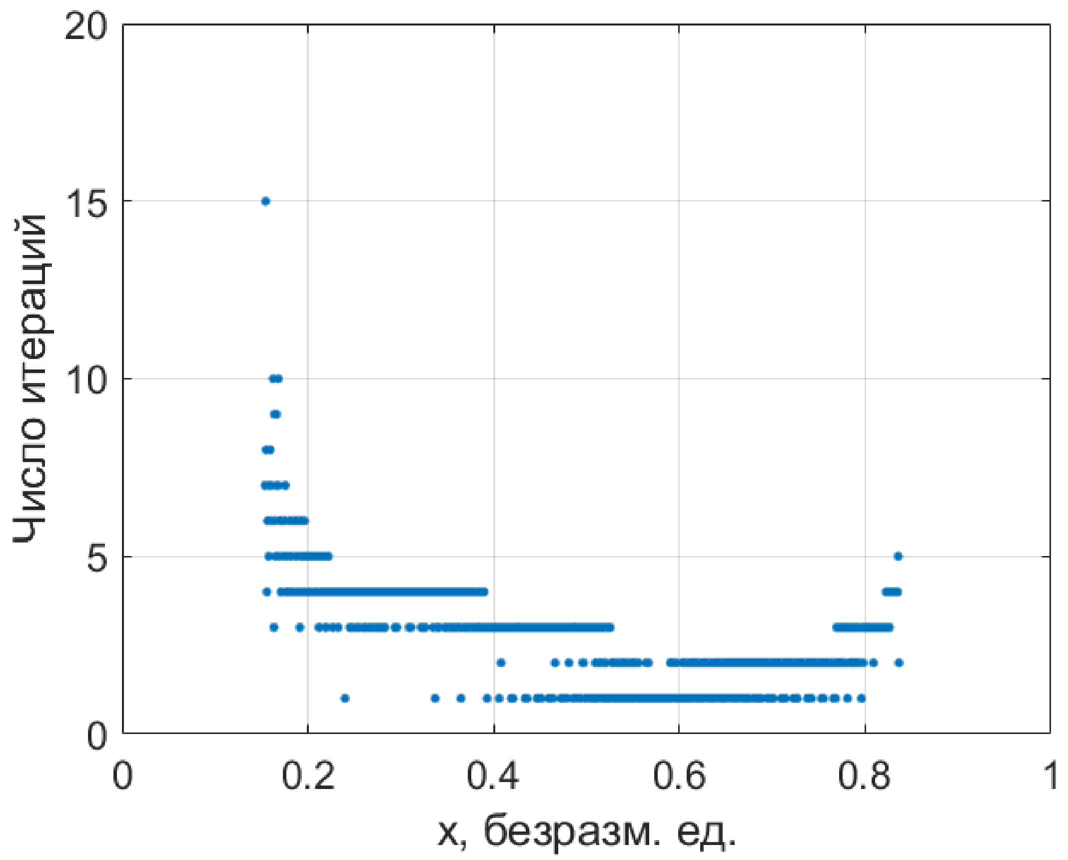


Периоды и константы Якоби плоских орбит Ляпунова вокруг точек либрации L1 и L2 в системе Земля–Луна

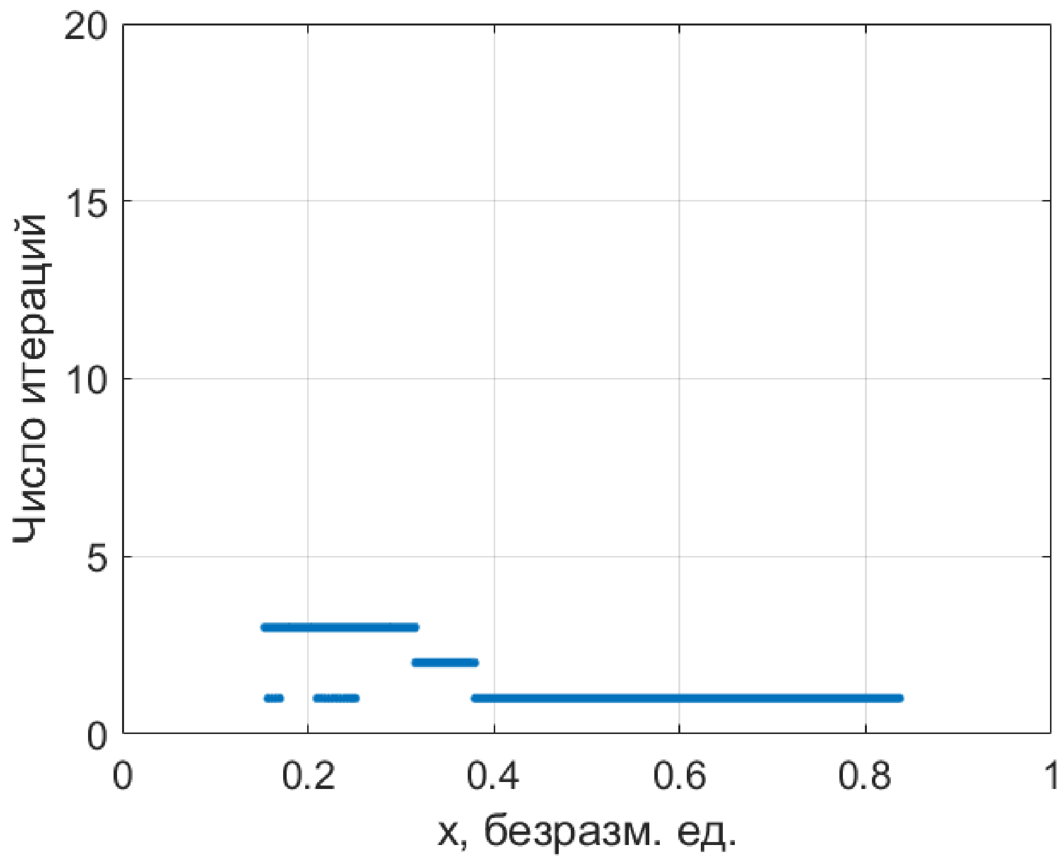




Число итераций в корректирующей процедуре при определении орбит не из таблицы



Шаг табуляции $\Delta = 10^{-3}$



Шаг табуляции $\Delta = 10^{-4}$

Выводы

- Метод продолжения в комбинации с методом дифференциальной коррекции позволил провести табуляцию семейства периодических орбит Ляпунова от точек либрации до орбит, пересекающих поверхность одного из главных тел
- Составлены таблицы, содержащие фазовые векторы, периоды и константы Якоби орбит полученных семейств
- Численный эксперимент показал, что с использованием таблиц можно построить произвольную орбиту из выбранного семейства за не более чем три итерации

Спасибо за внимание!

Дополнительные слайды с формулами, графиками, таблицами

Линеаризованные уравнения движения:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(\dot{x}, \dot{y}, 2\dot{y} + U_x, -2\dot{x} + U_y\right)^T$$

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_L$$

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x},$$

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_L} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{2\times2} & \mathbf{I}_{2\times2} \\ U_{rr} & \begin{matrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_L}$$

Решение линеаризованной системы уравнений:

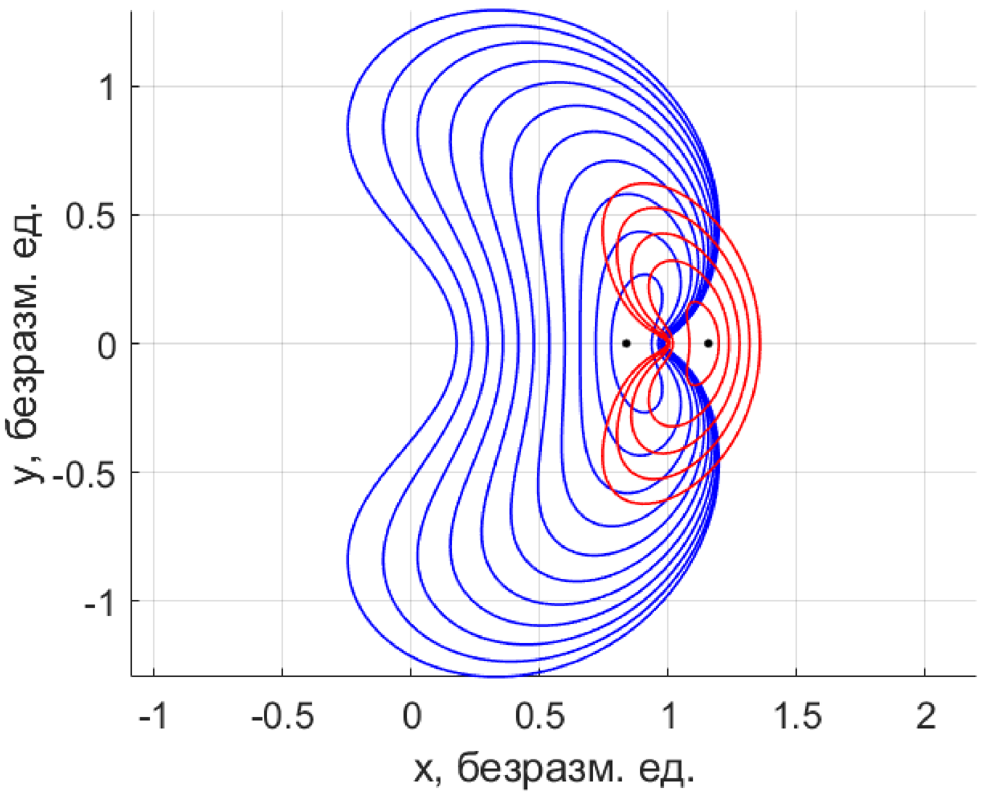
$$\delta\mathbf{x} = \alpha_1 e^{\lambda t}\mathbf{u}_1 + \alpha_2 e^{-\lambda t}\mathbf{u}_2 + 2\mathrm{Re}(\beta e^{i\nu t}\mathbf{w}_1)$$

$$\tau = \frac{-(\nu^2 + 2\bar{\mu} + 1)}{2\nu}$$

$$\nu = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\bar{\mu} - 2 - \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}}\right)}$$

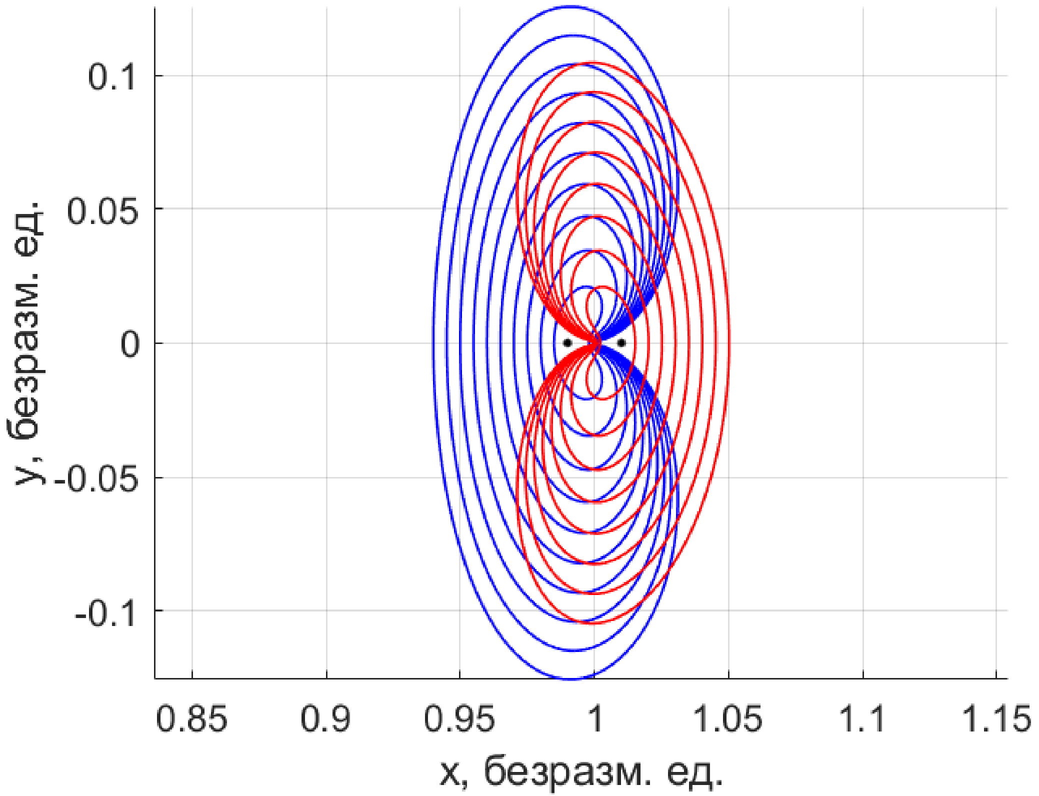
$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{(x_L - 1 + \mu)^3} + \frac{1 - \mu}{(x_L + \mu)^3}$$

Дополнительные слайды с формулами, графиками, таблицами



Система Земля–Луна

$$\mu = 1.2150668 \cdot 10^{-2}$$



Система Солнце–Земля

$$\mu = 3.0404234 \cdot 10^{-6}$$