64-я Всероссийская научная конференция
МФТИ

# Моделирование гравитационного потенциала тел сложной формы содержащих неоднородности

***А.С. Юдицкая***[1,2]***, С.С. Ткачев***[2]
[1] МФТИ
[2] ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

# Содержание

- Введение
- Постановка задачи
- Модель многогранника
- Модель сферических гармоник
- Сравнение подходов
- Заключение

# Введение

- Для задач сближения и исследования астероидов требуется уметь моделировать гравитационный потенциал
- Астероиды обладают сложной формой и могут иметь неоднородности

# Подходы описания гравитационного потенциала

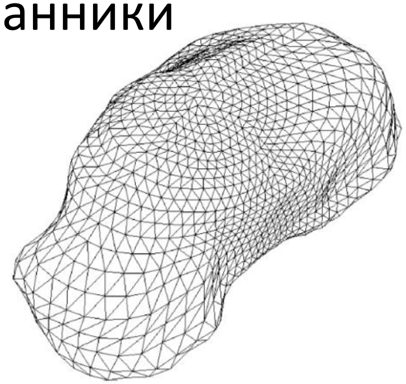
Модель сферических гармоник

$$U = \frac{G}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_l\left[\sin(\theta)\right]}{r^l}C_{l,0} +$$

$$+\frac{G}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\frac{P_{l,m}\left[\sin(\theta)\right]}{r^l}\left\{C_{l,m}\cos(m\varphi)+S_{l,m}\sin(m\varphi)\right\}$$

D. Vallado, Fundamentals of astrodynamics and applications.

Многогранники



R.Werner, The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners

# Постановка задачи

Дано: форма тела, заданная с помощью поверхностной сетки; масса тела

Задачи:

1. Искусственно добавить в астероид область неоднородности

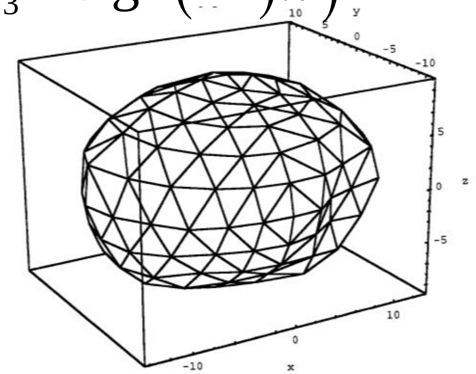
2. Посчитать потенциал и ускорение в заданных точках

3. Посмотреть влияние неоднородности на потенциал и ускорение

# Модель многогранника

$$U_{triangle} = \frac{\Delta z}{2}\left(\det_{12} L_{12} + \det_{23} L_{23} + \det_{31} L_{31}\right) - \frac{\Delta z^2}{2}\left(S_1 + S_2 + S_3 - \operatorname{sign}(\Delta z)\pi\right)$$

$$U = G\sigma \sum_{faces} U_{triangle}$$



$$\det_{12} = \Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1;\ \det_{23} = \Delta x_2 \Delta y_3 - \Delta x_3 \Delta y_2;\ \det_{31} = \Delta x_3 \Delta y_1 - \Delta x_1 \Delta y_3$$

$$L_{12} = \frac{1}{r_{12}} \ln\left(\frac{r_1 + r_2 + r_{12}}{r_1 + r_2 - r_{12}}\right);\ L_{23} = \frac{1}{r_{23}} \ln\left(\frac{r_2 + r_3 + r_{23}}{r_2 + r_3 - r_{23}}\right);\ L_{31} = \frac{1}{r_{31}} \ln\left(\frac{r_3 + r_1 + r_{31}}{r_3 + r_1 - r_{31}}\right)$$

$$S_1 = \arctan\left(\frac{\Delta z\left[\xi_1(\eta_2 - \eta_3) + \xi_2(\eta_3 - \eta_1) + \xi_3(\eta_1 - \eta_2)\right]}{-\left\{\det_{31}\det_{12} + \Delta z^2\left[(\xi_2 - \xi_1)(\xi_1 - \xi_3) + (\eta_2 - \eta_1)(\eta_1 - \eta_3)\right]\right\}/r_1}\right)$$

$$S_2 = \arctan\left(\frac{\Delta z\left[\xi_1(\eta_2 - \eta_3) + \xi_2(\eta_3 - \eta_1) + \xi_3(\eta_1 - \eta_2)\right]}{-\left\{\det_{12}\det_{23} + \Delta z^2\left[(\xi_3 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_1) + (\eta_3 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_1)\right]\right\}/r_2}\right)$$

$$S_1 = \arctan\left(\frac{\Delta z\left[\xi_1(\eta_2 - \eta_3) + \xi_2(\eta_3 - \eta_1) + \xi_3(\eta_1 - \eta_2)\right]}{-\left\{\det_{23}\det_{31} + \Delta z^2\left[(\xi_1 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_2) + (\eta_1 - \eta_3)(\eta_3 - \eta_2)\right]\right\}/r_3}\right)$$

$$\begin{bmatrix}\xi \\ \eta \\ \varsigma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{i}_X & \mathbf{i}_Y & \mathbf{i}_Z \\ \mathbf{j}_X & \mathbf{j}_Y & \mathbf{j}_Z \\ \mathbf{k}_X & \mathbf{k}_Y & \mathbf{k}_Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X \\ Y \\ Z\end{bmatrix}$$

матрица поворота СК тела -> СК грани

$r_{ij}$-длина ребра ij грани

$r_i$-расстояние между пробной точкой и i вершиной

$(x, y, z)$-координаты пробной точки в СК грани

$(\xi_i, \eta_i, \zeta)$-координаты i вершины грани в СК грани

$$\begin{pmatrix}\Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_i \\ \eta_i \\ \zeta\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}$$

# Модель многогранника

$$\mathbf{a} = -\nabla U = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{\partial U}{\partial y} \quad \frac{\partial U}{\partial z} \right)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla U = G\sigma \sum_{faces} A^{-1} \left( \frac{\partial U_{triangle}}{\partial x} \quad \frac{\partial U_{triangle}}{\partial y} \quad \frac{\partial U_{triangle}}{\partial z} \right)^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix}$$

A – матрица перехода
СК тела → СК грани

$$\frac{\partial}{\partial x} U_{triangle} = -\frac{\Delta z}{2} \left( \left( \eta_2 - \eta_1 \right) L_{12} + \left( \eta_3 - \eta_2 \right) L_{23} + \left( \eta_1 - \eta_3 \right) L_{31} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} U_{triangle} = \frac{\Delta z}{2} \left( \left( \xi_2 - \xi_1 \right) L_{12} + \left( \xi_3 - \xi_2 \right) L_{23} + \left( \xi_1 - \xi_3 \right) L_{31} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} U_{triangle} = -\frac{1}{2} \left( \det_{12} L_{12} + \det_{23} L_{23} + \det_{31} L_{31} \right) + \Delta z \left( S_1 + S_2 + S_3 - \operatorname{sign}\left( \Delta z \right) \pi \right)$$

# Модель сферических гармоник

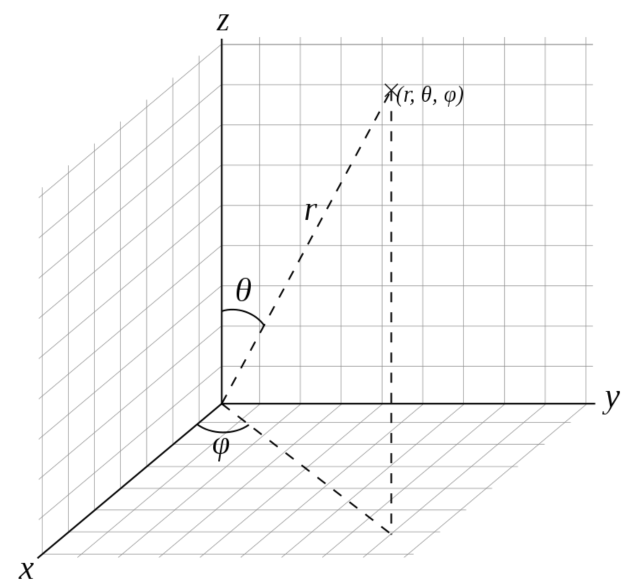
$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{G}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{r^l}P_{l,m}\left[\sin\left(\theta\right)\right]\left\{C_{l,m}\cos\left(m\varphi\right)+S_{l,m}\sin\left(m\varphi\right)\right\}$$

$r-$ расстояние до "пробной точки"

$\theta,\varphi-$ зенитный и азимутальный углы для "пробной точки"

$P_{l,m}-$ присоединенный полином Лежандра

$C_{l,m}, S_{l,m}-$ коэффициенты разложения




$$P_{l,m}\left[x\right]=\frac{1}{2^l}\left(1-x^2\right)^{m/2}\sum_{j=0}^{l}\frac{\left(-1\right)^j\left(2l-2j\right)!}{j!\left(l-j\right)!\left(l-2j-m\right)}x^{l-2j-m}$$

$$P_l\left[x\right]=P_{l,0}\left[x\right]$$

$$C_{l,m}=\sum_{all\_tetr}r_{tetr}^l\left(2-\delta_{0m}\right)\frac{\left(l-m\right)!}{\left(l+m\right)!}P_{l,m}\left[\sin\left(\theta_{tetr}\right)\right]\cos\left(m\varphi_{tetr}\right)M_{tetr}$$

$$S_{l,m}=\sum_{all\_tetr}r_{tetr}^l\left(2-\delta_{0m}\right)\frac{\left(l-m\right)!}{\left(l+m\right)!}P_{l,m}\left[\sin\left(\theta_{tetr}\right)\right]\sin\left(m\varphi_{tetr}\right)M_{tetr}$$

$r_{tetr}-$ расстояние до цт тетраэдра

$\theta_{tetr},\varphi_{tetr}-$ зенитный и азимутальный углы для цт тетраэдра

# Модель сферических гармоник

$$\mathbf{a} = -\nabla U$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{G}{r^2}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{r^l}(l+1)P_{l,m}\left[\sin(\theta)\right]\left(C_{l,m}\cos(m\varphi)+S_{l,m}\sin(m\varphi)\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{G}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{r^l}\left(P_{l,m+1}\left[\sin(\theta)\right]-m\tan(\theta)P_{l,m}\left[\sin(\theta)\right]\right)\times\left(C_{l,m}\cos(m\varphi)+S_{l,m}\sin(m\varphi)\right),$$

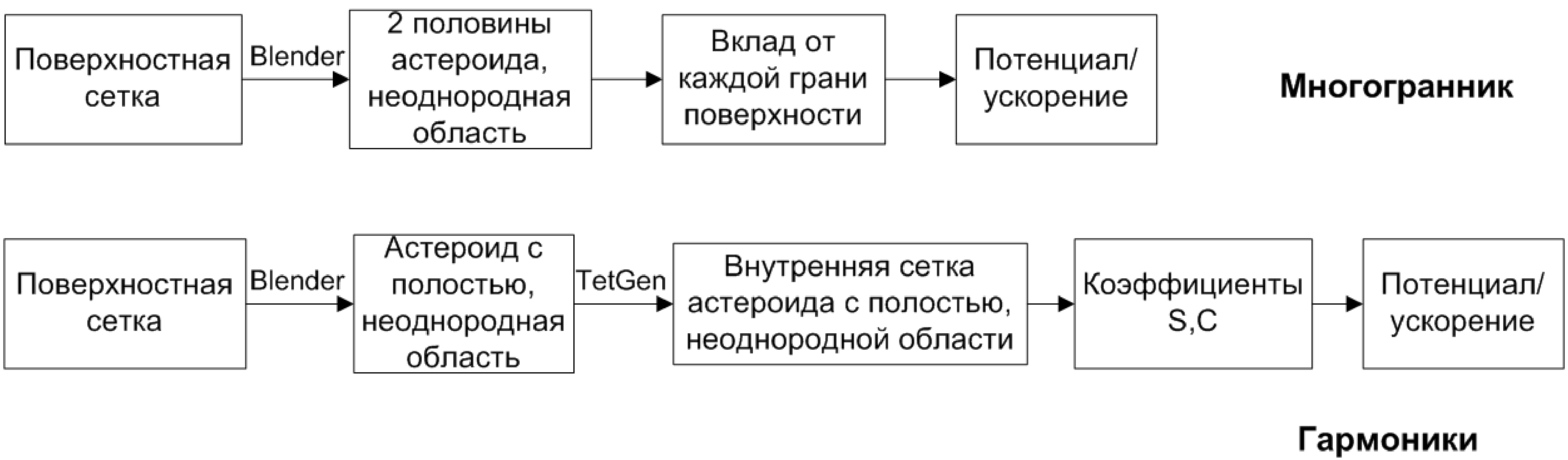
$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{G}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{r^l}P_{l,m}\left[\sin(\theta)\right]\left(-C_{l,m}\sin(m\varphi)+S_{l,m}\cos(m\varphi)\right).$$

$$a_x = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)x-\left(\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)y-\frac{\mu x}{r^3}$$

$$a_y = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)y+\left(\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)x-\frac{\mu y}{r^3}$$

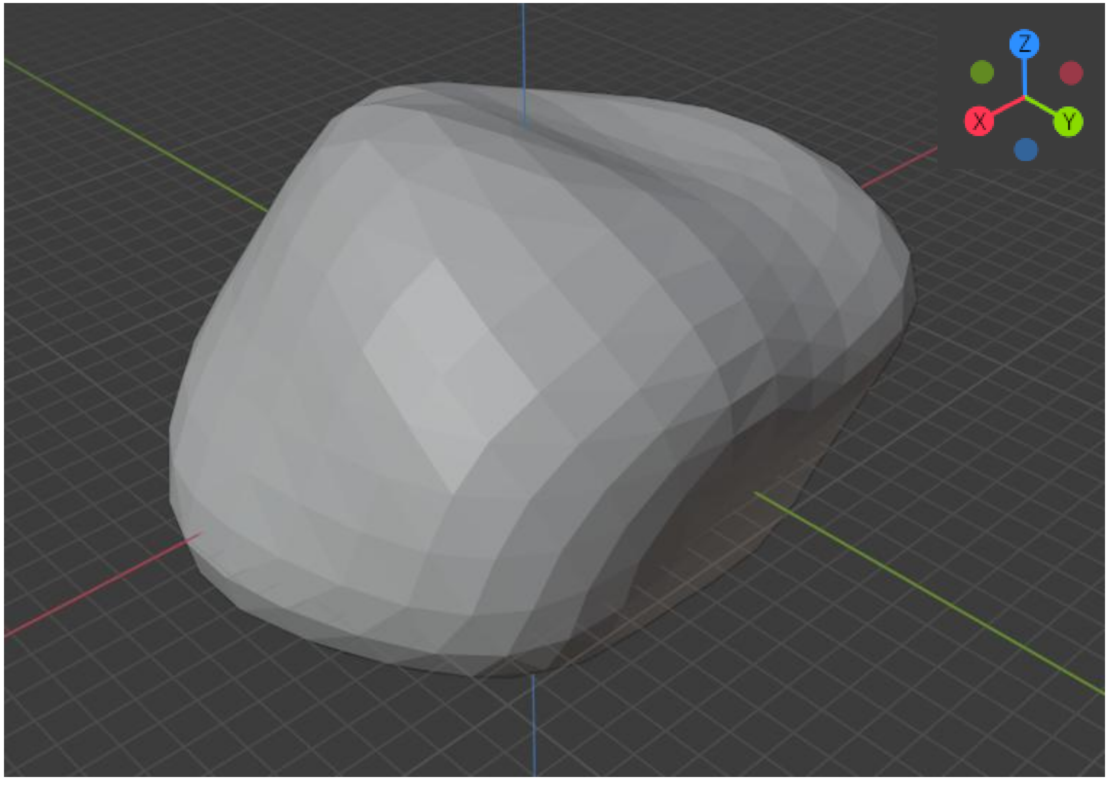
$$a_z = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}z+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta}-\frac{\mu z}{r^3}$$

# Схема расчета



# (532) Геркулина

- Масса $2{,}29 \cdot 10^{19}$ кг
- Размеры $260 \times 220 \times 215$ км



# Точность модели сферических гармоник

Метод многогранника → точное значение

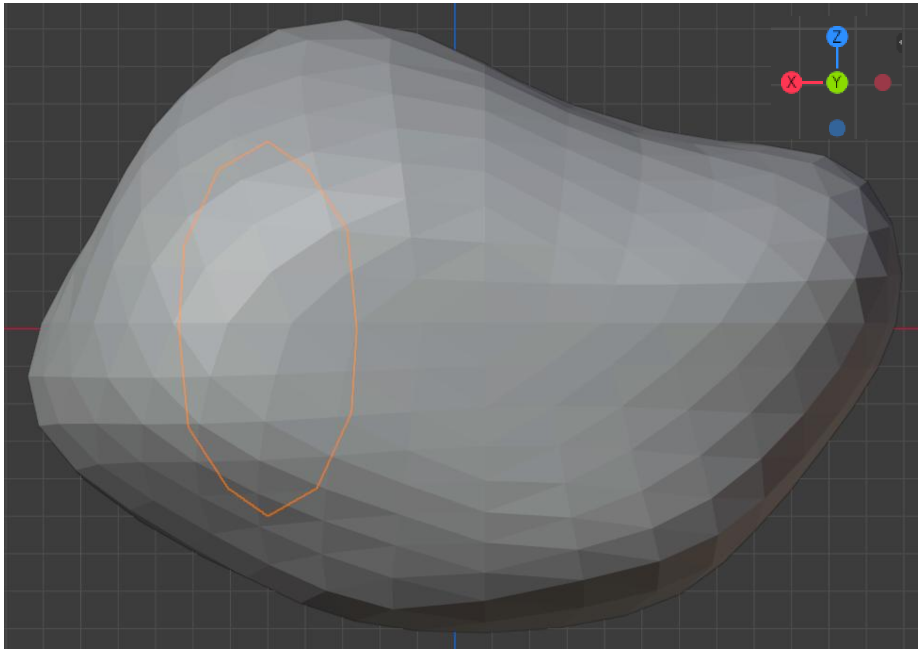
Метод сферических гармоник → L=6

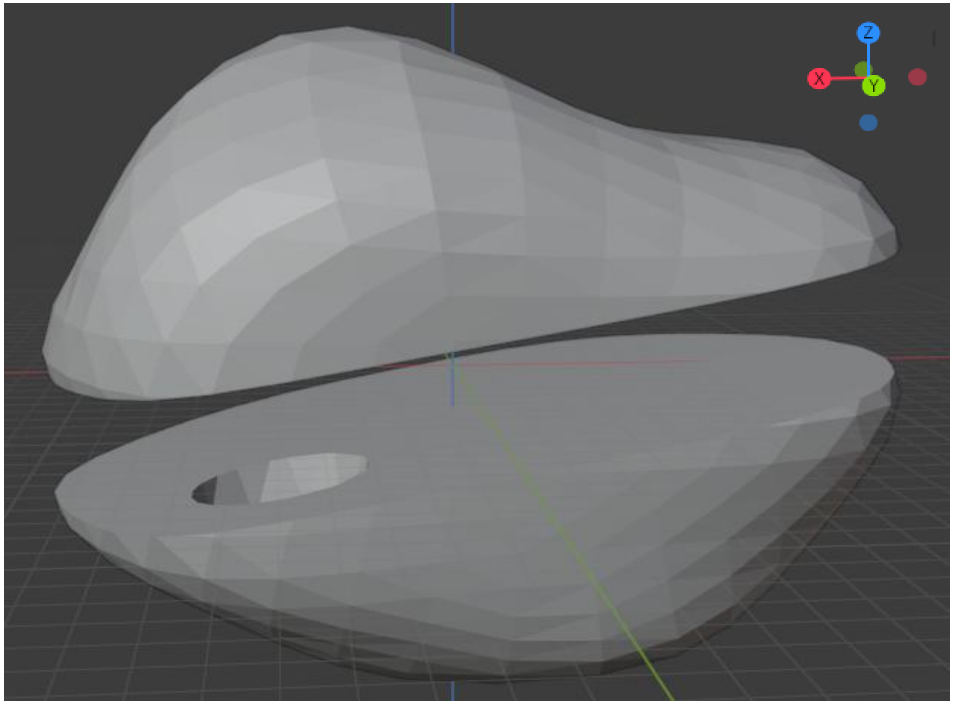
| Расстояние | Относительная ошибка потенциала | Относительная ошибка ускорения |
|---|---|---|
| **2r** | 0,1313% | 0,9699% |
| **3r** | 0,0885% | 0,6148% |
| **4r** | 0,0666% | 0,3465% |
| **50r** | 0,0053% | 0,0022% |

# (532) Геркулина

Размеры области 25×25×50 км (3,25% от общего объема)

Положение центра области (50, 40, 0)



# Сравнение

Плотность астероида $6.516 \cdot 10^{12}$ кг/км$^3$

Плотность области $7.874 \cdot 10^{12}$ кг/км$^3$ (железо)

Плотность области $4.68 \cdot 10^{12}$ кг/км$^3$ (силикат)

Плотность области $11.342 \cdot 10^{12}$ кг/км$^3$ (свинец)

- **Ускорение**

Астероид с полостью – 3.239%

Астероид с железной областью – 0.675%

Астероид с силикатной областью – 0.91%

Астероид с свинцовой областью – 2.4%

# Заключение

- В работе построена методика расчета коэффициентов разложения по сферическим гармоникам с заданной точностью для астероида с неоднородностями
- Рассмотрено влияние неоднородной области на величину ускорения

Работа поддержана грантом РНФ № 19-11-00256

# Спасибо за внимание!