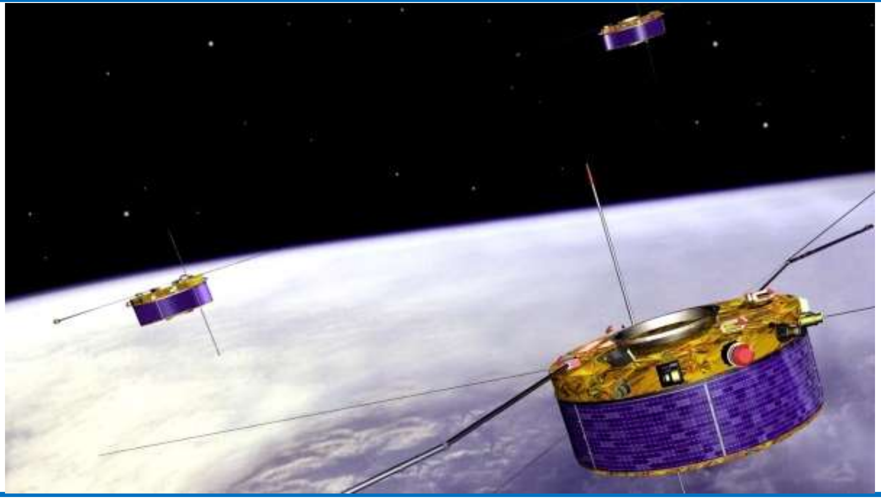
63-я научная конференция МФТИ
23 ноября 2020

Исследование точности моделей относительного движения космических аппаратов в групповом полете

Ирина Суслова, Ярослав Маштаков, Сергей Шестаков

Введение

Все большее распространение миссий с участием двух и более космических аппаратов, летящих на близком расстоянии



Необходимость в построении эффективных алгоритмов управления

Разработка достаточно простых и точных моделей относительного движения

Постановка задачи

Исходные данные:

- *Два спутника движутся по близким околокруговым орбитам*
- *Известны начальные радиус-вектор и вектор скорости двух спутников*
- *Орбиту главного спутника считаем круговой, а относительное расстояние между спутниками достаточно мало по сравнению с размерами орбит*

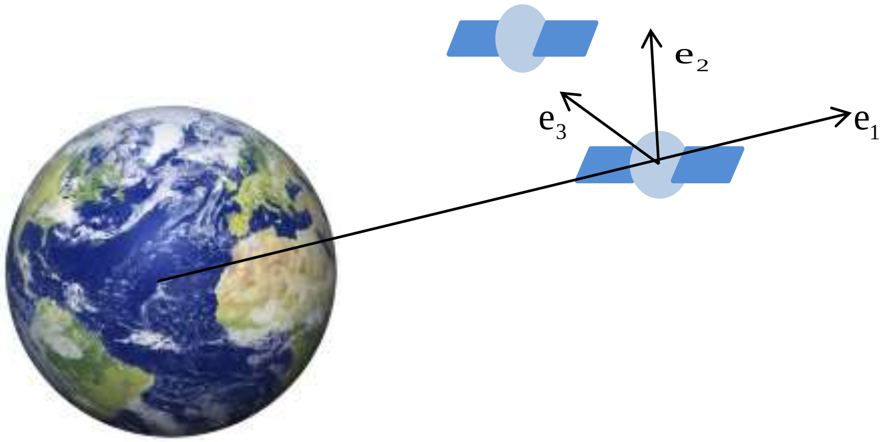
Цель работы:

- *Реализовать модели относительного движения*
- *Протестировать различные модели в зависимости от размеров характерных орбит*
- *Выявить достаточно точную, но в то же время простую модель для описания движения*

Уравнения относительного движения

Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} + n^2 z = 0 \end{cases}$$



Где $n = \sqrt{\frac{\mu}{r_1^3}}$ -среднее движение, μ -гравитационный параметр Земли.

Решение имеет вид:

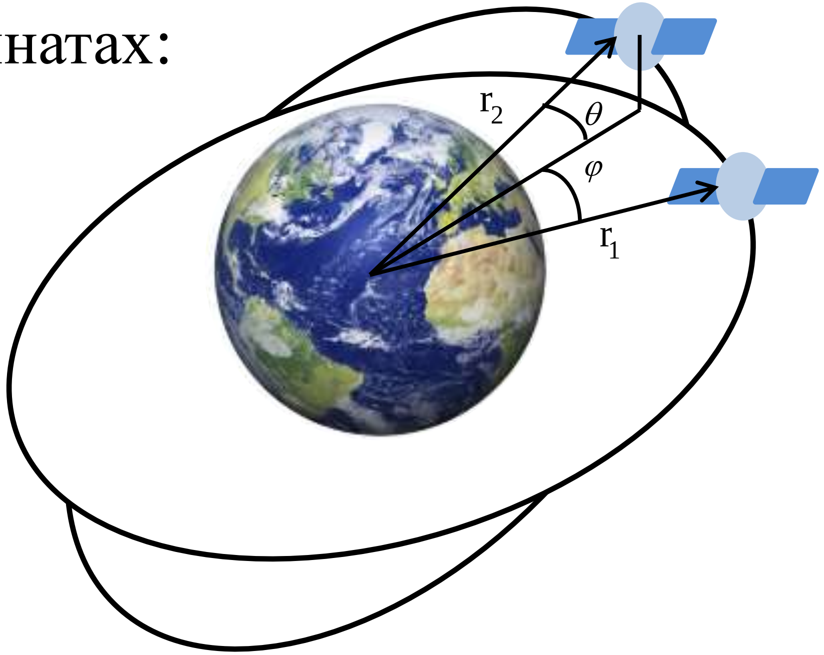
$$\begin{cases} x(t) = 2C_1 + C_2\sin(nt) + C_3\cos(nt) \\ y(t) = -3C_1nt + C_4 + 2C_2\cos(nt) - 2C_3\sin(nt) \\ z(t) = C_5\cos(nt) + C_6\sin(nt) \end{cases}$$

Где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ –константы интегрирования

Уравнения относительного движения

Уравнения движение в криволинейных координатах:

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - 2n(r_1\dot{\varphi}) - 3n^2\rho = 0 \\ (r_1\ddot{\varphi}) + 2n\dot{\rho} = 0 \\ (r_1\ddot{\theta}) + n^2(r_1\theta) = 0 \end{cases}$$



Где $\rho = |r_2| - |r_1|$

Решение имеет вид, аналогичный решению уравнению ХКУ:

$$\begin{cases} \rho(\mathrm{t}) = 2\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2\sin(\mathrm{nt}) + \mathrm{C}_3\cos(\mathrm{nt}) \\ \mathrm{r}_1\varphi(\mathrm{t}) = -3\mathrm{C}_1\mathrm{nt} + \mathrm{C}_4 + 2\mathrm{C}_2\cos(\mathrm{nt}) - 2\mathrm{C}_3\sin(\mathrm{nt}) \\ \mathrm{r}_1\vartheta(\mathrm{t}) = \mathrm{C}_5\cos(\mathrm{nt}) + \mathrm{C}_6\sin(\mathrm{nt}) \end{cases}$$

“Хилловские” константы

Замена переменных

$$\begin{cases} \rho = C_{inplane}\sin\psi + 2C_{drift} \\ r_1\varphi = 2C_{inplane}\cos\psi + C_{shift} \\ r_1\theta = C_{outplane}\sin\xi \\ \dot{\rho} = C_{outplane} n\cos\psi \\ (r_1\dot{\varphi}) = -2C_{inplane} n\sin\psi - 3C_{drift} n \\ (r_1\dot{\theta}) = C_{outplane} n\cos\xi \end{cases}$$

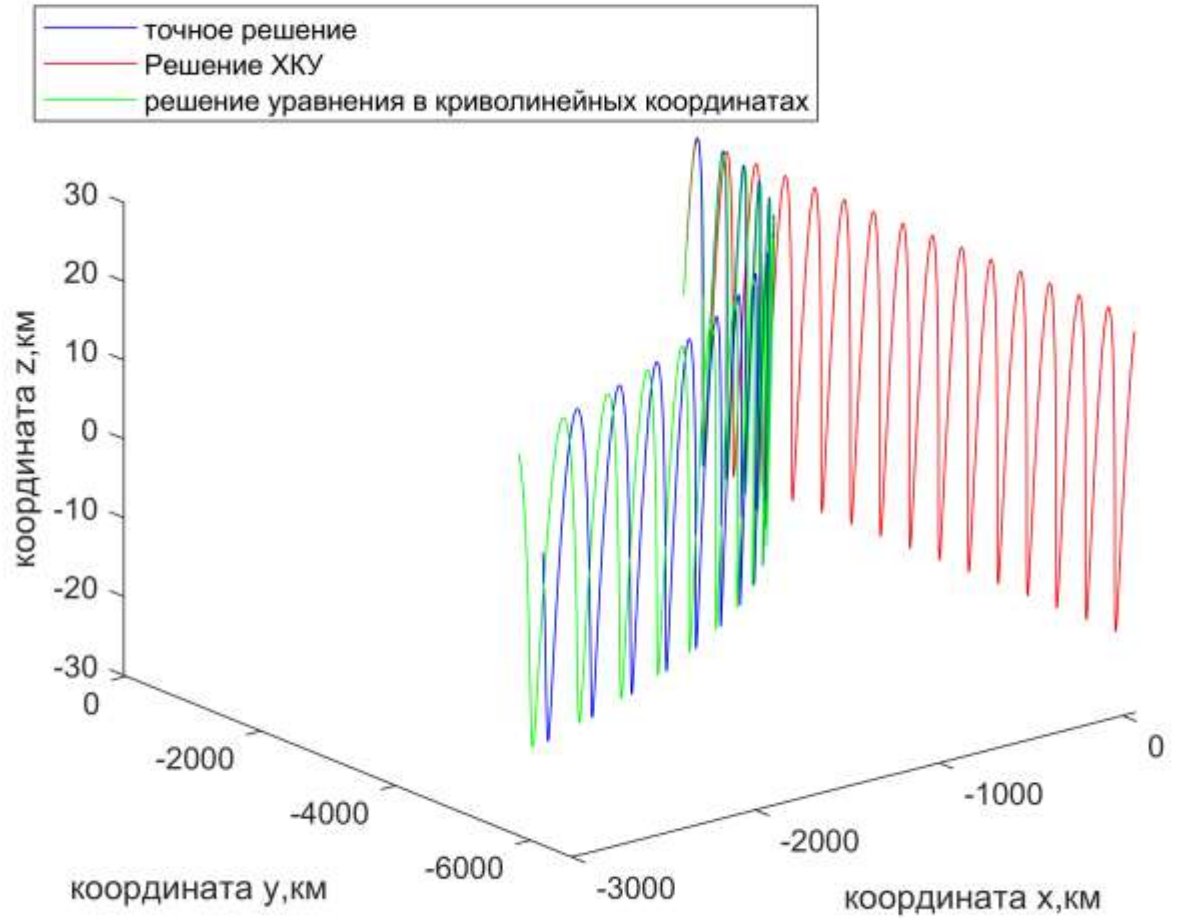
Константы $C_{drift}, C_{shift}, C_{inplane}, C_{outplane}, \psi, \xi$ интегрирования составляют хилловские константы.

Константы $C_{inplane}$ и $C_{outplane}$ отвечают за амплитуды колебаний спутника в плоскости орбиты и перпендикулярно плоскости орбиты соответственно. Константа C_{drift} отвечает за дрейф спутников, а C_{shift} за сдвиг спутников вдоль направления скорости движения. Переменные ψ и ξ отвечают за фазу относительного движения спутника в плоскости орбиты и вне плоскости орбиты.

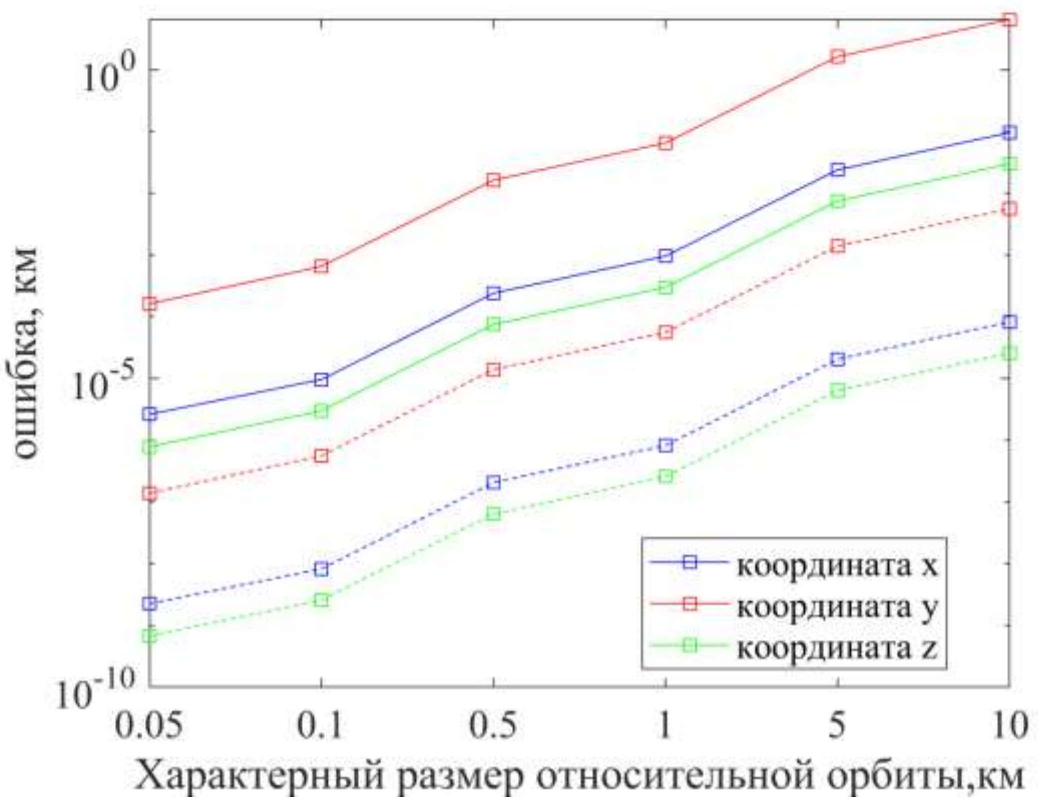
Методика получения результатов

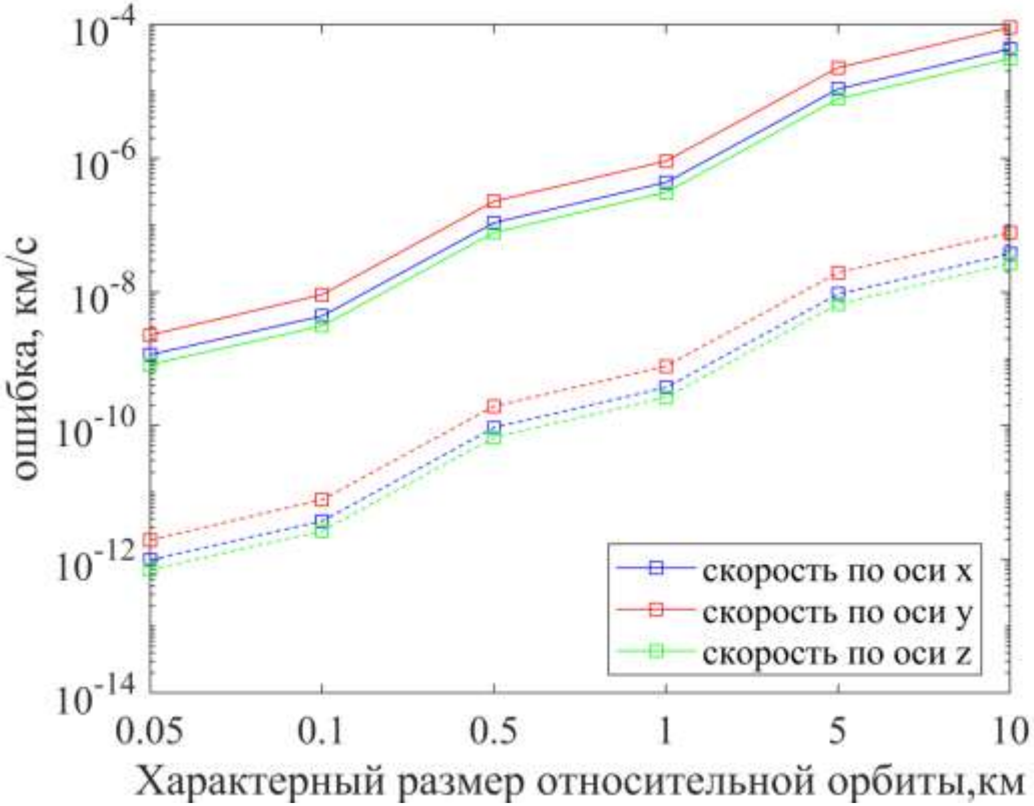
1. Задание начальных радиус-вектора и скорости главного спутника
2. Фиксация величины относительной орбиты, обнуление дрейфа, выбор фаз и величины сдвига из равномерного распределения
3. Получение начальных радиус-вектора и скорости второго спутника, исходя из хилловских констант
4. Задание небольшого возмущения начальных данных
5. Интегрирование уравнений относительного движения в различных моделях с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка за время, равное 1 суткам
6. Перевод полученных результатов интегрирования в орбитальную СК, связанную с первым спутником
7. Оценивание точности с помощью измерения среднего изменение компонент радиус-вектора и скорости относительных координат, полученных в п.6, за последний виток

Результаты моделирования



Результаты моделирования

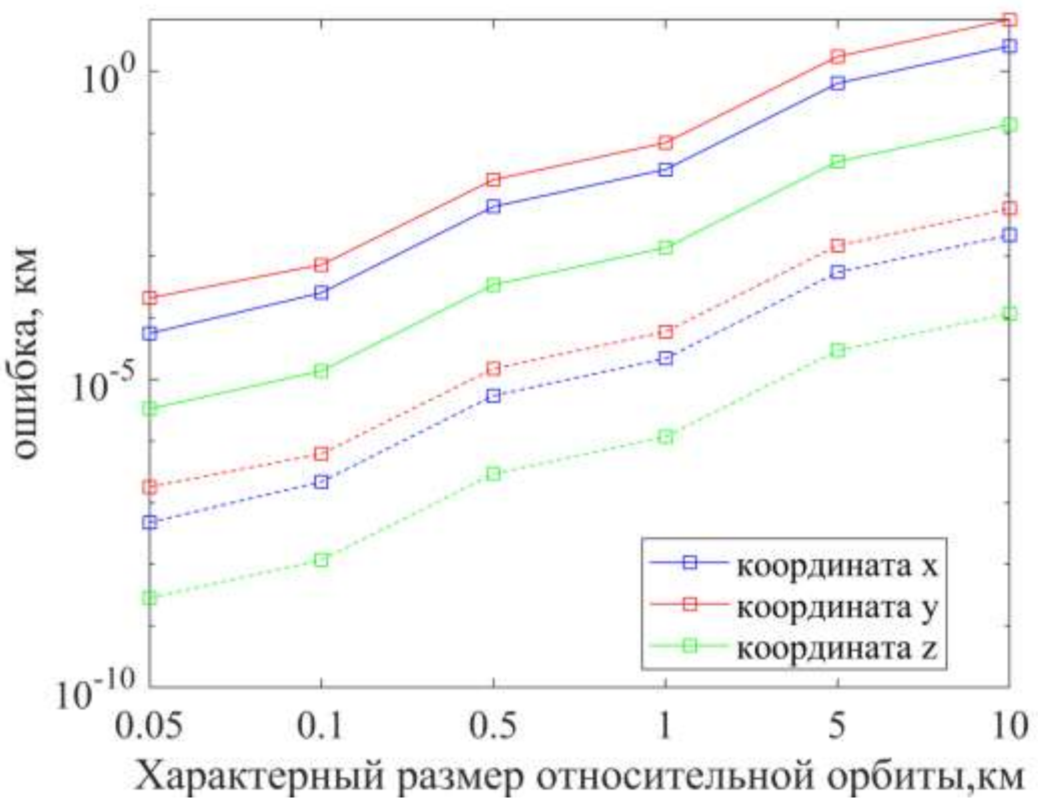


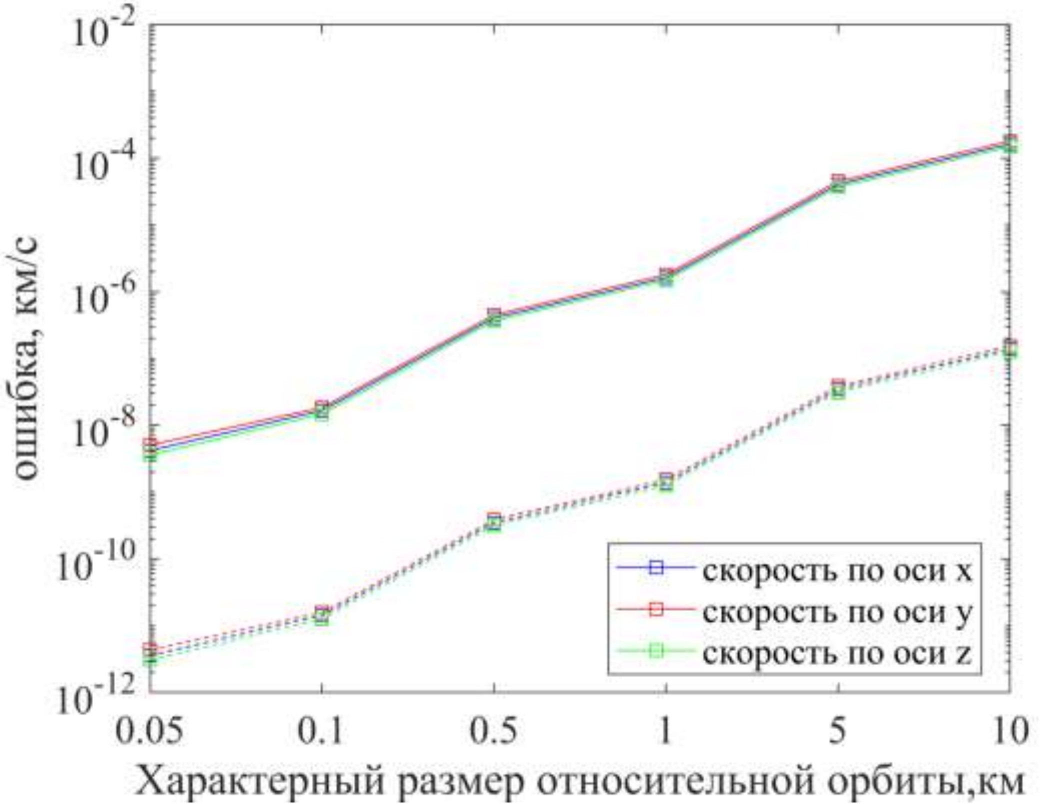


Возмущения начальных данных:

- r1: 0.001
- v1: 0.000001
- r2: 1% от характерного размера
- v2: 1% от характерного размера, умноженное на среднее движение n

Результаты моделирования

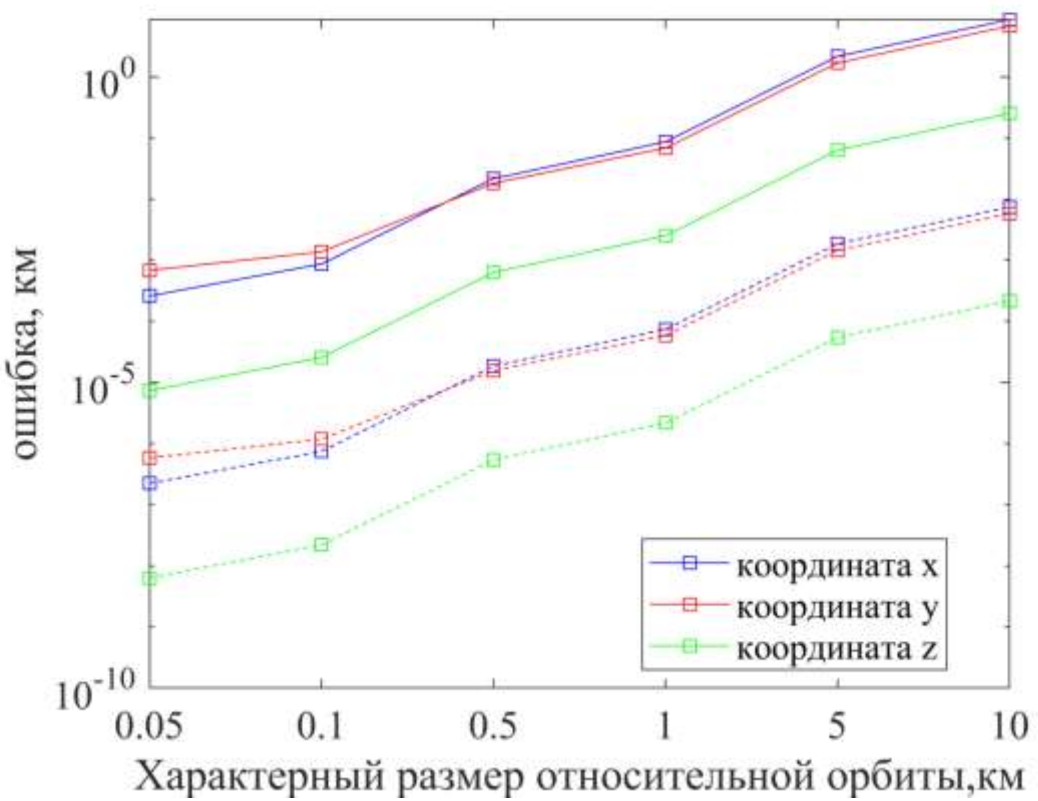


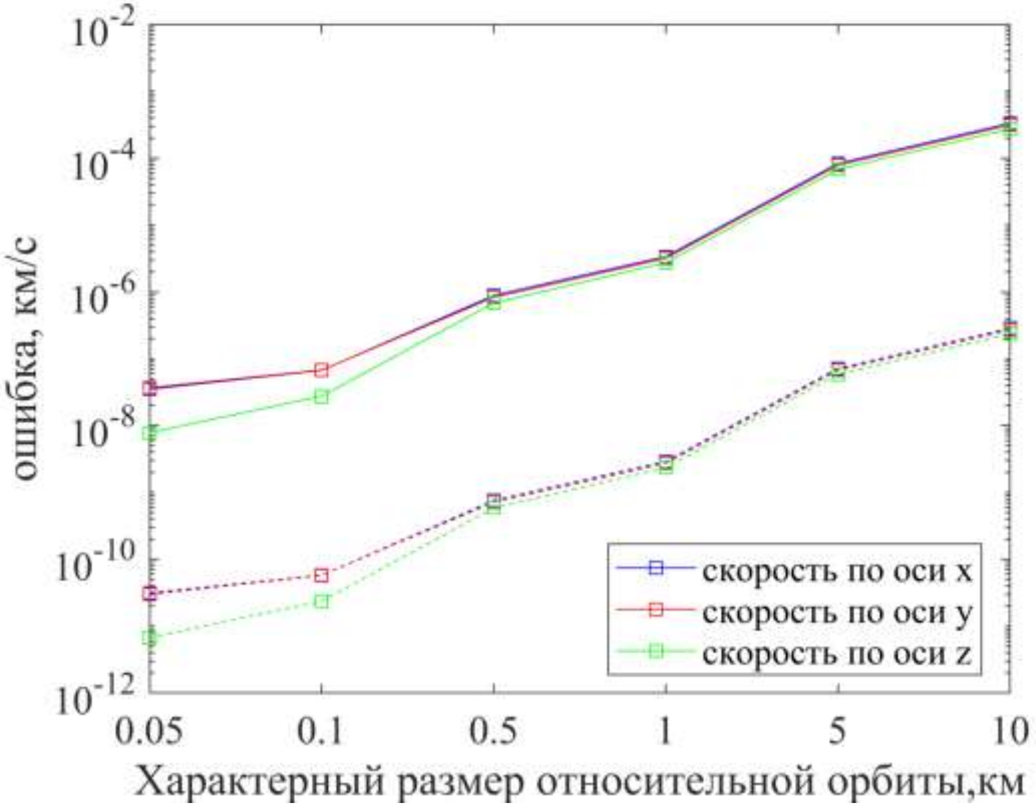


Возмущения начальных данных:

- r1: 0.01
- v1: 0.00001
- r2: 5% от характерного размера
- v2: 5% от характерного размера, умноженное на среднее движение n

Результаты моделирования

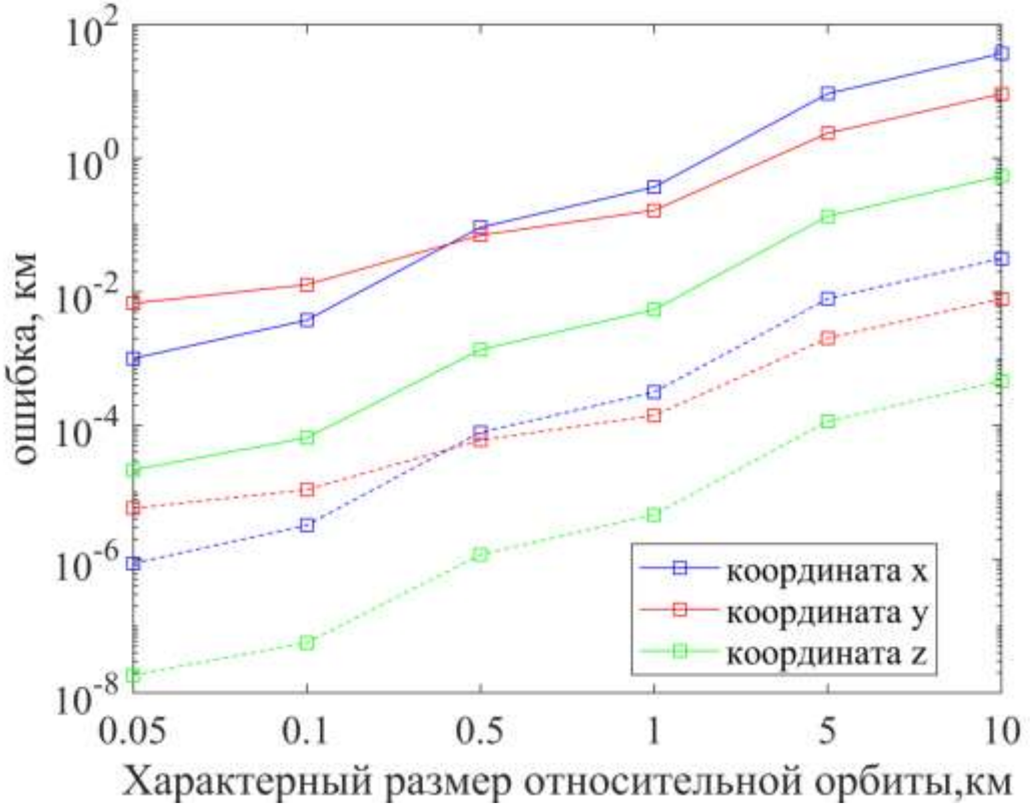


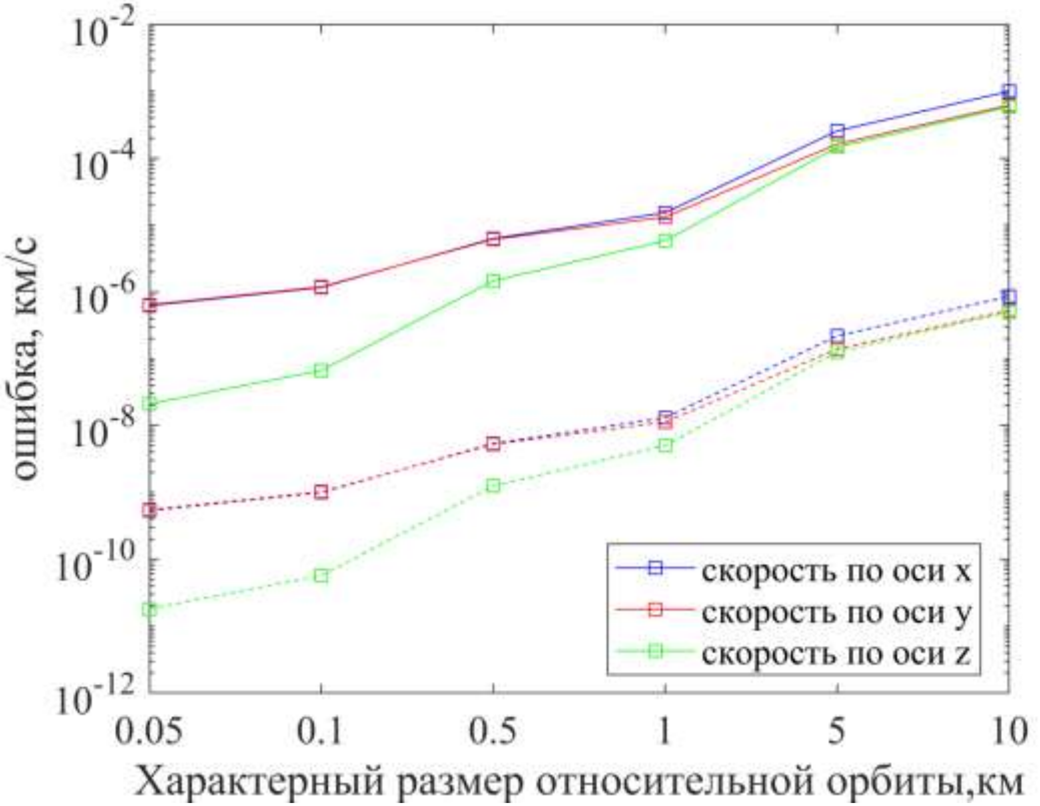


Возмущения начальных данных:

- r1: 0.1
- v1: 0.0001
- r2: 10% от характерного размера
- v2: 10% от характерного размера, умноженное на среднее движение n

Результаты моделирования





Возмущения начальных данных:

- r1: 1
- v1: 0.001
- r2: 20% от характерного размера
- v2: 20% от характерного размера, умноженное на среднее движение n

Дальнейшие направления исследований

- Добавление модели Швайгарта-Седвика
- Исследование зависимости точности моделей от эксцентриситета
- Добавление возмущений, отличных от центрального гравитационного поля
- Построение эффективных алгоритмов управления КА

Спасибо за внимание!

Приложение 1. Вывод уравнений ХКУ

Имеем уравнения движения: $\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -\dfrac{\mu\vec{r}_1}{r_1^3} \\ \ddot{\vec{r}}_1 = -\dfrac{\mu\vec{r}_2}{r_2^3} \end{cases}$

Пусть $\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Подставляем в уравнения движения и получаем: $\ddot{\vec{\rho}} = -\dfrac{\mu(\vec{r}_1 + \vec{\rho})}{\|\vec{r}_1 + \vec{\rho}\|^3} + \dfrac{\mu}{r_1^3} r_1$

С помощью теоремы Кориолиса о сложении ускорений и при условии, что главный спутник движется по круговой орбите, получаем уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n_0\dot{y} - n_0^2 x = -\dfrac{\mu(r_1 + x)}{\left[(r_1 + x)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{\mu}{r_1^2} \\ \ddot{y} - 2n_0\dot{x} - n_0^2 y = -\dfrac{\mu y}{\left[(r_1 + x)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{z} = \dfrac{\mu z}{\left[(r_1 + x)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Линеаризуем правую часть уравнений и получаем уравнения, называемые уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} + n^2 z = 0 \end{cases}$$

Приложение 2. Выражение криволинейных координат

Орты СК: $e_1 = \frac{r_1}{|r_1|}$, $e_2 = (e_3 \times e_1)$, $e_3 = \frac{(r_1 \times v_1)}{|(r_1 \times v_1)|}$

Криволинейные координаты: ρ, φ, θ

Выражение декартовых координат через криволинейные координаты:

$$\rho = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1| \ , \ \dot{\rho} = \frac{(r_2, v_2)}{|r_2|} - \frac{(r_1, v_1)}{|r_1|}$$

Для выражения углов нам понадобится следующие уравнения

$$\begin{cases} \vec{r}_2 = (r_1 + a)\left(\vec{e}_1 \cos\theta\cos\varphi + \vec{e}_2 \cos\theta\sin\varphi + \vec{e}_3 \sin\theta\right) \\ \vec{v}_2 = (\dot{r}_1 + \dot{a})\left(\vec{e}_1 \cos\theta\cos\varphi + \vec{e}_2 \cos\theta\sin\varphi + \vec{e}_3 \sin\theta\right) + (r_1 + a)\left((\omega \times e_1)\cos\theta\cos\varphi + (\omega \times e_2)\cos\theta\sin\varphi + (\omega \times e_3)\sin\theta\right) + \\ +(r_1 + a)\left(\vec{e}_1(-\sin\theta\cos\varphi\dot{\theta} - \cos\theta\sin\varphi\dot{\varphi}) + \vec{e}_2(-\sin\theta\sin\varphi\dot{\theta} + \cos\theta\cos\varphi\dot{\varphi}) + \vec{e}_3 \cos\theta\dot{\theta}\right) \end{cases}$$

Домножаем первое уравнение система на e_3 и выражаем θ: $\theta = \operatorname{asin}\left(\frac{(r_2, e_3)}{|r_2|}\right)$

Домножаем первое уравнение система на e_2 и выражаем φ: $\varphi = \operatorname{asin}\frac{(\vec{r}_2, \vec{v}_2)}{|\vec{r}_2|\cos\theta}$

Домножаем второе уравнение системы на e_3 и выражаем $\dot{\theta}$: $\dot{\theta} = \frac{(\vec{v}_2, \vec{e}_3)}{|\vec{r}_2|\cos\theta} - \frac{(\vec{r}_2, \vec{v}_2)}{|\vec{r}_2|}\frac{\mathrm{tg}\varphi}{|\vec{r}_2|} + (\vec{e}_2, \vec{\omega})\cos\varphi - (\vec{e}_1, \vec{\omega})\sin\varphi$

Домножаем первое уравнение система на e_2 и выражаем $\dot{\varphi}$: $\dot{\varphi} = \frac{(\vec{v}_2, \vec{e}_2)}{|\vec{r}_2|\cos\theta\cos\varphi} - \frac{\left(\frac{(\vec{v}_1, \vec{r}_1)}{|\vec{r}_1|} + \dot{\rho}\right)}{|\vec{r}_2|}\mathrm{tg}\varphi - (\vec{e}_3, \vec{\omega}) + \frac{(\vec{e}_1, \vec{\omega})\mathrm{tg}\theta}{\cos\varphi} + \dot{\theta}\mathrm{tg}\varphi\mathrm{tg}\theta$