

63-я Всероссийская научная конференция  
МФТИ

Сравнительный анализ методов  
моделирования гравитационного  
потенциала тел сложной формы

***А.С. Юдицкая<sup>1,2</sup>, С.С. Ткачев<sup>2</sup>***

<sup>1</sup> МФТИ

<sup>2</sup> ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

# Содержание

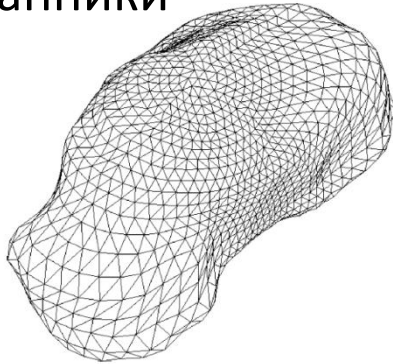
- Введение
- Постановка задачи
- Описание подходов
- Сравнение подходов
- Заключение

# Введение

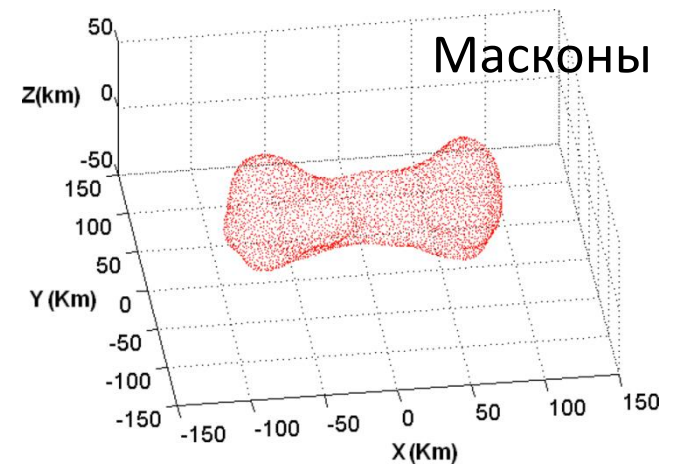
- Для задач сближения и исследования тел сложной формы требуется уметь моделировать гравитационного поле.
- Существует несколько методов расчета потенциала (в работе рассматриваются метод многогранника, метод сферических гармоник, масконы), и целью данной работы является сравнение эффективности использования каждого из этих методов.

# Подходы описания гравитационного потенциала

## Многогранники



R. Werner, The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners



T. G. Chanut, Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source

## Модель сферических гармоник

$$U = \frac{G}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} C_{l,0} + \frac{G}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} \{ C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi) \}$$

D. Vallado, Fundamentals of astrodynamics and applications.

# Постановка задачи

Дано: форма тела, заданная с помощью  
поверхностной сетки; масса тела

Задачи:

1. Посчитать потенциал в заданных точках
2. Сравнить расчет потенциалов,  
вычисленных разными способами

# Модель многогранника

$$U_{triangle} = \frac{\Delta z}{2} (\det_{12} L_{12} + \det_{23} L_{23} + \det_{31} L_{31}) - \frac{\Delta z^2}{2} (S_1 + S_2 + S_3 - \text{sign}(\Delta z) \pi)$$

$$U = G\sigma \sum_{faces} U_{triangle}$$

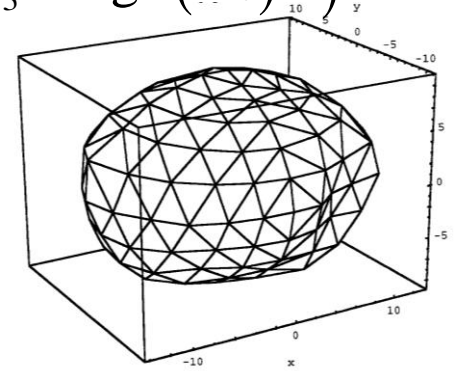
$$\det_{12} = \Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1; \det_{23} = \Delta x_2 \Delta y_3 - \Delta x_3 \Delta y_2; \det_{31} = \Delta x_3 \Delta y_1 - \Delta x_1 \Delta y_3$$

$$L_{12} = \frac{1}{r_{12}} \ln \left( \frac{r_1 + r_2 + r_{12}}{r_1 + r_2 - r_{12}} \right); L_{23} = \frac{1}{r_{23}} \ln \left( \frac{r_2 + r_3 + r_{23}}{r_2 + r_3 - r_{23}} \right); L_{31} = \frac{1}{r_{31}} \ln \left( \frac{r_3 + r_1 + r_{31}}{r_3 + r_1 - r_{31}} \right)$$

$$S_1 = \arctan \left( \frac{\Delta z [\xi_1 (\eta_2 - \eta_3) + \xi_2 (\eta_3 - \eta_1) + \xi_3 (\eta_1 - \eta_2)]}{-\left\{ \det_{31} \det_{12} + \Delta z^2 [(\xi_2 - \xi_1)(\xi_1 - \xi_3) + (\eta_2 - \eta_1)(\eta_1 - \eta_3)] \right\} / r_1} \right)$$

$$S_2 = \arctan \left( \frac{\Delta z [\xi_1 (\eta_2 - \eta_3) + \xi_2 (\eta_3 - \eta_1) + \xi_3 (\eta_1 - \eta_2)]}{-\left\{ \det_{12} \det_{23} + \Delta z^2 [(\xi_3 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_1) + (\eta_3 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_1)] \right\} / r_2} \right)$$

$$S_3 = \arctan \left( \frac{\Delta z [\xi_1 (\eta_2 - \eta_3) + \xi_2 (\eta_3 - \eta_1) + \xi_3 (\eta_1 - \eta_2)]}{-\left\{ \det_{23} \det_{31} + \Delta z^2 [(\xi_1 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_2) + (\eta_1 - \eta_3)(\eta_3 - \eta_2)] \right\} / r_3} \right)$$



$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_X & \mathbf{i}_Y & \mathbf{i}_Z \\ \mathbf{j}_X & \mathbf{j}_Y & \mathbf{j}_Z \\ \mathbf{k}_X & \mathbf{k}_Y & \mathbf{k}_Z \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{матрица} \\ \text{поворота} \\ \text{СК тела} \rightarrow \text{СК} \\ \text{грани} \end{matrix}$$

$r_{ij}$ -длина ребра  $ij$  грани

$r_i$ -расстояние между пробной точкой и  $i$  вершиной

$(x, y, z)$ -координаты пробной точки в СК грани

$(\xi_i, \eta_i, \zeta)$ -координаты  $i$  вершины грани в СК грани

$$\begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

# Модель сферических гармоник

$$U = \frac{G}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} C_{l,0} + \frac{G}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]}{r^l} \{ C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi) \}$$

$r$  – расстояние до "пробной точки"

$\theta, \varphi$  – зенитный и азимутальный углы для "пробной точки"

$P_{l,m}$  – присоединенный полином Лежандра

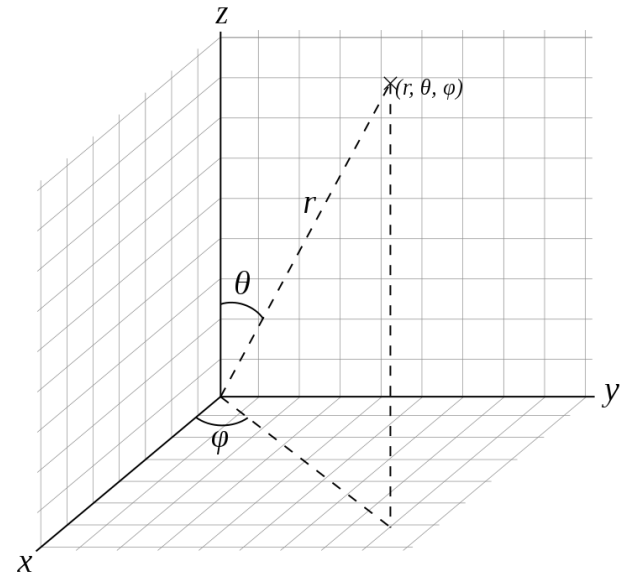
$C_{l,m}, S_{l,m}$  – коэффициенты разложения

$$P_{l,m}[x] = \frac{1}{2^l} (1-x^2)^{m/2} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^j (2l-2j)!}{j!(l-j)!(l-2j-m)} x^{l-2j-m}$$

$$P_l[x] = P_{l,0}[x]$$

$$C_{l,m} = \sum_{all\_tetr} r_{tetr}^l (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{tetr} \right) \right] \cos(m\varphi_{tetr}) M_{tetr}$$

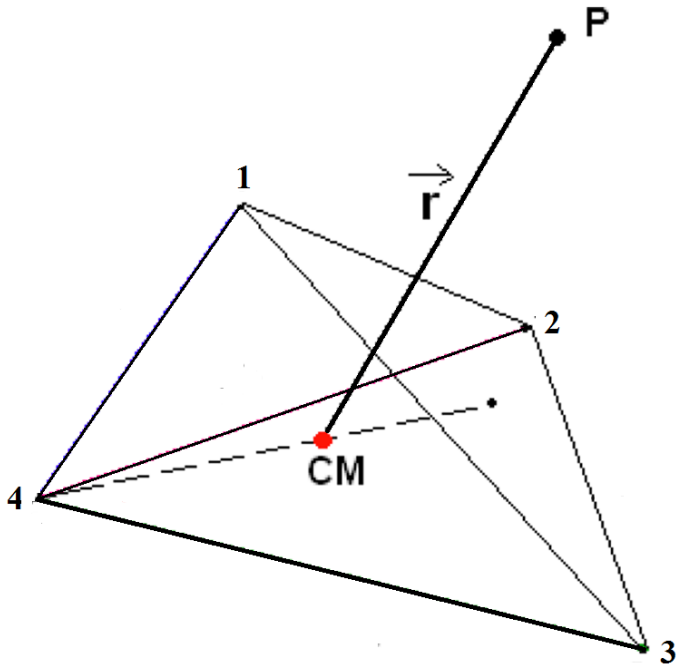
$$S_{l,m} = \sum_{all\_tetr} r_{tetr}^l (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{tetr} \right) \right] \sin(m\varphi_{tetr}) M_{tetr}$$



$r_{tetr}$  – расстояние до цт тетраэдра

$\theta_{tetr}, \varphi_{tetr}$  – зенитный и азимутальный углы для цт тетраэдра

# Масконы



$$U = G \sum_i \frac{M_i}{\|r_i - P\|}$$

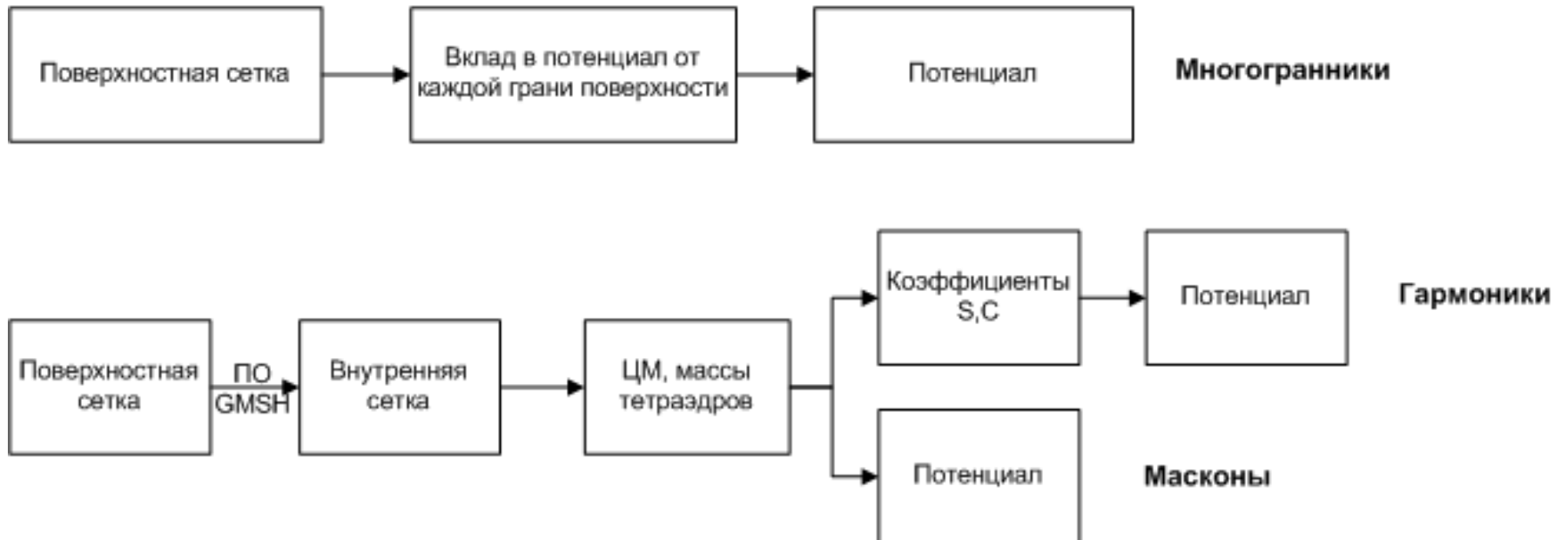
$M_i$  – масса тетраэдр

$r_i$  – центр масс тетраэдра

$P$  – пробная точка

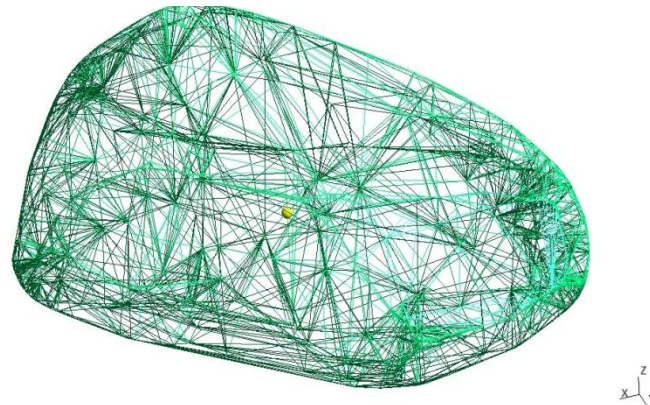
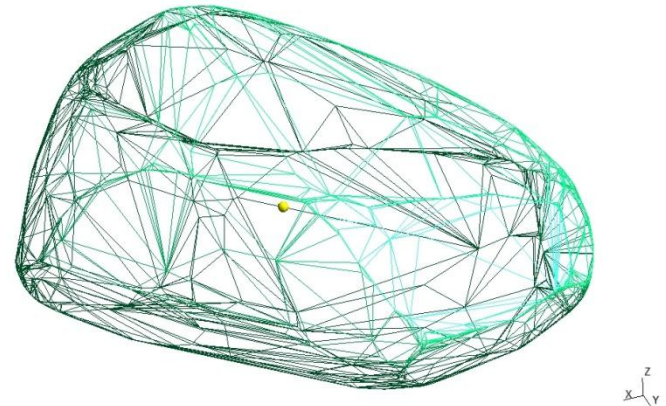
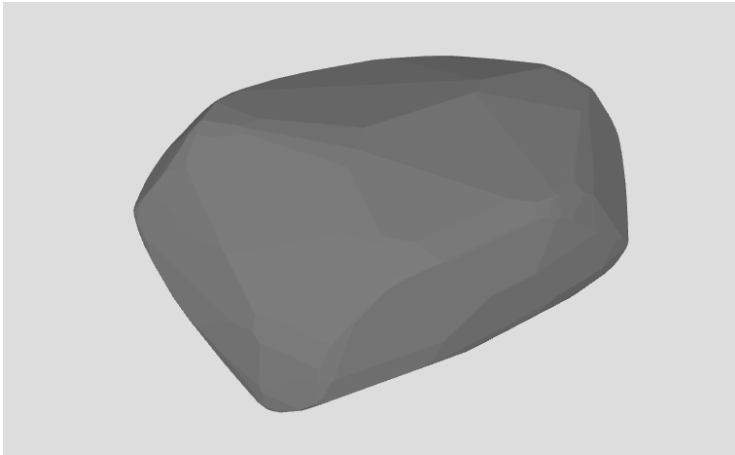


# Схемы расчета



# (321) Флорентина

- Масса  $2,11 \cdot 10^{16}$  кг
- Средний диаметр 27.97 км



# Выбор количества рассматриваемых гармоник

R \ L	3	4	5	6	7	8	9	10
2r	0,24799	0,24723	0,24725	0,24719	0,24719	0,24719	0,24719	0,24719
3r	0,11276	0,11269	0,11269	0,11269	0,11269	0,11269	0,11269	0,11269
4r	0,06534	0,06536	0,06536	0,06536	0,06536	0,06536	0,06536	0,06536
50r	0,00236	0,00236	0,00236	0,00236	0,00236	0,00236	0,00236	0,00236

# Сравнение точности

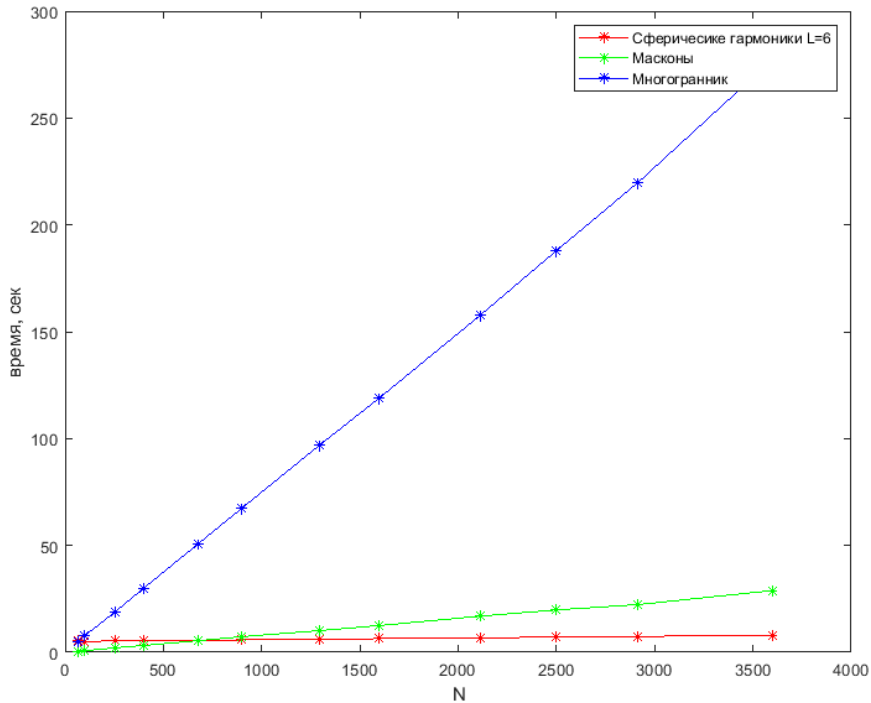
Метод многогранника → точное значение

Метод Расстояние	Сферические гармоники L=6	Масконы
2r	0,2472%	0,009 %
3r	0,1126%	0,004%
4r	0,0653%	0,00221 %
50r	0,0023%	1,57E-05%

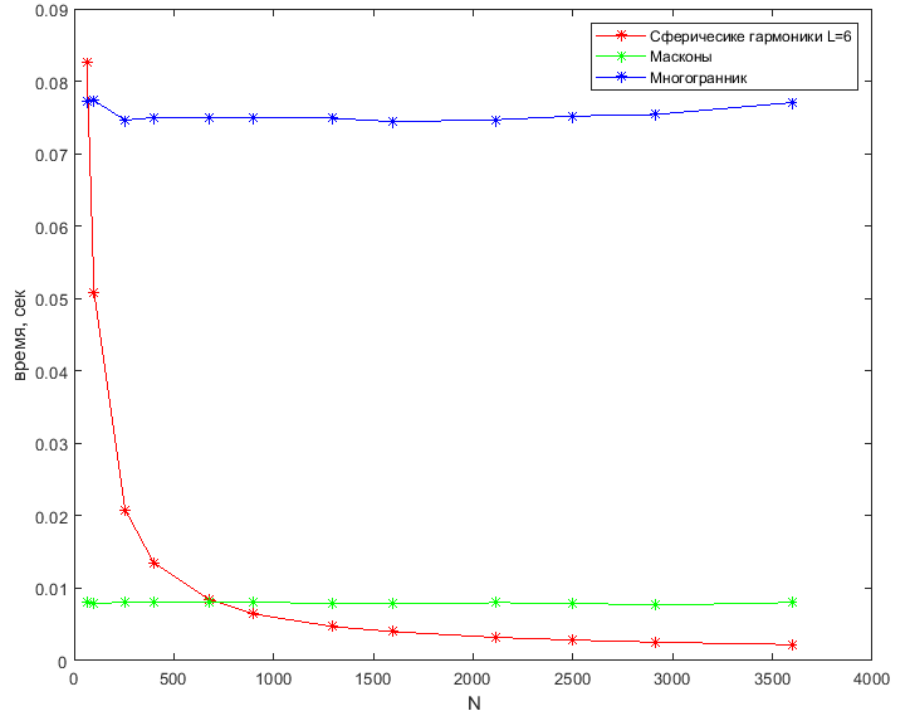
# Вычислительная сложность

Метод N Кол. точек	Многогранник		Сферические гармоники L=6		Масконы	
	время на N точек, сек	время на 1 точку, сек	время на N точек, сек	время на 1 точку, сек	время на N точек, сек	время на 1 точку, сек
<b>64</b>	4,93969	0,077183	5,28205	0,082532	0,517284	0,008083
<b>100</b>	7,734078	0,077341	5,088143	0,050881	0,785219	0,007852
<b>256</b>	19,10248	0,074619	5,325146	0,020801	2,070883	0,008089
<b>400</b>	30,00034	0,075001	5,397246	0,013493	3,221323	0,008053
<b>676</b>	50,70075	0,075001	5,720762	0,008463	5,418007	0,008015
<b>900</b>	67,50762	0,075008	5,795158	0,006439	7,313903	0,008127
<b>1296</b>	97,05106	0,074885	6,093031	0,004701	10,15913	0,007839
<b>1600</b>	119,0700	0,074419	6,400655	0,004000	12,52991	0,007831
<b>2116</b>	158,0091	0,074673	6,785489	0,003207	16,93859	0,008005
<b>2500</b>	187,9523	0,075181	7,112008	0,002845	19,83606	0,007934
<b>2916</b>	219,9168	0,075417	7,421998	0,002545	22,33779	0,007660
<b>3600</b>	277,3942	0,077054	7,982936	0,002217	28,91226	0,008031

# Вычислительная сложность



Время вычисления гравитационного потенциала в  $N$  точках



Среднее время вычисления гравитационного потенциала в 1 точке

# Заключение

- Многогранник – точный метод для однородных тел, может использоваться в качестве эталонного
- Сферические гармоники – менее точный, но более вычислительно выгодный метод на большом количестве точек
- Масконы – выгоднее использовать на маленьком числе точек

Работа поддержана грантом РФФИ № 19-11-00256

**Спасибо за внимание!**