64-я научная конференция МФТИ
3 декабря 2021 года, Москва

Методы проектирования квазиспутниковых орбит

М.Г. Широбоков[1], Н .Э. Адыгезалов[2]

[1]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
[2]Московский физико-технический институт

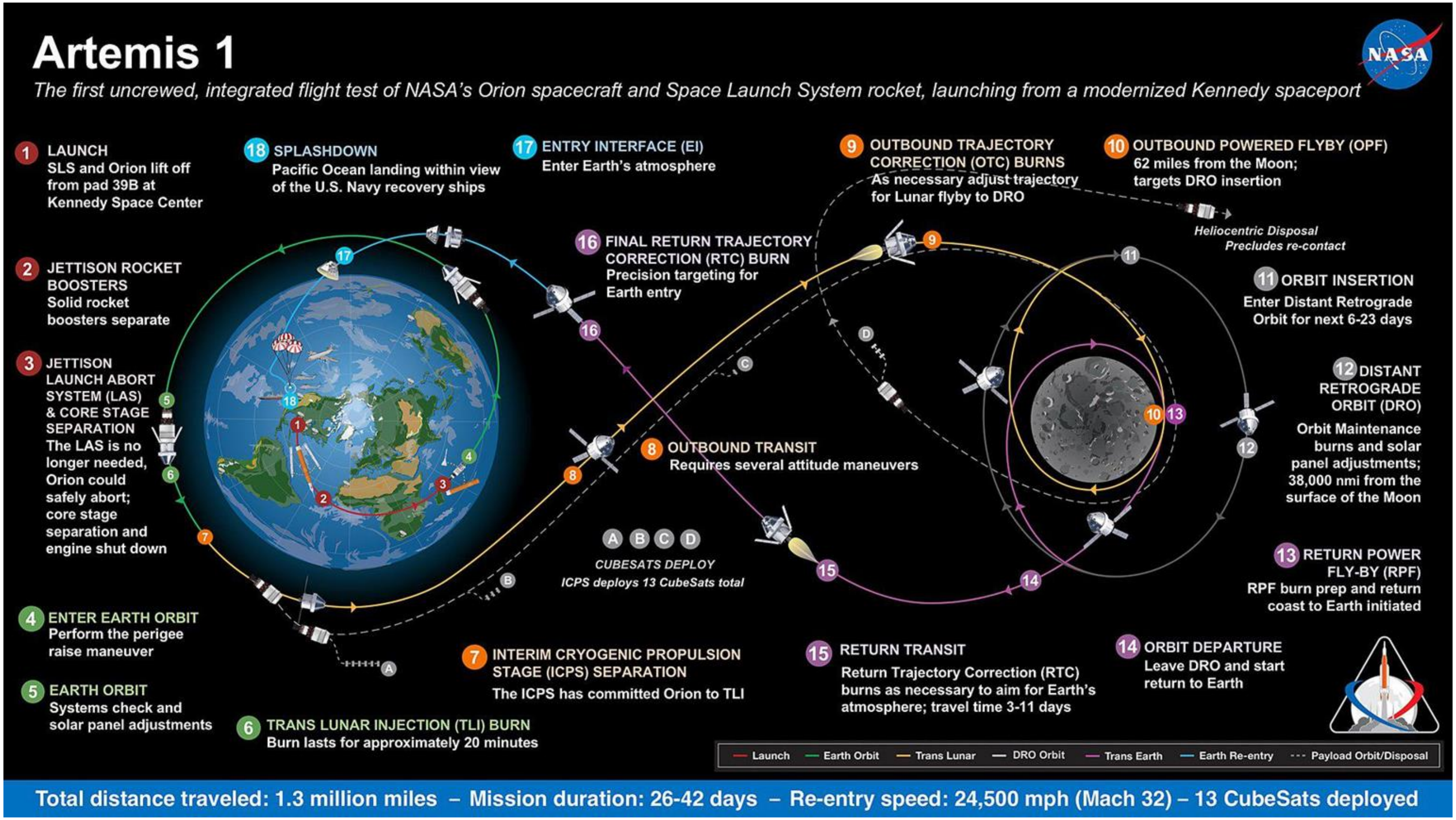
Содержание

- Введение и цель работы
- Применение методов проектирования к задаче Хилла
- Заключение

Введение

- *Квазиспутниковыми* орбитами называют орбиты в рамках ограниченной задачи трех тел с ретроградным движением вокруг тела меньшей массы
- Эти орбиты расположены вне сферы Хилла тела меньшей массы – области, внутри которой возможно обычное спутниковое движение
- Квазипериодические траектории не имеют простых методов проектирования и компактных аналитических выражений, что делает сложным решение оптимизационных задач с их участием

Введение



nasa.gov

Введение

- *М.Л. Лидов* и *М.А.Вашковьяк* рассматривали построение квазиспутниковых орбит в о ЭОЗТТ, применяя метод теории возмущений основанный на преобразованиях Ли (далее метод Хори–Деприи)
- *Martín Lara* также использовал этот метод, а также метод Линдштедта–Пуанкаре в задаче Хилла и построил возмущенное решение до высоких порядков

Метод Линдштедта–Пуанкаре

1) Замена независимой переменной

$$\tau = \omega t$$

Метод Хори–Деприи

$$W \equiv W(\epsilon; \mathbf{q}, \mathbf{Q})$$

$$W = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} W_{n+1}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$$

$$\frac{dq_k}{d\epsilon} = \frac{\partial W}{\partial Q_k}, \ \frac{dQ_k}{d\epsilon} = -\frac{\partial W}{\partial q_k}, \ k = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, 0) = \mathbf{p}, \ \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, 0) = \mathbf{P}$$

$$\varphi : (\mathbf{p}, \mathbf{P}, \epsilon) \to (\mathbf{q}, \mathbf{Q})$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \epsilon), \ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \epsilon)$$

Метод Хори–Депри

$$F \equiv F(\epsilon, \mathbf{q}, \mathbf{Q})$$

$$G = \varphi F \equiv F(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathrm{P}, \epsilon),\ \mathrm{Q}(\mathbf{p}, \mathrm{P}, \epsilon), \epsilon)$$

$$\frac{dG}{d\epsilon} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon} + \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial \epsilon} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon} + \{F; W\}$$

$$\frac{dG}{d\epsilon} = \sum_{n \geqq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} F_{n,1} \qquad F_{n,q+1} = F_{n+1,q} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m \{F_{n-m,q}; W_{m+1}\} \ (*)$$

Рекурсия Депри

$$\mathbf{q} = \sum_{n \geqq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{q}_{0,n}(\mathbf{p}, \mathrm{P}) \qquad \mathrm{Q} = \sum_{n \geqq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathrm{Q}_{0,n}(\mathbf{p}, \mathrm{P})$$

Прямое преобразование Ли

Метод Хори–Депри

$$H = H_0 + D = \sum_{m \geqq 0} \frac{\epsilon^m}{m!} H_{m,0}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$$

$$T : (\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \to (\mathbf{p}, \mathbf{P}, \epsilon)$$

$$T : H = H(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \epsilon),\ \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \epsilon), \epsilon) \equiv \sum_{m \geq 0} \frac{\epsilon^m}{m!} H_{0,m}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$$

$n = q = 0$ из $(*) \to \ H_{0,1} = \{H_{0,0}; W_1\} + H_{1,0} \Longleftrightarrow \ \{W_1; H_{0,0}\} = \widetilde{H}_{0,1} - H_{0,1}$

$$\widetilde{H}_{0,1} = H_{1,0}$$

Цель работы

- Цель работы – описать методы Хори–Деприи Линдштедта–Пуанкаре и рассмотреть их применения для построения квазиспутниковых орбит

Задача Хилла

Гамильтониан в задаче Хилла [1] :

$$H = H_0(x, y, X, Y, \dot{\vartheta}) - \frac{\mu}{r}$$

$$H_0(x, y, X, Y, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}(X + \dot{\vartheta} y)^2 + \frac{1}{2}(Y - \dot{\vartheta} x)^2 - \frac{3}{2}(\dot{\vartheta} x)^2$$

[1] *Lara M.* Hamiltonian Perturbation Solutions for Spacecraft Orbit Prediction: The Method of Lie Transforms. Berlin, Boston: De Gruyter, 2021. 378 p.

Задача Хилла

$$x = a\xi + bsin\phi$$
$$y = a\eta + acos\phi$$
$$X = -2B\eta - Bcos\phi$$
$$Y = -B\xi - Bsin\phi$$

$$a = 2b,\ b = \left(\frac{2\Phi}{\dot{\vartheta}}\right)^{\frac{1}{2}}, B = \dot{\vartheta}b, \xi \equiv \frac{Q}{2kB}, \eta \equiv \frac{kq}{b}$$

$$H_0 = H_0(-,-,\Phi,Q) \equiv \dot{\vartheta}\Phi - \frac{3}{8}\left(\frac{Q}{k}\right)^2$$

Задача Хилла

$$H = \dot{\vartheta}\Phi\left(1 - 3\xi^2 - \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta^2 + \xi sin\phi + 2\eta cos\phi + \xi^2 + \eta^2}}\right),\ \gamma = \frac{\mu}{a\dot{\vartheta}\Phi}$$

$$\Delta = \sqrt{1 - \frac{3}{4}sin^2\phi}$$

Причина возникающих функций от эллиптических интегралов

$$H_{4,0} = 4!\frac{1}{2}B^2\left(-3\xi^2 - \frac{\gamma}{\Delta}\right) \quad H_{0,4} = <\widetilde{H}_{0,4}> \quad = \quad -4!B^2\left(\frac{3}{2}\xi^2 + \gamma\widetilde{K}\right)$$

$$H_{0,5} = 0$$

$$W_4 = 4!\Phi\gamma F^*$$

$$W_5 = 5!\Phi\frac{1}{\Delta}\gamma\eta sin\phi$$