63-научная конференция МФТИ
23-29 ноября

Построение оптимальной траектории КА с использованием кривых, заполняющих пространство

Тарасов А.А.
Московский физико-технический институт

Трофимов С.П.
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

План доклада

- Задача оптимального перелета
- Сведение многомерной задачи к одномерной с помощью кривых Пеано
- Одномерные алгоритмы безградиентной оптимизации
- Проблемы метода и идеи для ускорения

Задача оптимального управления

- $J = \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt$
- $J = \int_{t_0}^{t_f} dt$
- $J = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{a}_{\text{тяги}} dt$
- $J = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{a}_{\text{тяги}}^2 dt$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} \\ \dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a}_{\text{внеш}} + \boldsymbol{a}_{\text{тяги}} \end{cases}$$

$\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}_0$

$\boldsymbol{r}(t_f) = \boldsymbol{r}_f, \boldsymbol{v}(t_f) = \boldsymbol{v}_f$

Применение принципа максимума Понтрягина

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{a}_{\text{тяги}}^2 dt \ \rightarrow min$$

$$\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}_0$$

$$\boldsymbol{r}(t_f) = \boldsymbol{r}_f, \boldsymbol{v}(t_f) = \boldsymbol{v}_f$$

Задача оптимального управления

$\downarrow$

$$H = -\frac{\boldsymbol{a}_{\text{тяги}}^2}{2} + \boldsymbol{p}_r\boldsymbol{v} + \boldsymbol{p}_v(\boldsymbol{a}_{\text{тяги}} + \boldsymbol{a}_{\text{внеш}})$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{тяги}} = \boldsymbol{p}_v$$

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{p}_v \\ \ddot{\boldsymbol{p}}_v = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \boldsymbol{r}^2} \boldsymbol{p}_v \end{cases}$$

Краевая задача

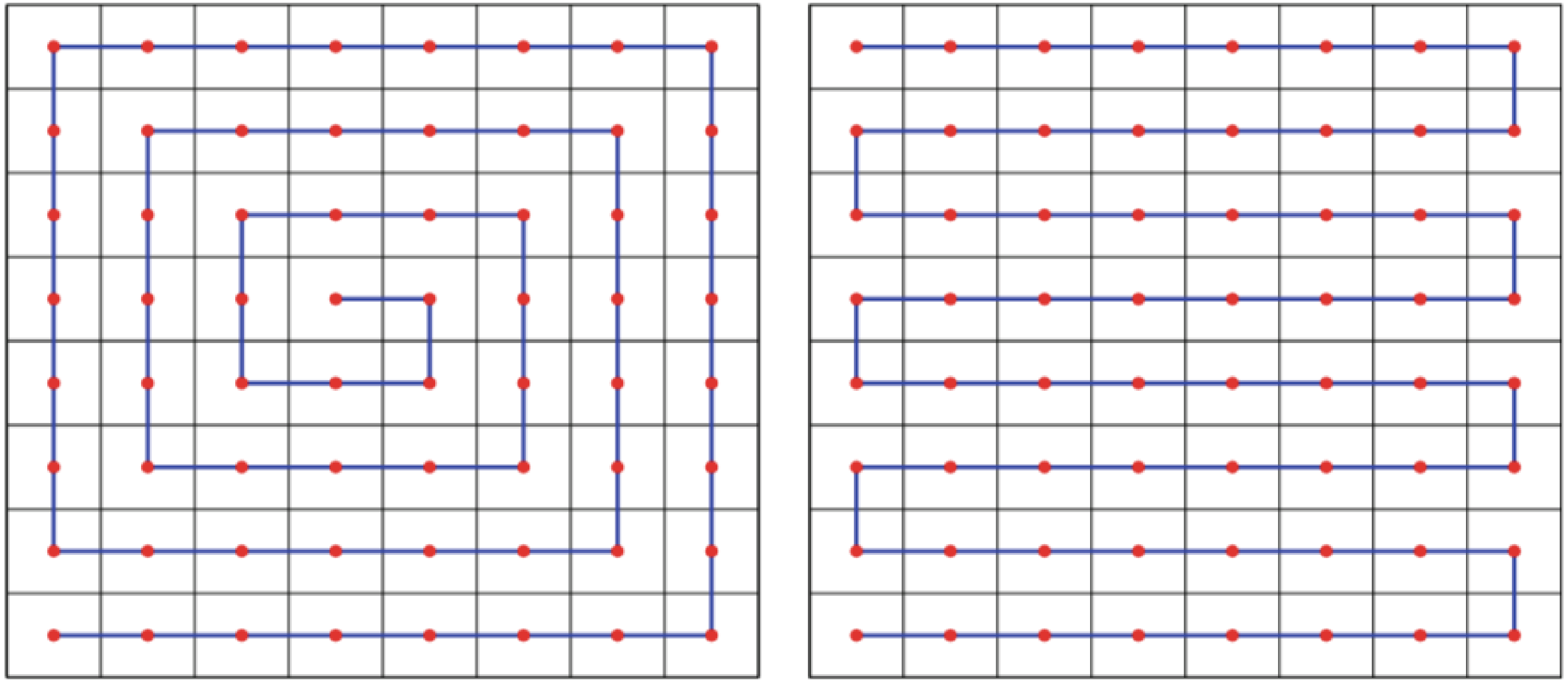
$\downarrow$

$$\boldsymbol{z} = \left(\boldsymbol{p}_v(t_0), \dot{\boldsymbol{p}}_v(t_0)\right)$$

$$f(\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{r}(t_f) - \boldsymbol{r}_f)^2 + (\boldsymbol{v}(t_f) - \boldsymbol{v}_f)^2$$

Оптимизационная задача

Сведение многомерной задачи к одномерной

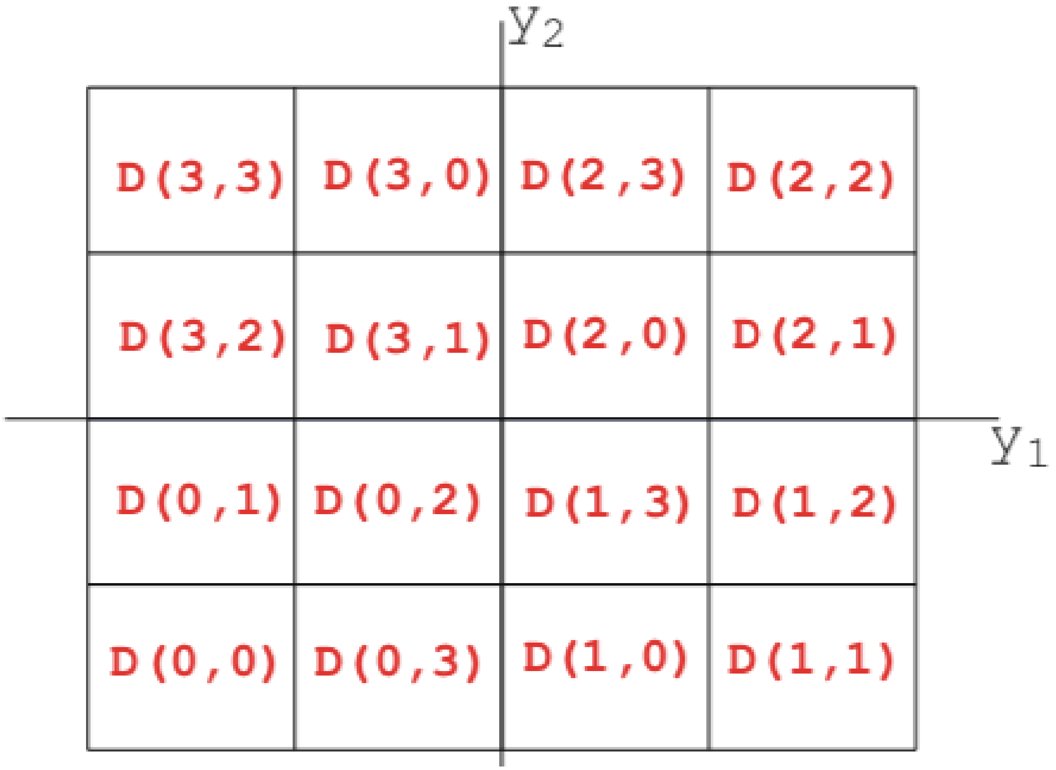


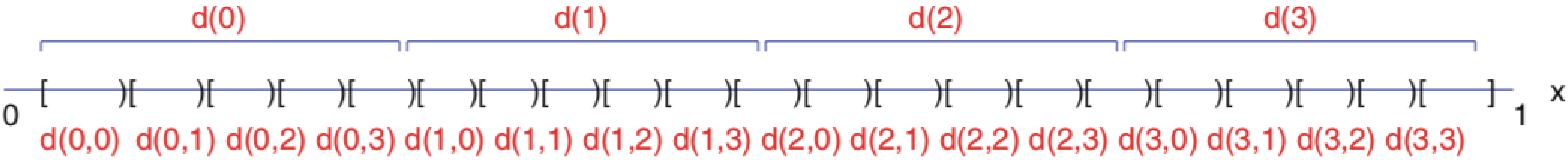
1. Кривая покрывает пространство равномерно
2. $F(y)$, $y \in \mathbb{R}^N$ липшицева, $f(x) = F\big(y(x)\big)$, $x \in \mathbb{R}$ гельдерова

Кривые Пеано…

Задача. Существует ли непрерывное сюръективное отображение отрезка на куб?

Да. Это отображение строится итерационно.





… и их аппроксимации

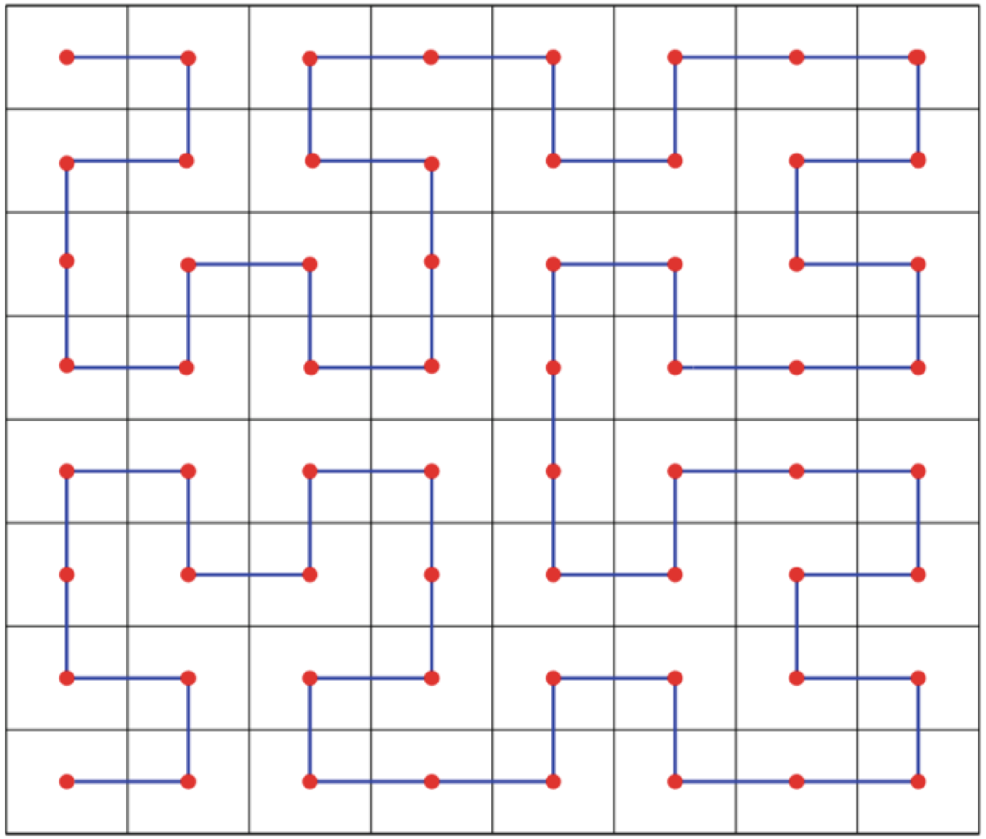
Липщецева функция с константой L

$\downarrow$

Гельдерова степени $1/N$

с константой $H = 2L\sqrt{N+3}$

$$F_{min} \geq F_{min}^{P} - 2^{(M+1)}L\sqrt{N}$$



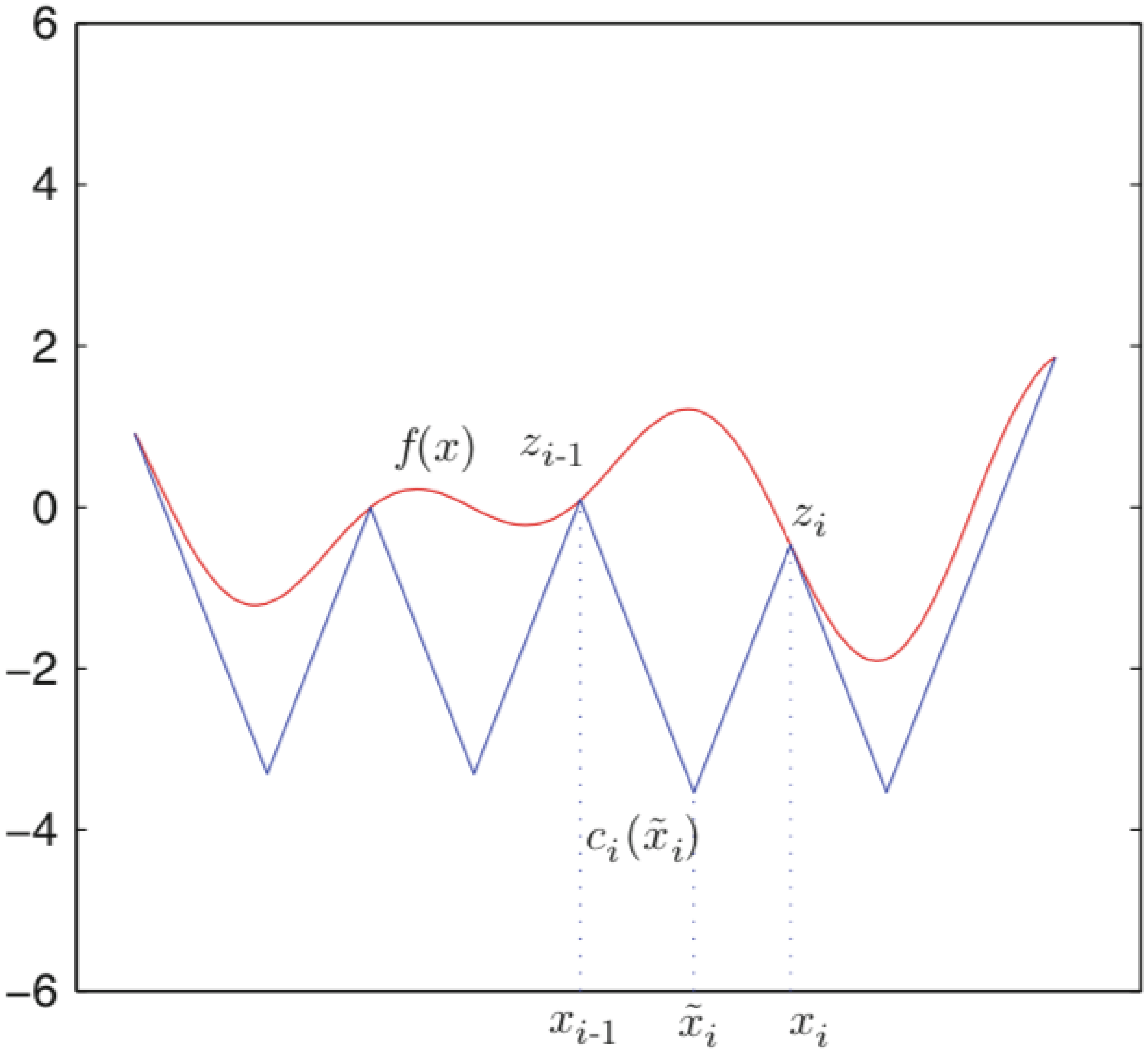
Метод Пиявского

$$C(x) = f(y) - L|x - y|$$

Миноранта ограничивает функцию снизу.

Следующая точка x выбирается как точка минимума миноранты.

Требуется знание константы Липшица!



Информационно-статистический подход

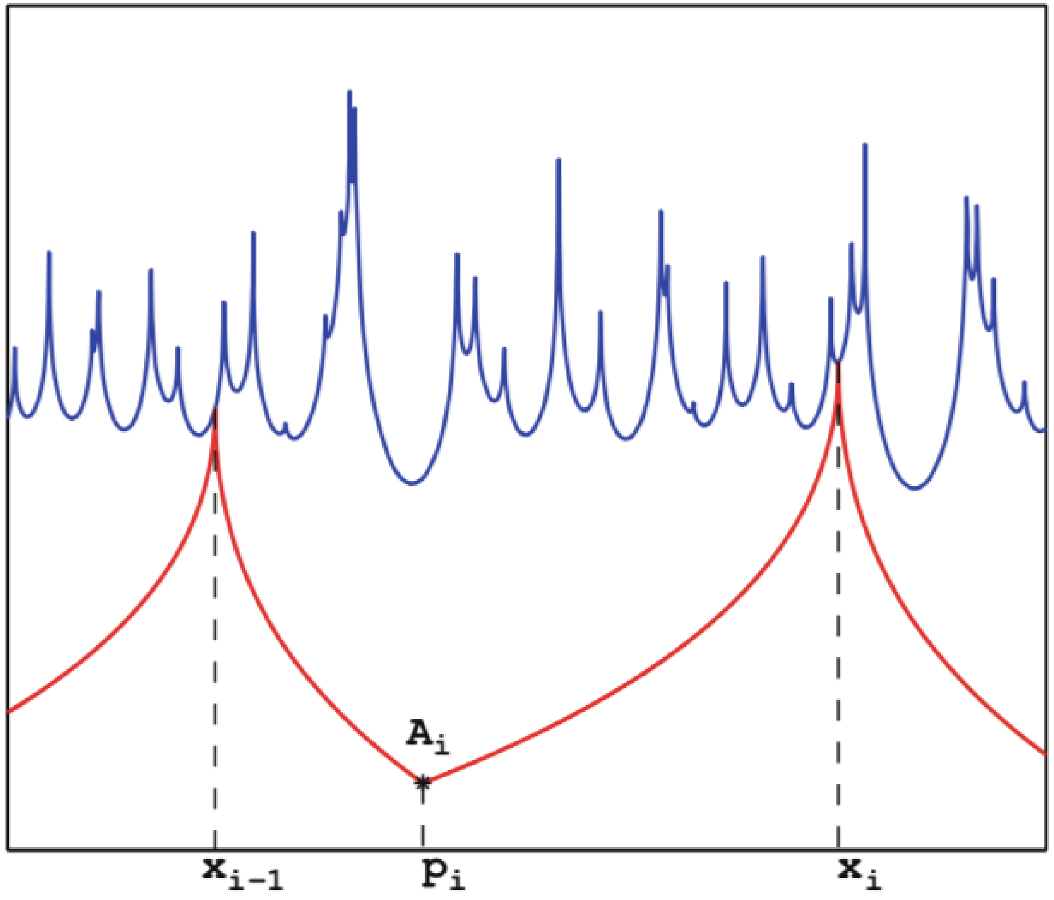
На каждом шаге метод выбирает отрезок, где наиболее вероятно находится минимум при данной информации

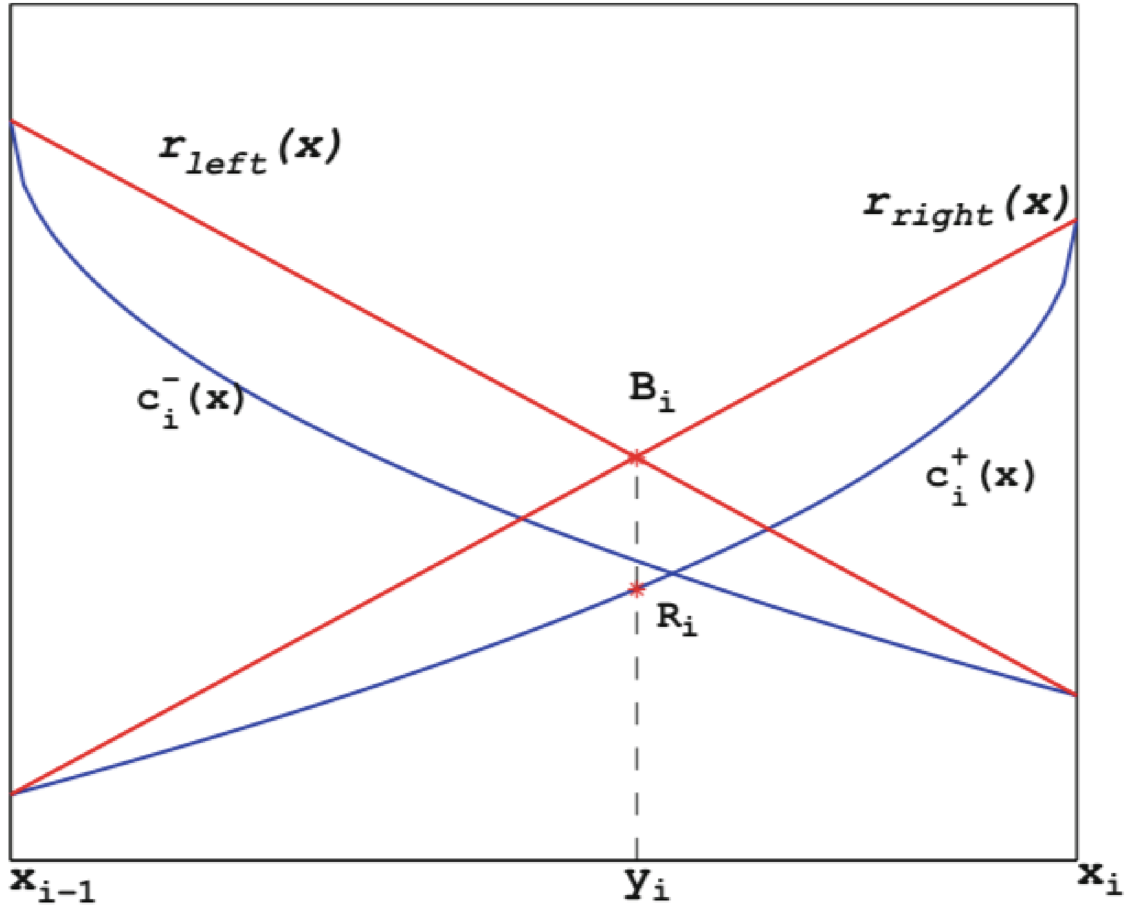
$$R_i = m(x_i - x_{i-1}) + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{m(x_i - x_{i-1})} - 2(z_i + z_{i+1})$$

Оценивает константу Липшица в процессе

$$m = \mathrm{r} \cdot \max \left| \frac{z_i - z_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right|$$

Гельдеровы функции. Геометрический подход





Информационно-статистический подход 2

$$R_i = h(x_i - x_{i-1})^{1/N} + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{h(x_i - x_{i-1})^{1/N}} - 2(z_i + z_{i+1})$$

$$h = \mathrm{r} \cdot \max\left|\frac{z_i - z_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^{1/N}}\right|$$

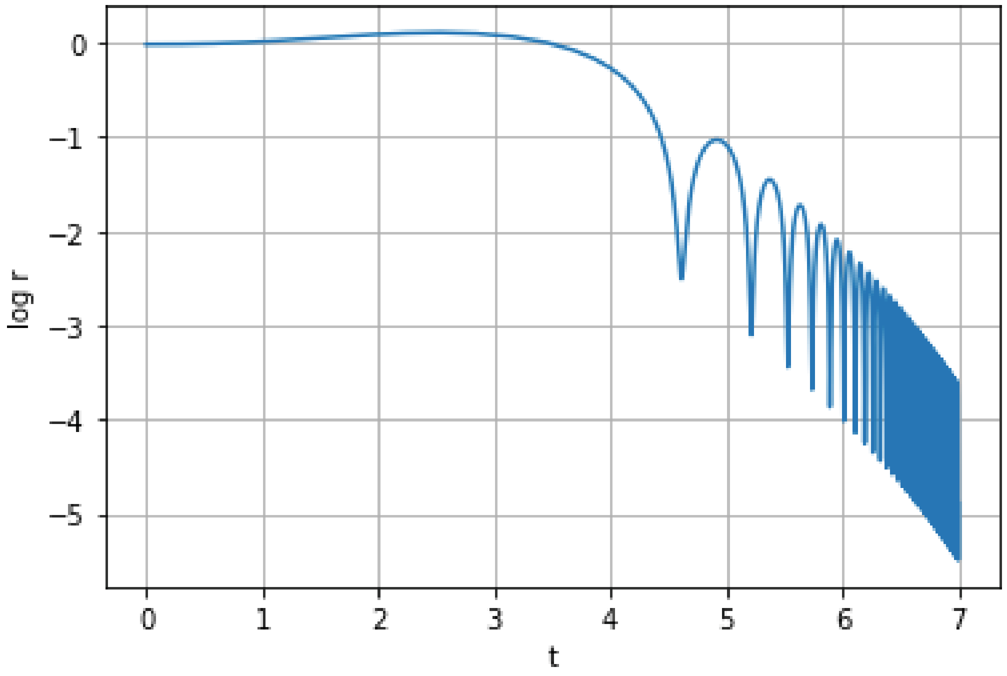
Точно так же можно адаптивно подбирать оценку константы Гельдера для геометрических методов

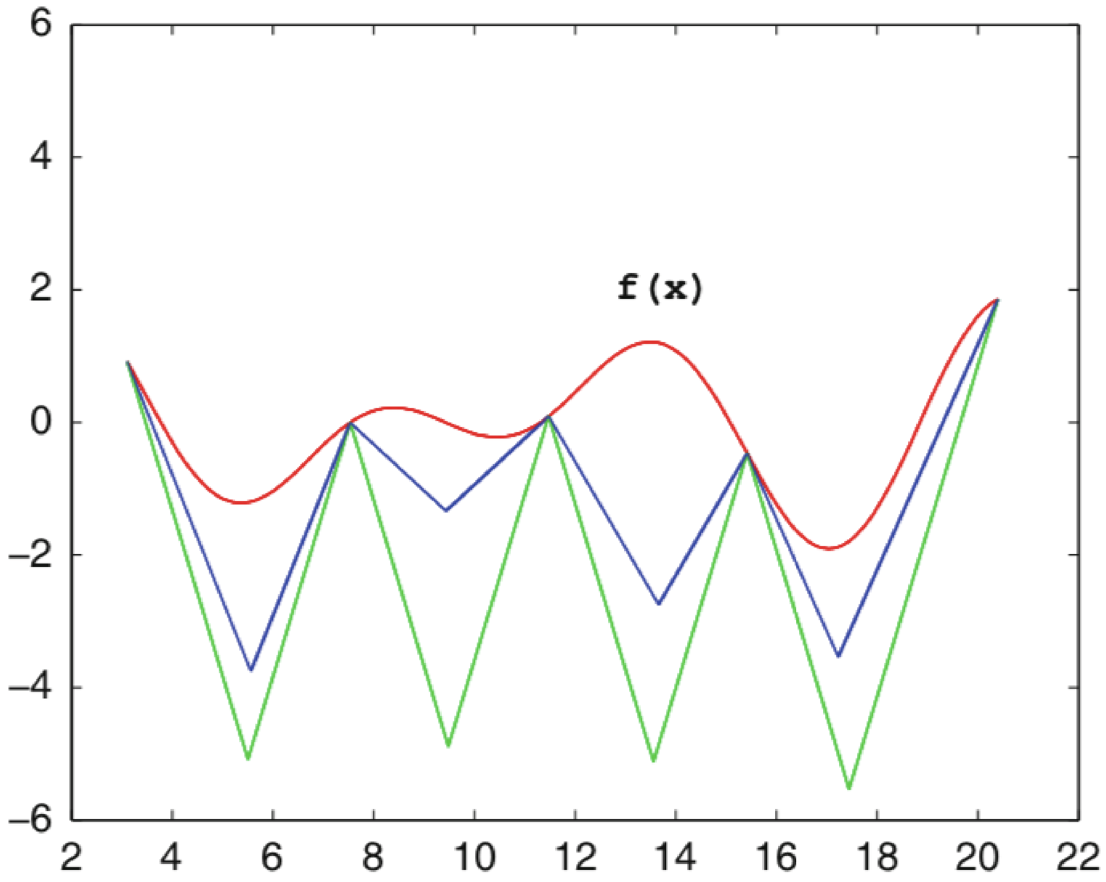
Для всех методов выше доказаны теоремы сходимости к глобальному минимуму при условии, что на каком-то шаге оценка превысит истинную константу Липшица

Проблемы и идеи их устранения

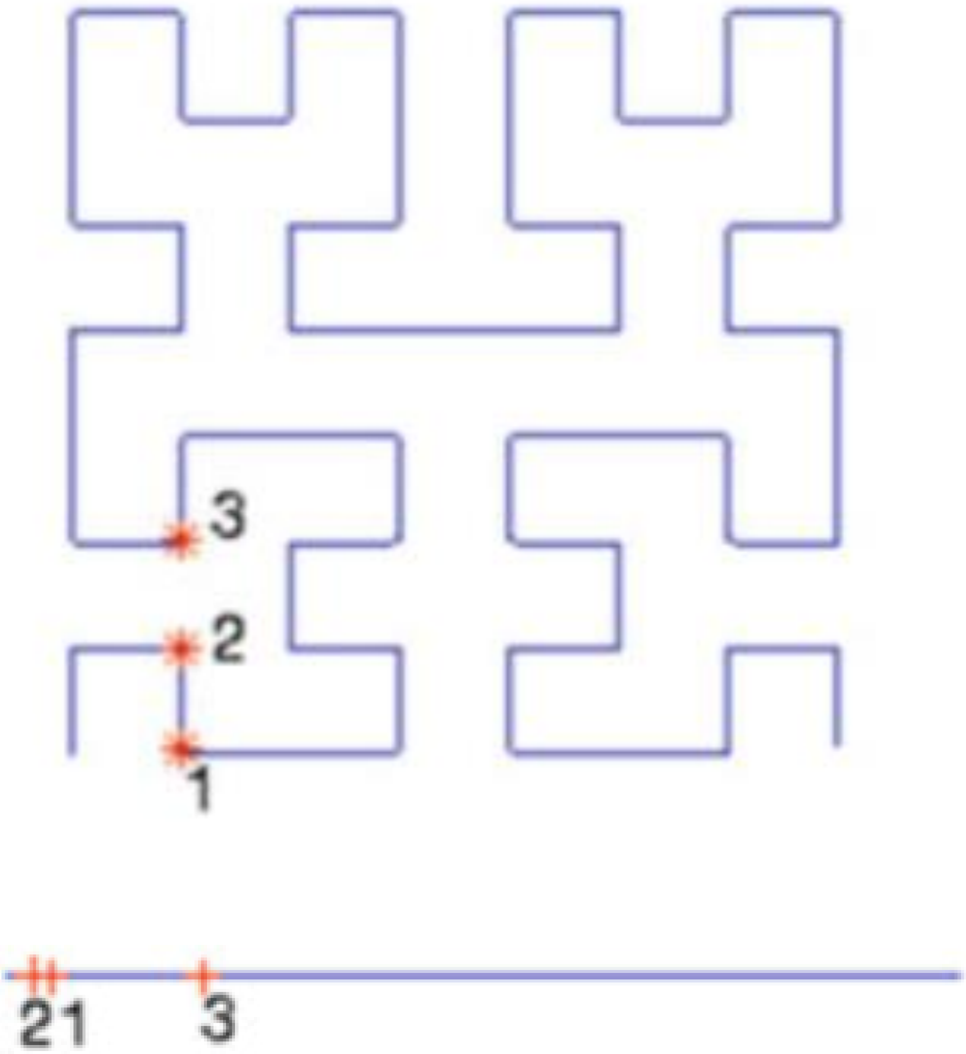
Можно искусственно исключать случаи приближения к Солнцу.

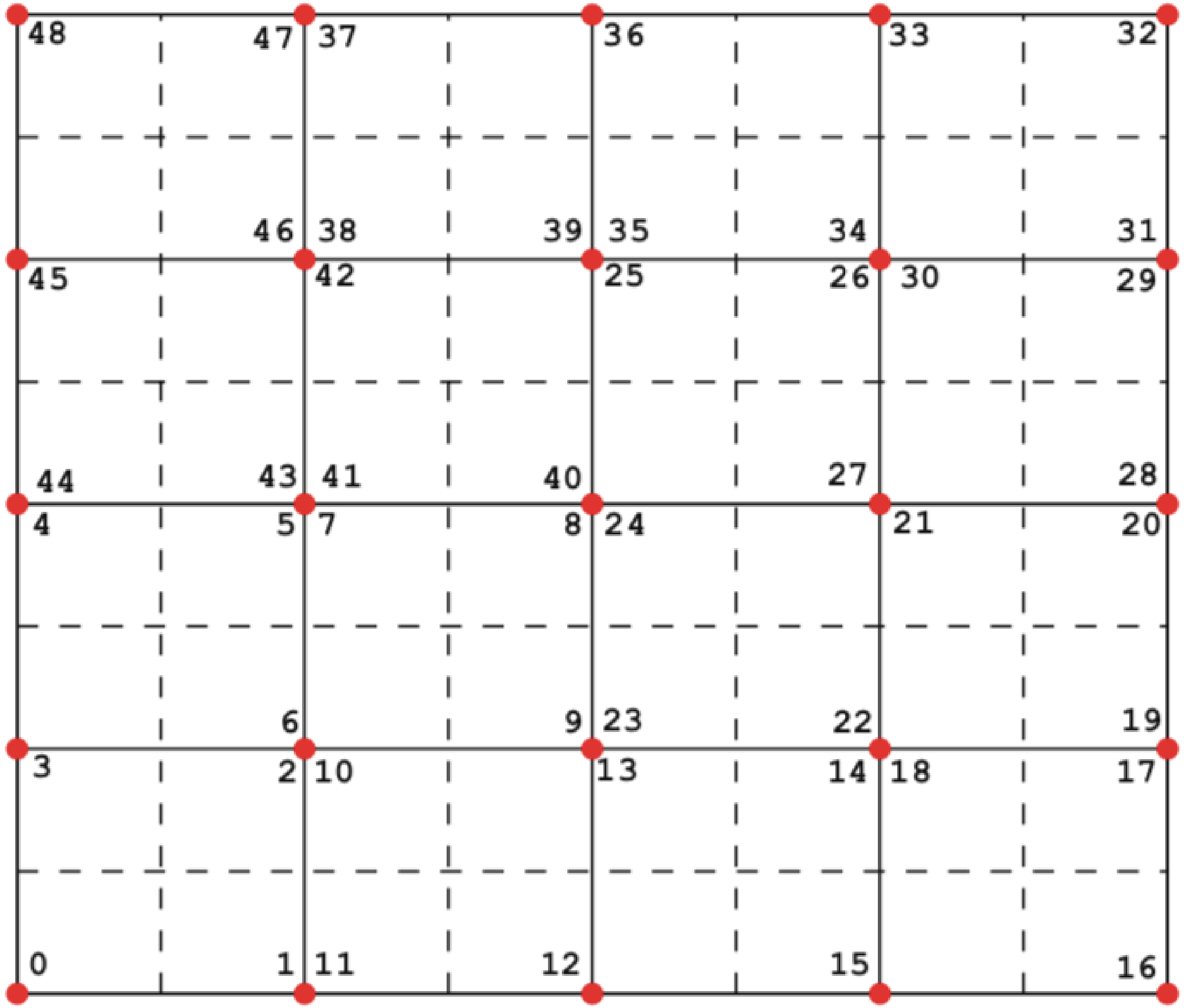
Можно использовать локальную оценку константы.



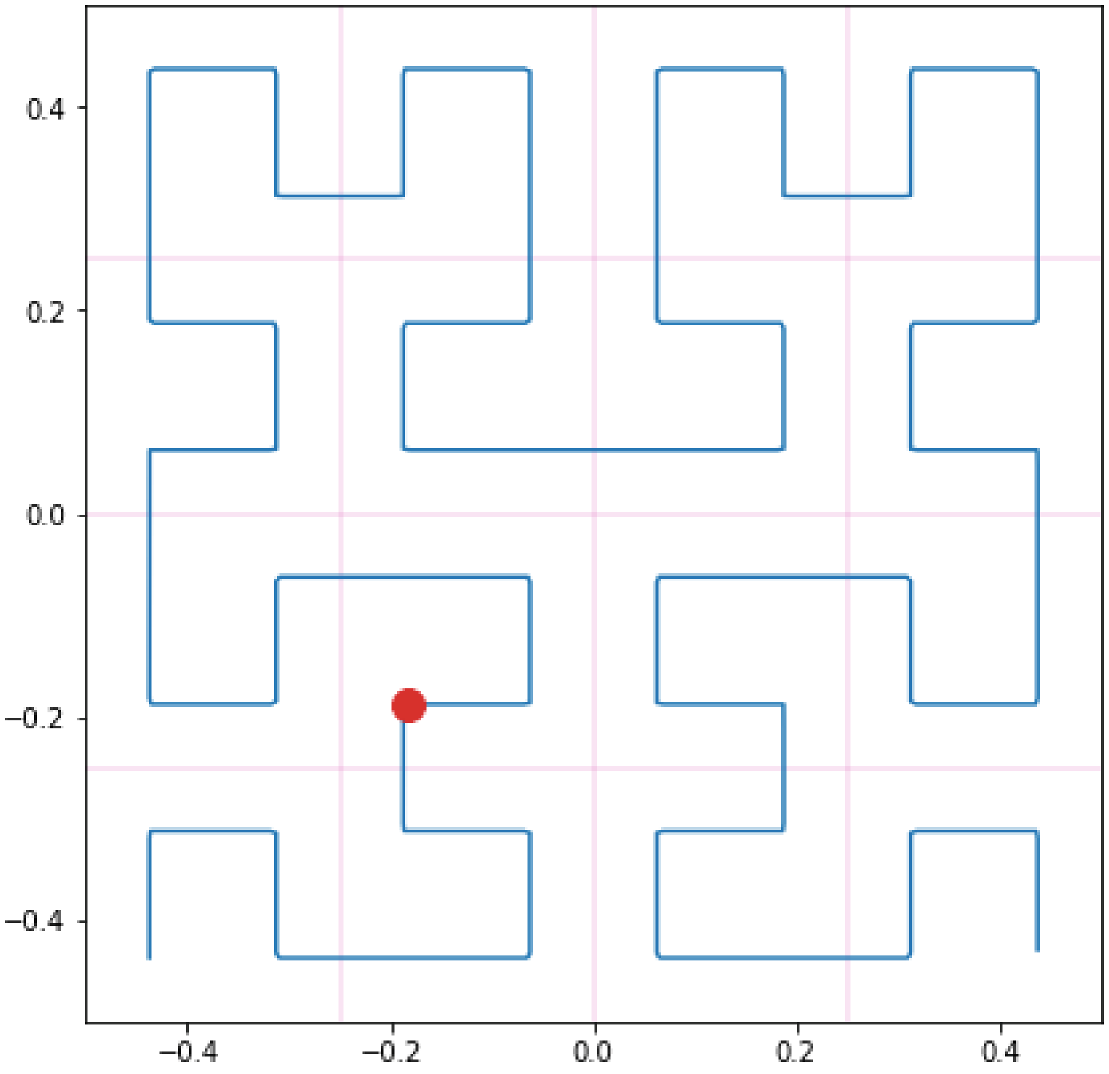


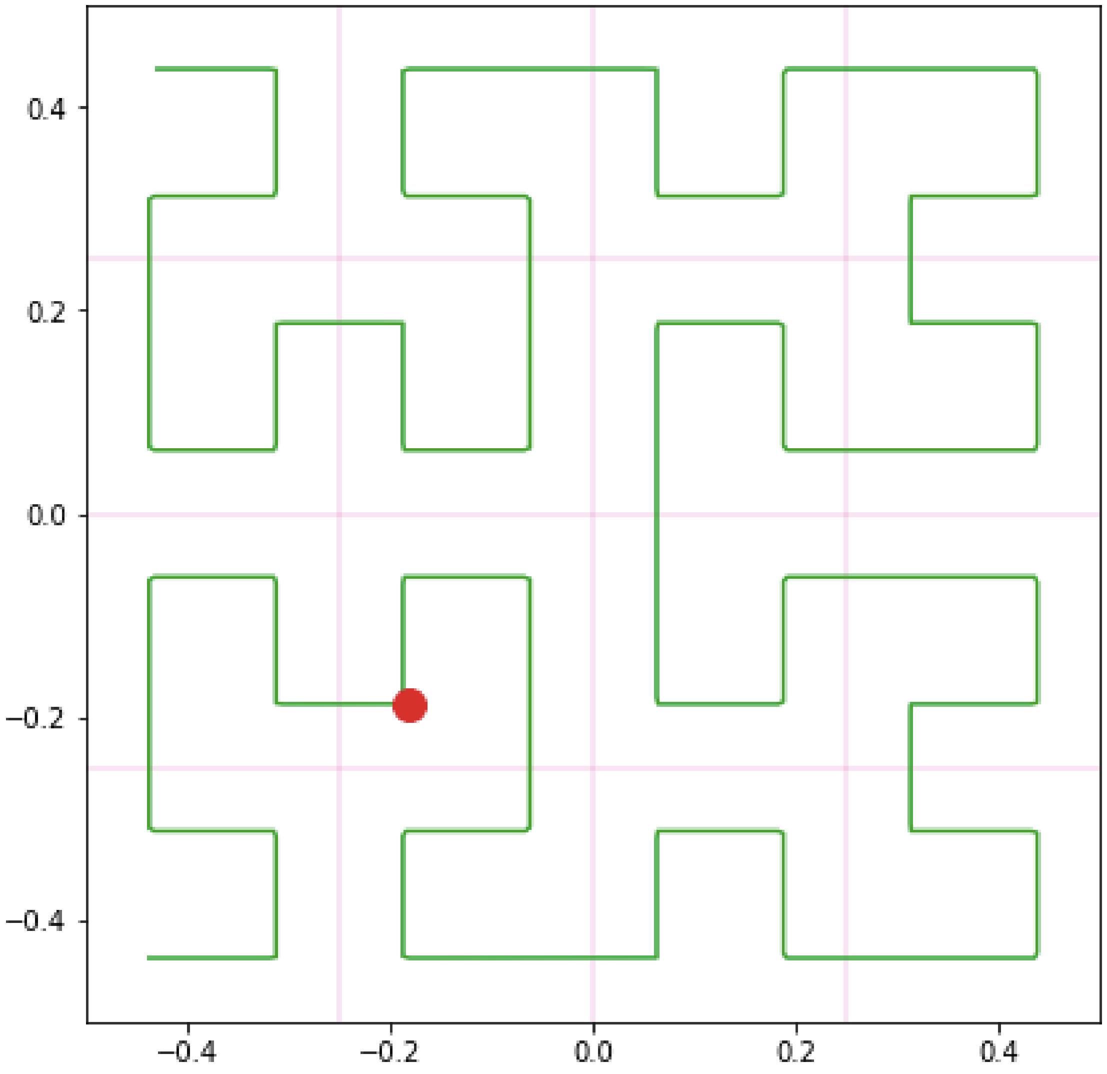
Кривая Пеано не инъективна, а аппроксимация …





Параллельные алгоритмы





Спасибо за внимание!