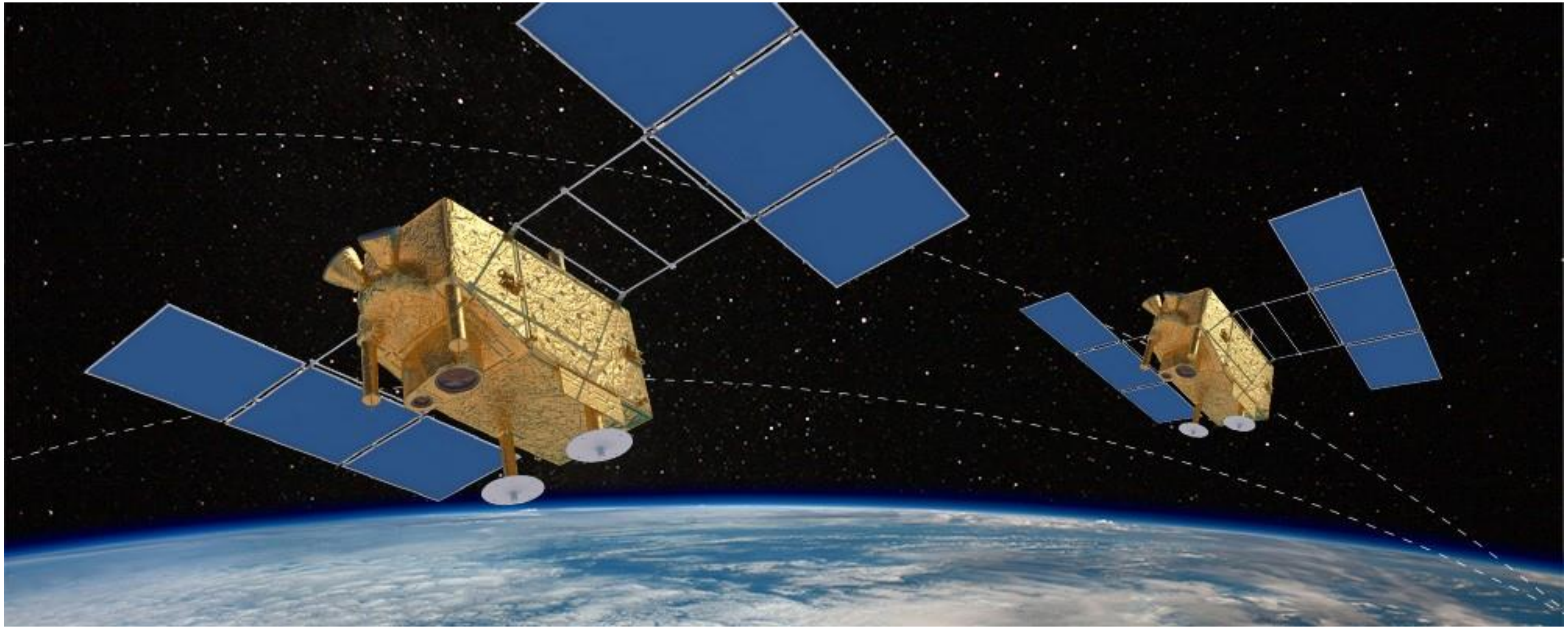
64-я научная конференция МФТИ
3 декабря 2021

Сравнительный анализ моделей относительного движения группы космических аппаратов



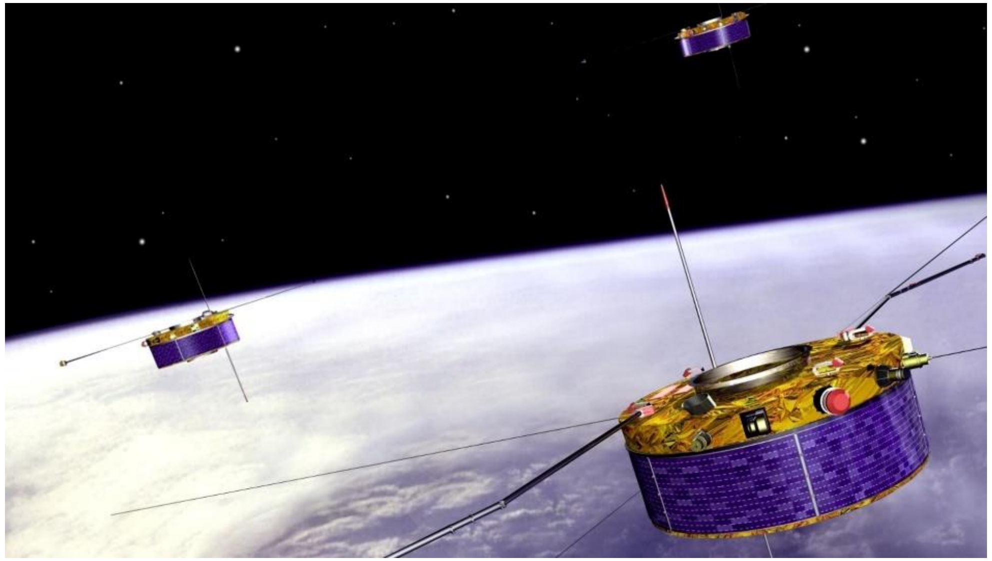
И.А. Суслова, Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков

Введение

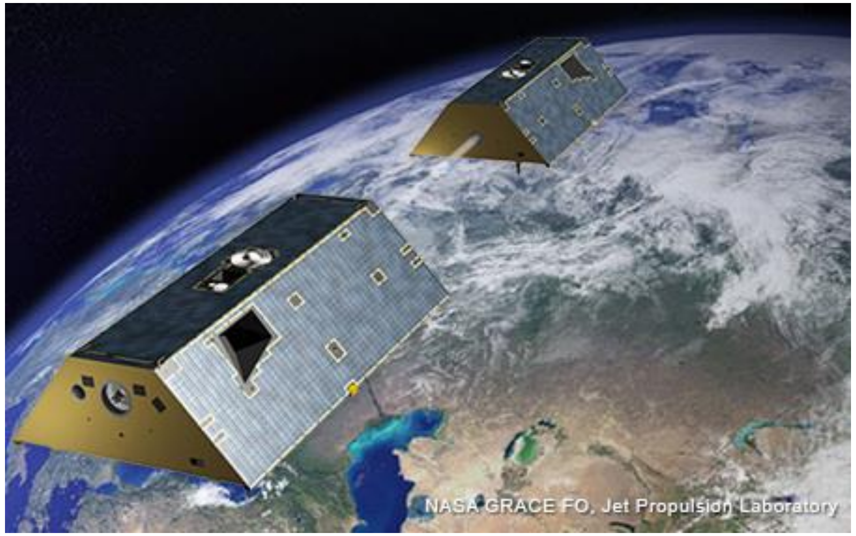
Использование нескольких аппаратов обладает рядом преимуществ

Большая популярность групповых полётов

Необходимость в моделях относительного движения



Cluster II



GRACE-FO

Цель работы

- Ознакомиться с простыми моделями относительного движения и провести их обзор
- Протестировать различные модели относительного движения в зависимости от некоторых факторов
- Получить результаты, позволяющие выбрать модель в различных случаях движения

Постановка задачи

Имеется:

- Два аппарата, движущихся по близким низким околокруговым орбитам
- Модель: центральное поле + J2
- Модели относительного движения: Хилла-Клохесси-Уилтшира; Швайгарта-Седвика; Шонера-Хемпеля
- Время моделирования – 24 часа

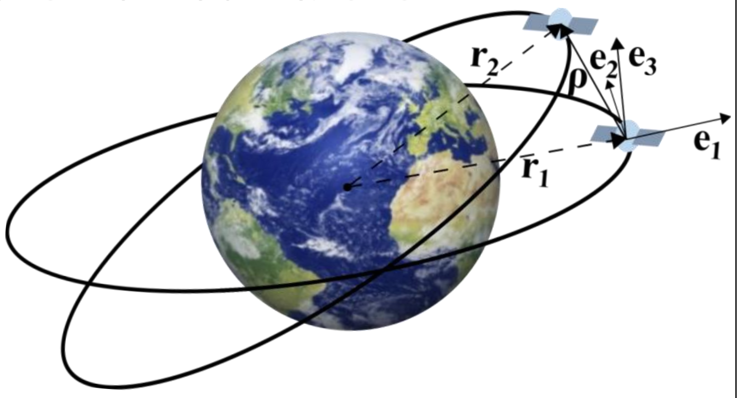
Необходимо:

- Реализовать модели движения
- Промоделировать движение на нескольких размерах относительных орбит, а также при различных параметрах орбиты главного аппарата
- Численно оценить точность каждой модели

Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира (ХКУ)

Уравнения в декартовых относительных координатах:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2 x = 0,$$
$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = 0,$$
$$\ddot{z} + n^2 z = 0.$$



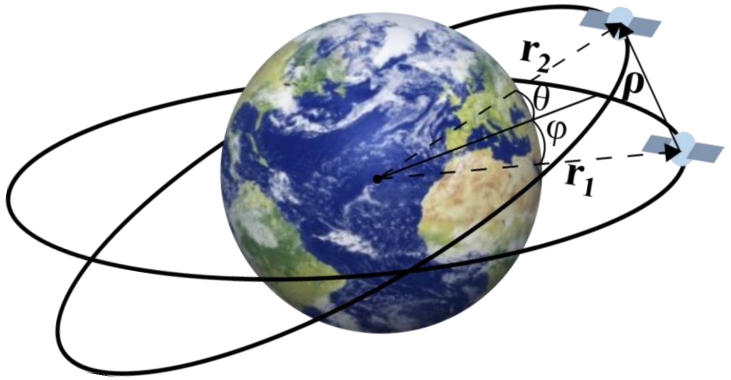
Здесь $n = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_c^3}}$ – среднее движение главного аппарата, r_c – модуль радиус-вектора главного аппарата

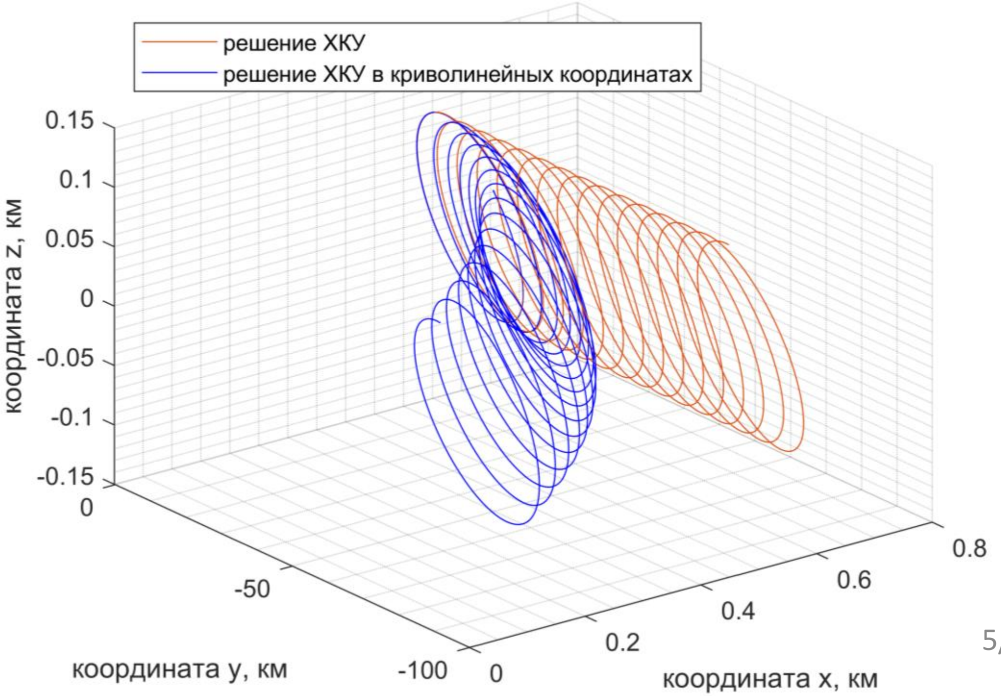
Предположения:

1) Модель движения: центральное гравитационное поле.
2) Орбита главного аппарата является круговой

Уравнения в сферических координатах ρ, φ, θ

$$\ddot{\rho} - 2nr_c\dot{\theta} - 3n^2\rho = 0,$$
$$r_c\ddot{\theta} + 2n\rho = 0,$$
$$r_c\ddot{\varphi} + n^2 r_c\varphi = 0.$$





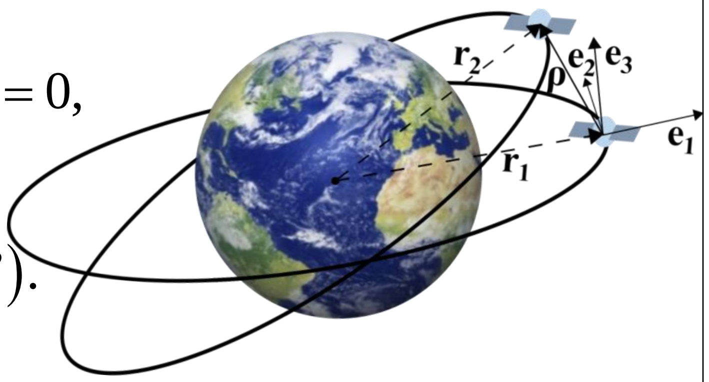
Уравнения Швайгарта-Седвика (ШС)

Уравнения в декартовых относительных координатах:

$$\ddot{x} - 2nc\dot{y} - \left(5c^2 - 2\right)n^2 x = 0,$$

$$\ddot{y} + 2nc\dot{x} = 0,$$

$$\ddot{z} + q^2 z = 2lq\cos\left(qt + \beta\right).$$



Предположения:

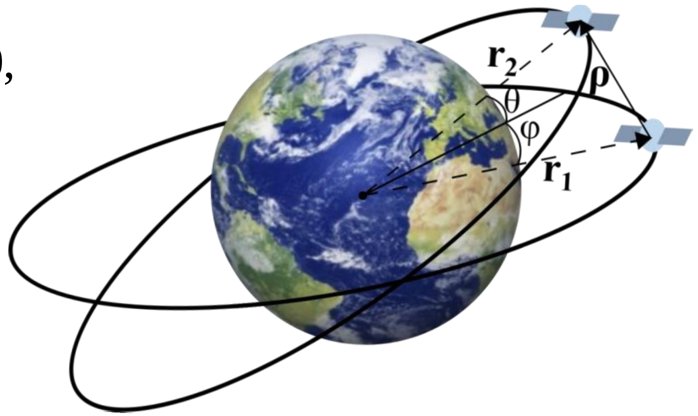
1) Модель движения: центральное гравитационное поле и учет второй гармоники гравитационного потенциала J2
2) Орбита главного аппарата является круговой

Уравнения в сферических координатах ρ, φ, θ

$$\ddot{\rho} - 2ncr_c\dot{\theta} - \left(5c^2 - 2\right)n^2\rho = 0,$$

$$r_c\ddot{\theta} + 2nc\rho = 0,$$

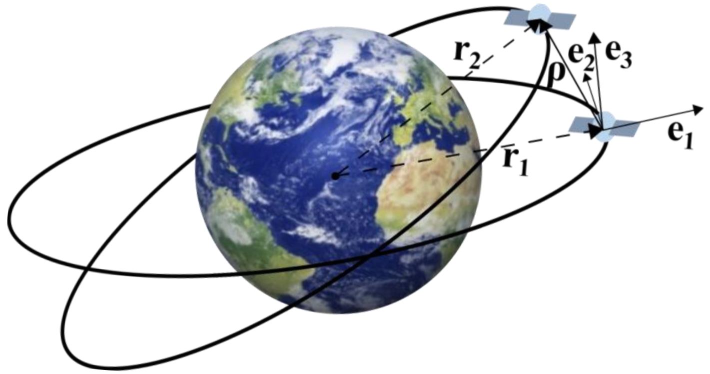
$$r_c\ddot{\varphi} + q^2 r_c\varphi = 2lq\cos\left(qt + \beta\right).$$



Уравнения Шонера-Хемпеля (ШХ)

Уравнения:

$$\overline{x}'' = \frac{3}{1+e_c\cos\theta_c}\overline{x} + \overline{y}',$$
$$\overline{y}'' = -2\overline{x}',$$
$$\overline{z}'' = -\overline{z}'.$$



Где θ – истинная аномалия

$(\cdot)',(\cdot)''$ – первая и вторая производная по истинной аномалии

$\overline{x} = \frac{x}{r_c},\ \overline{y} = \frac{y}{r_c},\ \overline{z} = \frac{z}{r_c}$. $x,\ y,\ z$ — декартовые относительные координаты

Предположения:

1) Модель движения: центральное гравитационное поле
2) Орбита главного аппарата является околокруговой с ненулевым эксцентриситетом

Хилловские константы

- Решение модифицированных уравнений ХКУ в криволинейных координатах имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
a &= C_{inplane}\sin\psi + 2C_{drift}\\
\dot{a} &= C_{outplane}\, n\cos\psi\\
r_1\varphi &= 2C_{inplane}\cos\psi + C_{shift}\\
r_1\dot{\varphi} &= -2C_{inplane}\, n\sin\psi - 3C_{drift}\, n
\end{aligned}\right\}$$

Движение в плоскости орбиты

$$\left.\begin{aligned}
r_1\theta &= C_{outplane}\sin\xi\\
r_1\dot{\theta} &= C_{outplane}\, n\cos\xi
\end{aligned}\right\}$$

Движение вне плоскости орбиты

С помощью констант $C_{inplane}$, $C_{outplane}$, C_{drift} и переменных C_{shift}, ψ, ξ задаются начальные данные следующим образом:

1) Задается некоторые размер относительной орбиты b
2) Амплитуды берутся равным b
3) Фазы берем из равномерного распределения на отрезке $[0, 2\pi]$
4) Сдвиг берем случайно из равномерного распределения на отрезке $[-b, b]$
5) Дрейф обнулим

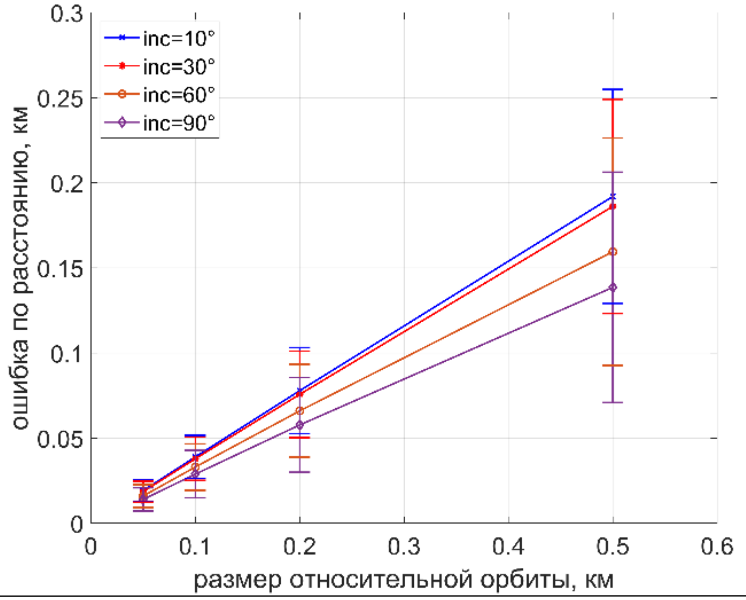
Методика оценивания

- Задается размер относительной орбиты
- Задается размер орбиты главного аппарата, получение $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1$
- Задаются хилловские константы, получение начального радиус-вектора и вектора скорости второго аппарата $\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2$
- С помощью метода Монте-Карло получается набор данных: к начальным данным, имитируя ошибку выведения, добавляются случайные величины
- Проводится интегрирование уравнений движений в рамках всех моделей
- Время моделирования – 24 часа.

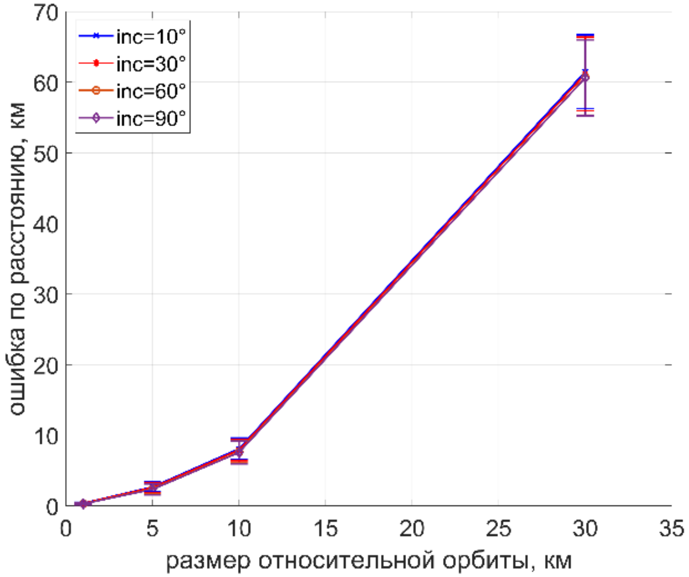
Оценка точности проводится 2 способами:

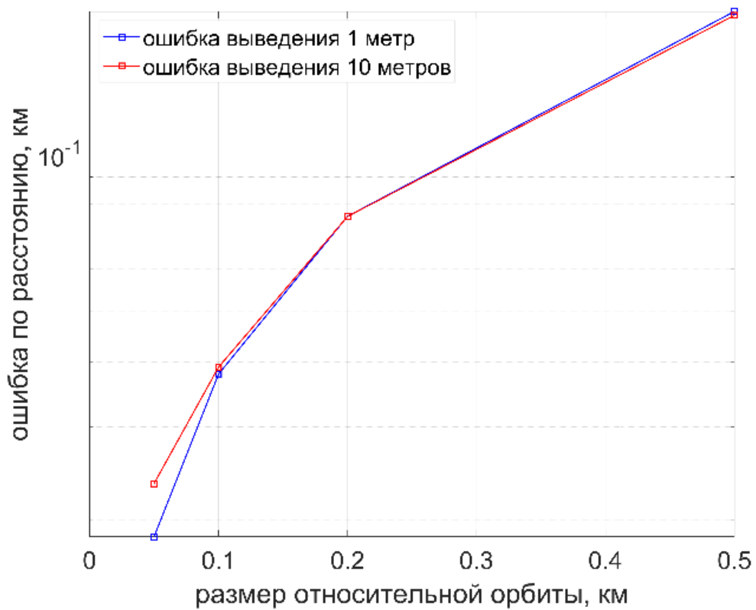
1) На последнем витке усредняется ошибка по расстоянию
2) Фиксируется время, когда приближенные уравнения начинают отличаться от полных уравнения движения на заданную величину. В качестве такой величины берется некоторый процент от размера относительной орбиты

Обычные уравнения ХКУ

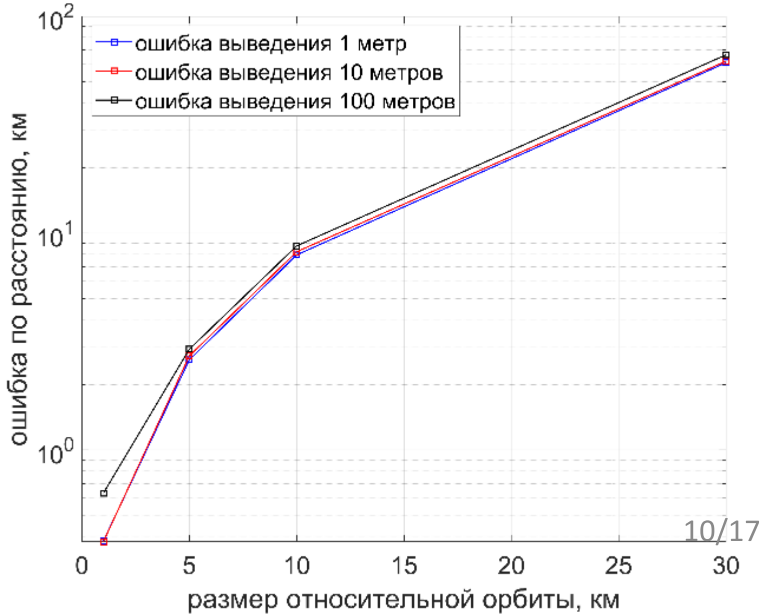


Зависимость ошибки по расстоянию от размера относительных орбит для разных значений наклонения

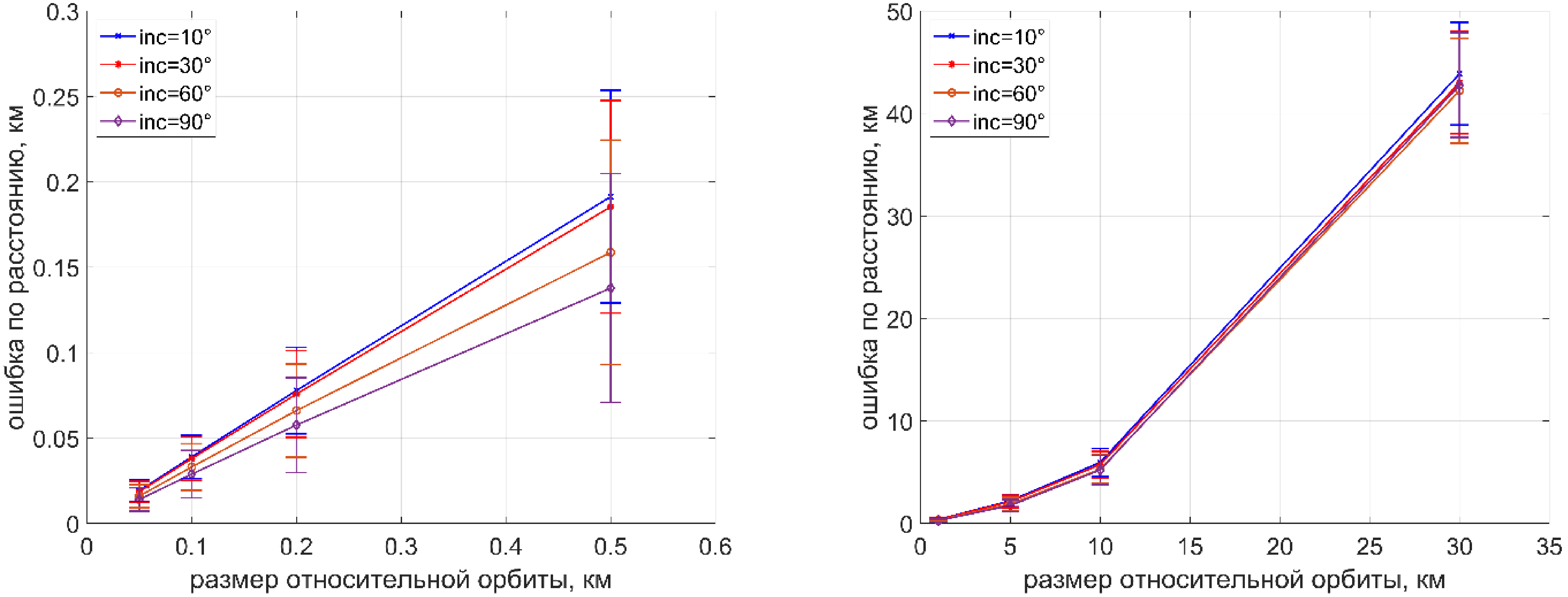




Влияние ошибок выведения. По оси ординат логарифмический масштаб

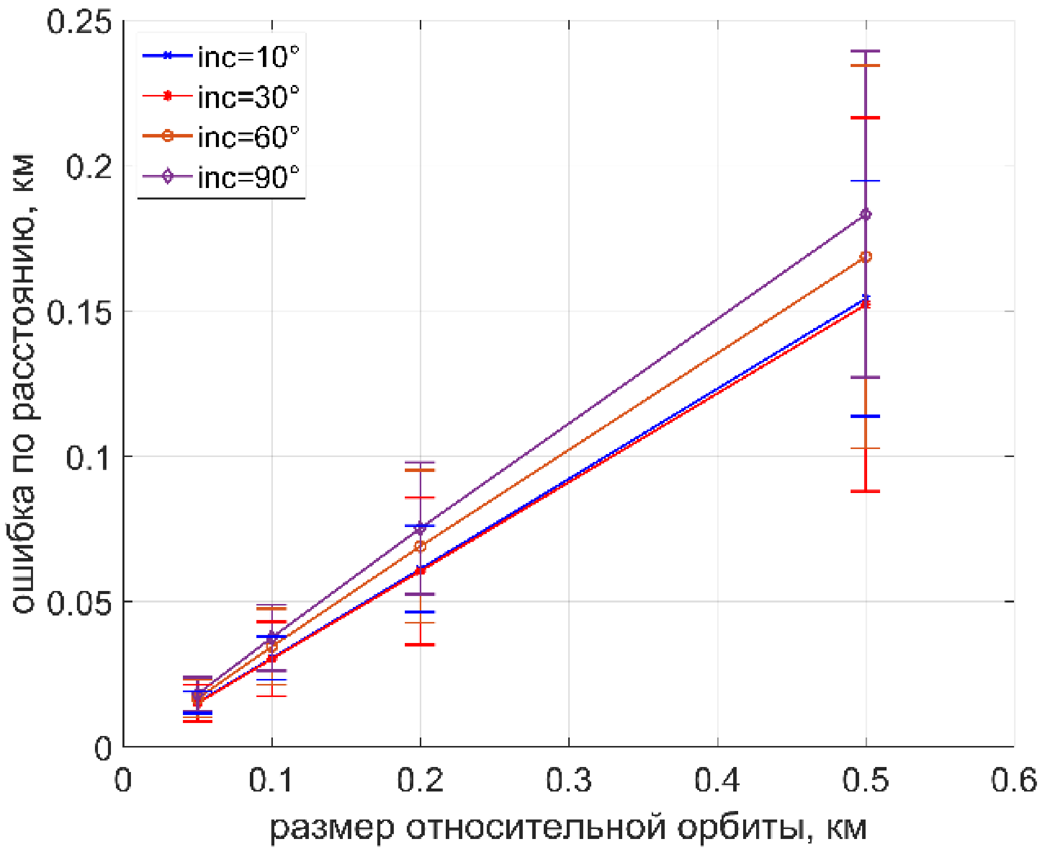


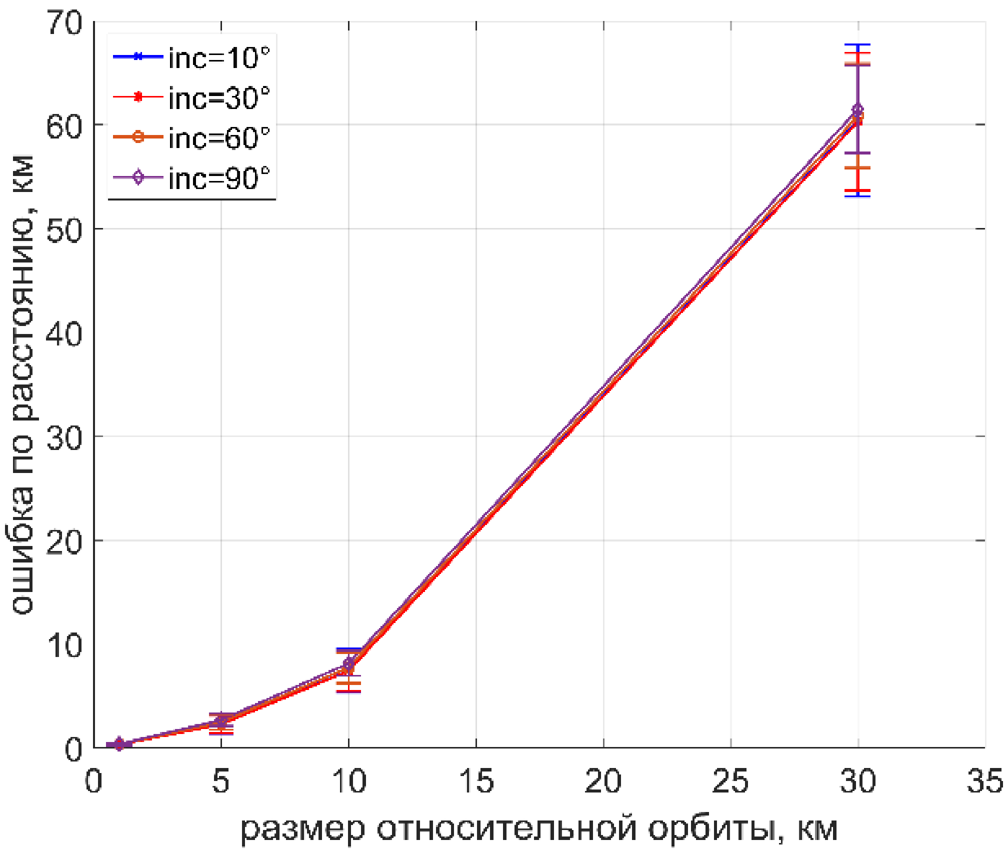
Модифицированные уравнения ХКУ



Зависимость ошибки по расстоянию от размера относительных орбит для разных значений наклонения

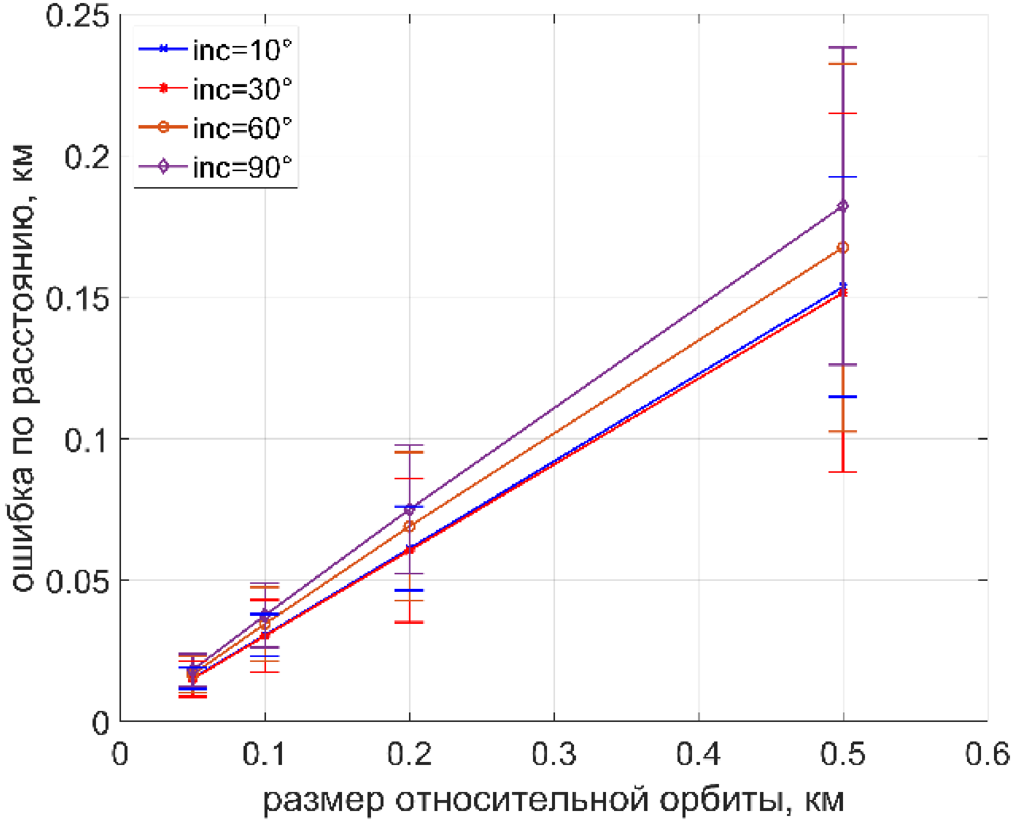
Уравнения ШС

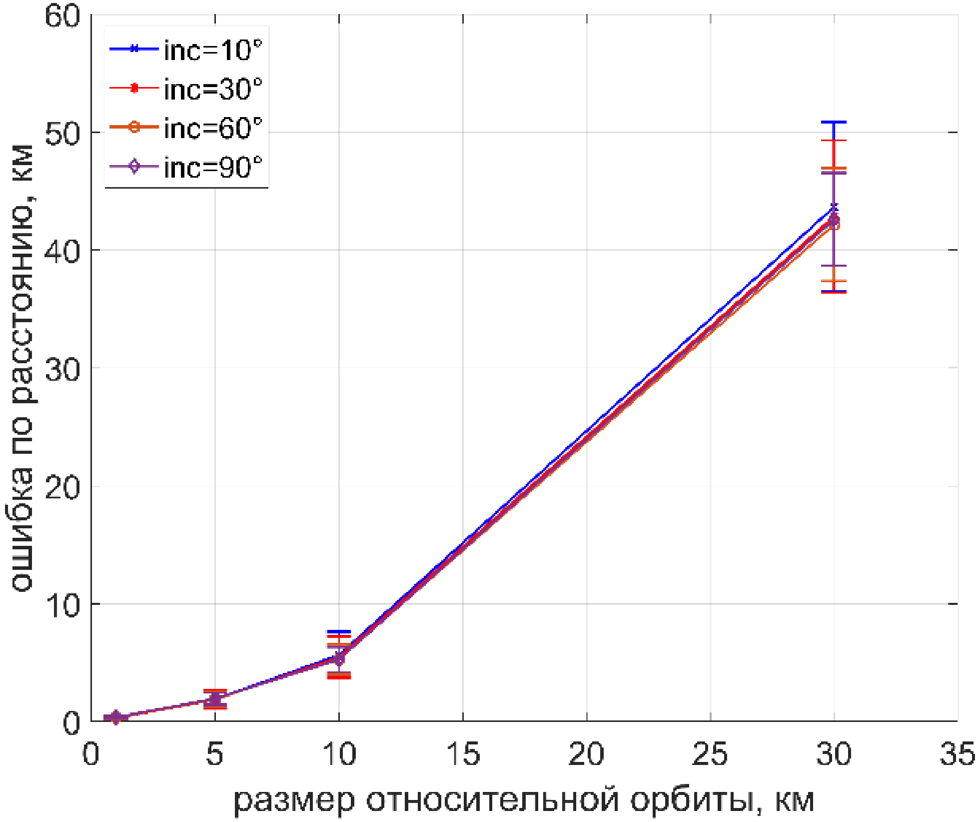




Зависимость ошибки по расстоянию от размера относительных орбит для разных значений наклонения

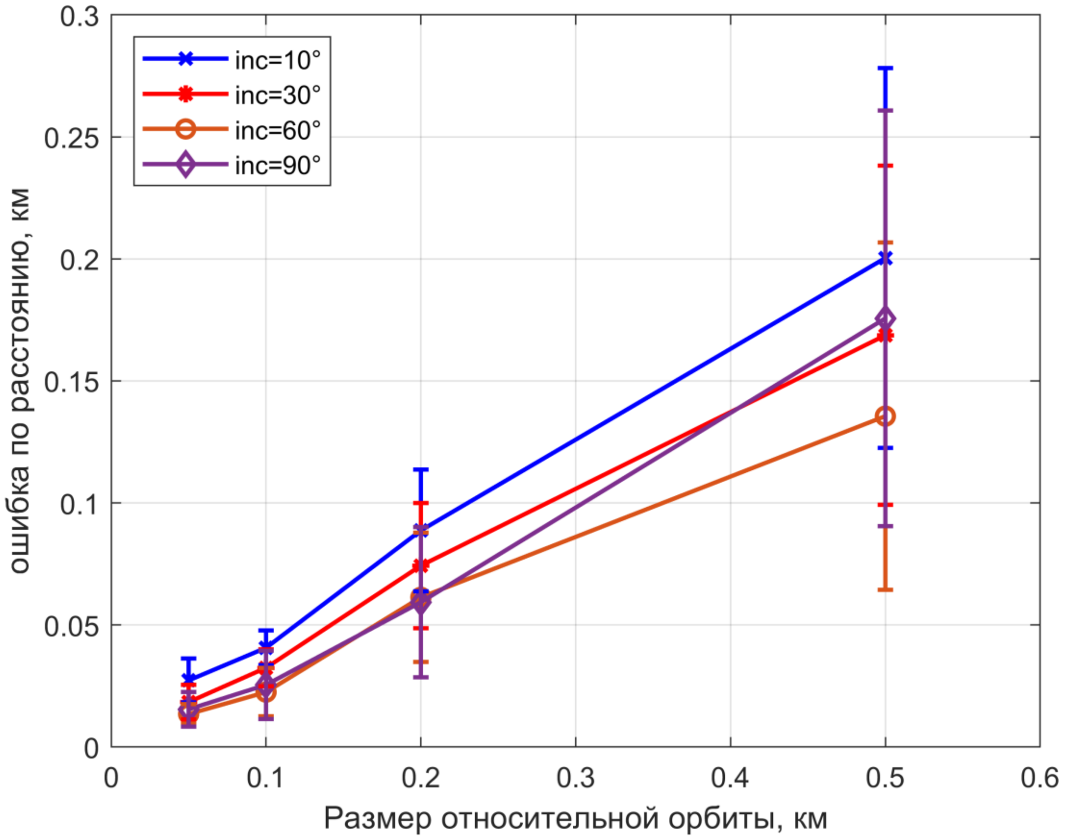
Модифицированные уравнения ШС

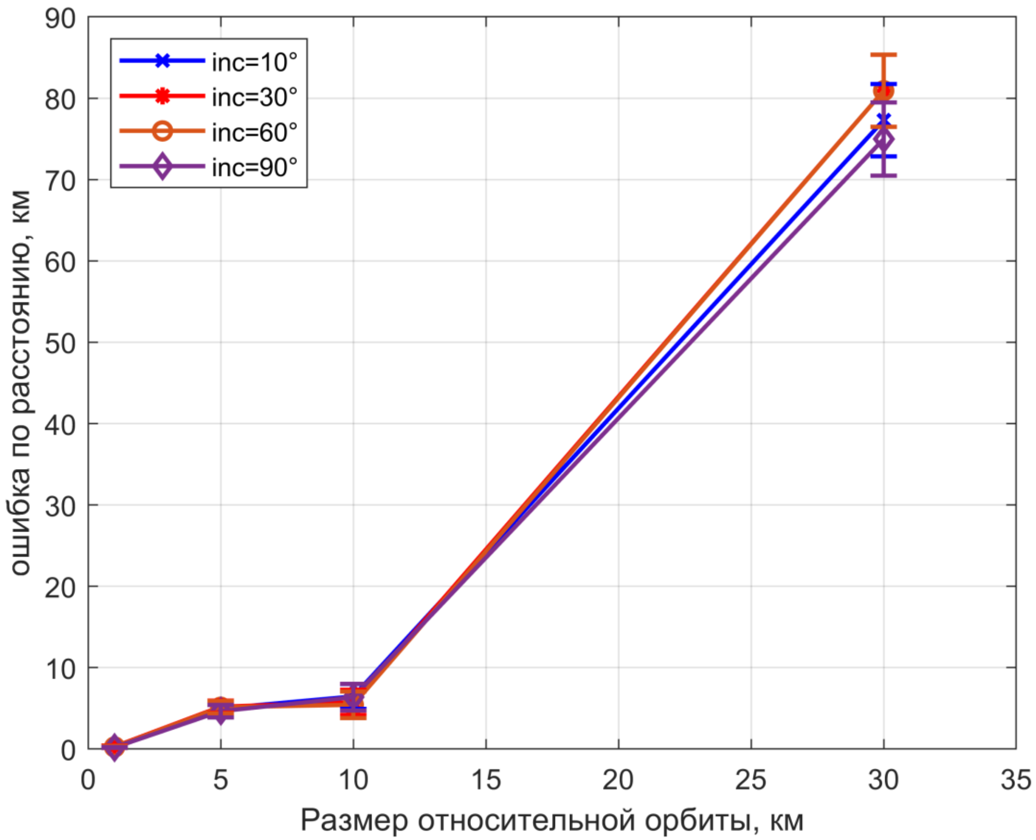




Зависимость ошибки по расстоянию от размера относительных орбит для разных значений наклонения

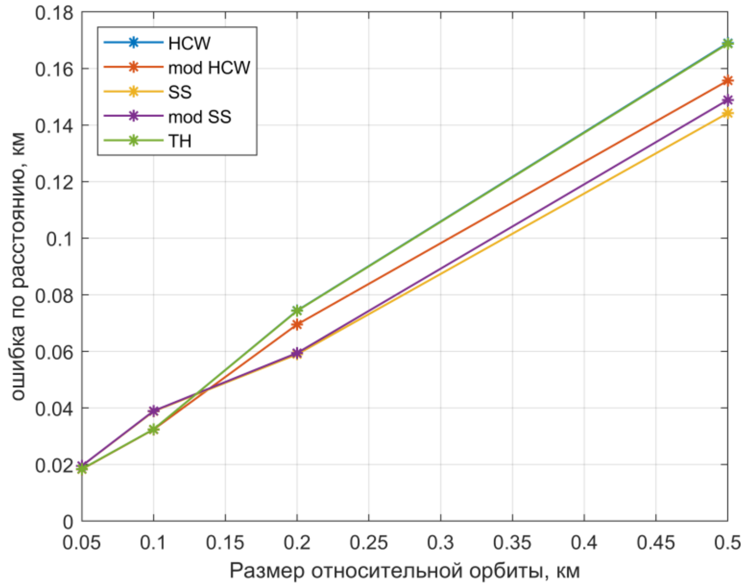
Уравнения ШХ

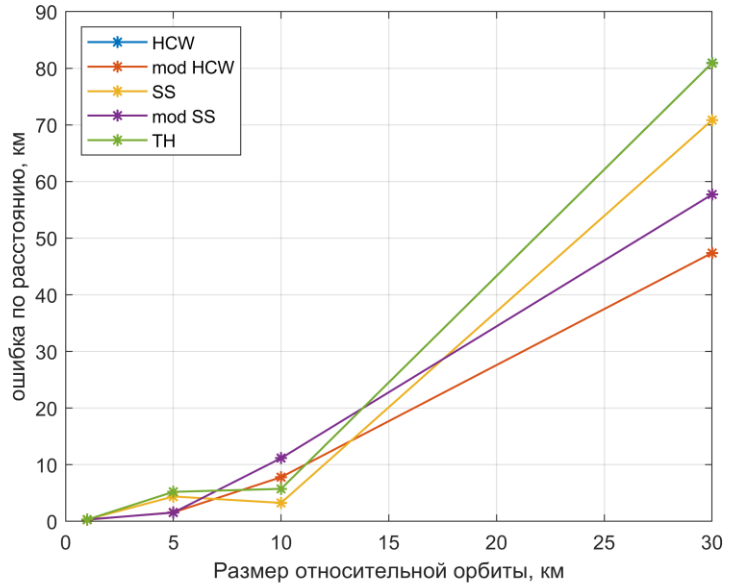




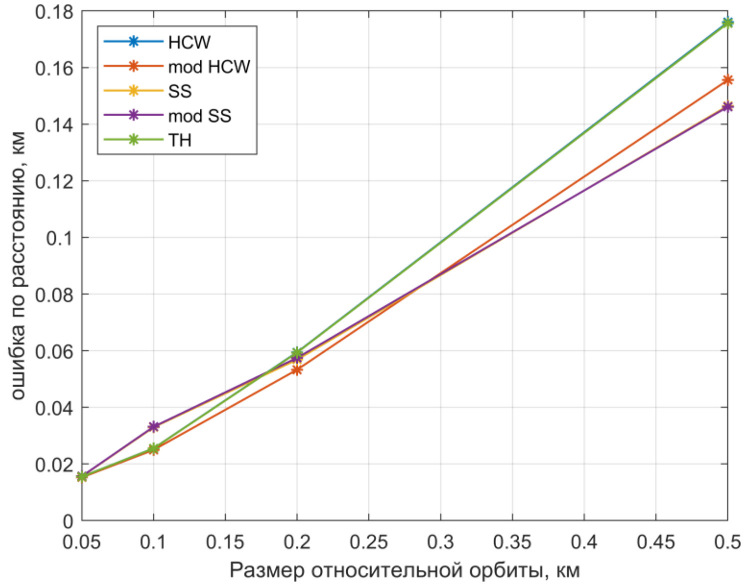
Зависимость ошибки по расстоянию от размера относительных орбит для разных значений наклонения

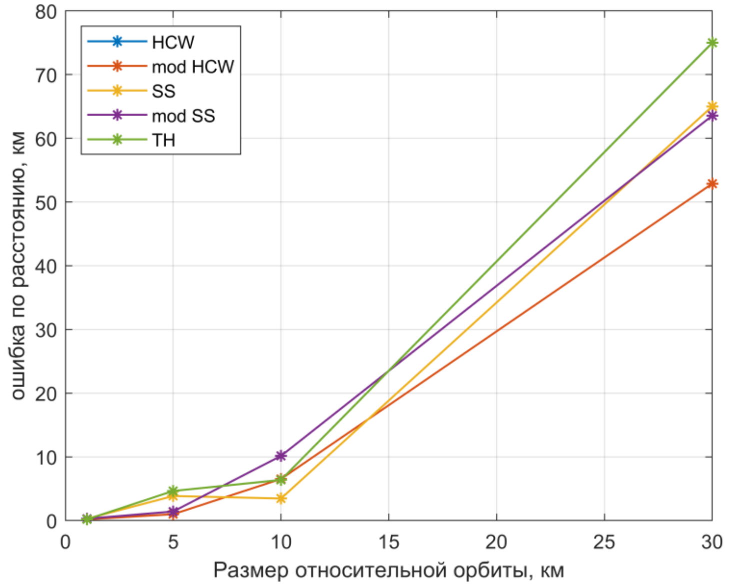
Сравнение моделей





Наклонение 30°





Наклонение 90°

Оценка точности через время

	Наклонение орбиты 30°				Наклонение орбиты 90°			
	100 м	500 м	1000 м	5000 м	100 м	500 м	1000 м	5000 м
Уравнения ХКУ	14,12 ч	12,52 ч	13,13 ч	4,91 ч	13,75 ч	10,62 ч	21,05 ч	5,68 ч
Модифици-рованные уравнения ХКУ	14,27 ч	14,09 ч	13,19 ч	11,56 ч	13,89 ч	11,11 ч	23,33 ч	17,99 ч
Уравнения ШС	10,87 ч	13,54 ч	10,04 ч	4,99 ч	11,35 ч	14,44 ч	13,73 ч	6,43 ч
Модифици-рованные уравнения ШС	10,62 ч	14,02 ч	11,57 ч	14,73 ч	11,19 ч	15,04 ч	14,68 ч	13,94 ч
Уравнения ШХ	14,15 ч	12,53 ч	13,13 ч	4,91 ч	13,76 ч	10,64 ч	21,05 ч	5,86 ч

Заключение

- Реализованы пят моделей относительного движения
- Оценена точность каждой модели
- Для малых размеров относительных орбит (до километра) возможно использование любой из рассмотренных моделей
- При малом эксцентриситете уравнения ШХ имеет малое отличие от уравнений ХКУ
- На достаточно больших размерах относительных орбит целесообразно использовать уравнения движения в криволинейных уравнениях