Исследование методов прогнозирования положения космических объектов в задаче предотвращения столкновений

БЕЛЫЙ Г.Ю., ИВАНОВ Д.С.

65-Я ВСЕРОССИЙСКАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МФТИ

6 апреля, 2023 г.

Введение

- Рассматривается применение **метода тензоров переноса** (state transition tensors, STT) в задаче предотвращения столкновений.
- Метод применяется для **прогнозирования неопределенностей**. Он основан на локальной аппроксимации с помощью полиномов Тейлора.
- Метод STT соединяет в себя **высокую скорость расчета** и достаточную точность оценки.

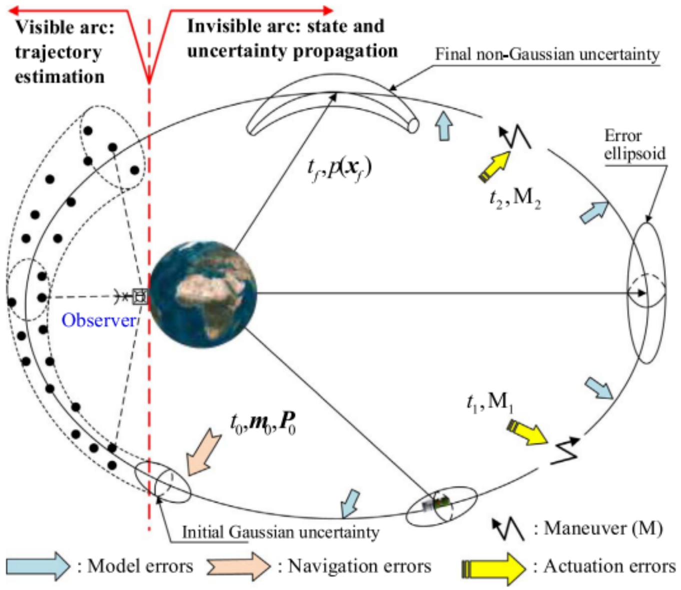


Рис. 1. Процесс прогнозирования неопределенностей

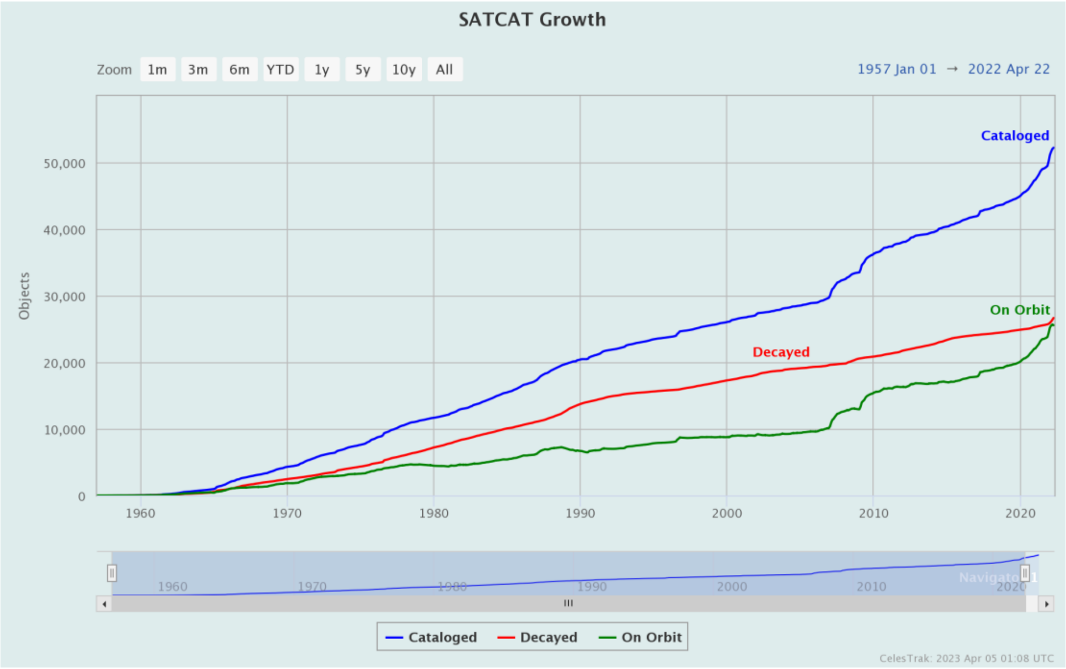


Рис. 2. В настоящее время численность каталога наблюдаемых космических объектов составляет 25,501 КО

Группировка	Численность
Starlink (Gen1 & Gen2), USA	13000
OneWeb, UK	648
Amazon Kuiper, USA	3236
Guo Wang, China	12992

Рис. 3. Планируемые широкомасштабные группировки

Структура доклада

1. Введение в прогнозирование неопределенностей

    а) Теоретические основы

    б) Обзор используемых методов

2. Метод тензоров переноса (математический аппарат, используемые приближения)
3. Применение в задачах орбитальной динамики (в рамках центрального поля, с учетом гармоники J_2 гравитационного потенциала)
4. Результаты моделирования и сравнительный анализ (на основе метода Монте-Карло)
5. Применения метода тензоров переноса в тестовой задаче предотвращения столкновения

Теоретические основы

Рассматриваются динамические системы, которые можно описать дифференциальным уравнением вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}),\ \mathbf{x} = \phi(t; \mathbf{x}^0, t^0)$$

Можно определить **функцию обратного решения**:

$$\mathbf{x}^0 = \psi(t, \mathbf{x}; t^0),\ \psi(t, \mathbf{x}; t^0) = \phi(t^0; t, \mathbf{x})$$

Для описания неопределенностей используется вероятностный подход. Если положить ,что вектор состояния космического аппарата является случайной величиной, то в рамках орбитальной динамики он будет удовлетворять **стохастическому уравнению Ито**:

$$d\mathbf{x}(t) = f(t, \mathbf{x})dt + \mathbf{G}(t)d\beta(t)$$

где **x** ∈ $\mathbf{R}^n$ – многомерная случайная величина, β ∈ $\mathbf{R}^m$- некоторый шум (с нулевым средним и ковариацией **Q**(t)). Функция f описывает детерминизированную (неслучайную), часть уравнения , а **G**(t) – корреляцию со случайным шумом .

Если случайная величина удовлетворяет уравнению Ито, эволюция ее функции плотности вероятности может быть описана **уравнением Колмогорова**:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\{p(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{f}_i(\mathbf{x}, t)\} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j}\left[p(\mathbf{x}, t)\{G(\mathbf{x}, t)Q(t)G^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}, t)\}_{ij}\right]$$

Вероятность нахождения **x** в некотором фазовом объеме, определяемая с помощью функции плотности вероятности – **интегральный инвариант** :

$$\Pr(\mathbf{x} \in \mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} p[\mathbf{x}(t)]\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathcal{B}^0} p\left[\phi\left(t; \mathbf{x}^0, t^0\right)\right]\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^0}\right|\mathrm{d}\mathbf{x}^0 = \int_{\mathcal{B}^0} p\left(\mathbf{x}^0\right)\mathrm{d}\mathbf{x}^0$$

Заменив функцию решения на функцию обратного решения, мы можем получить выражение для функции плотности вероятности в любой момент времени. При этом смена фазовых объемом компенсируется сменой аргументов функции плотности вероятности. Тогда при известном начальном распределении функция плотности вероятности описывается как:

$$p\left[\phi\left(t; \mathbf{x}^0, t^0\right)\right] = p\left(\mathbf{x}^0\right)\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^0}\right|^{-1}$$

Методы прогнозирования неопределенности

- Линейные методы используют линеаризацию (локальную или статистическую) для приближенного решения уравнения Колмогорова. Обладают высокой вычислительной эффективностью.

- Моделирование с помощью методов Монте-Карло не требует знания функции плотности вероятности и позволяет использовать высокоточные пропагаторы. Считается "стандартом" точности при прогнозировании неопределенности

- Нелинейные методы используют различный разложения (Тейлора, Лежандра и т.д.). для учета нелинейности орбитальной динамики.

- Наибольшую эффективность показывают гибридные методы, соединяющие в себе различный подходы: (STT + GMM, MC + STT, GMM + UT и другие)

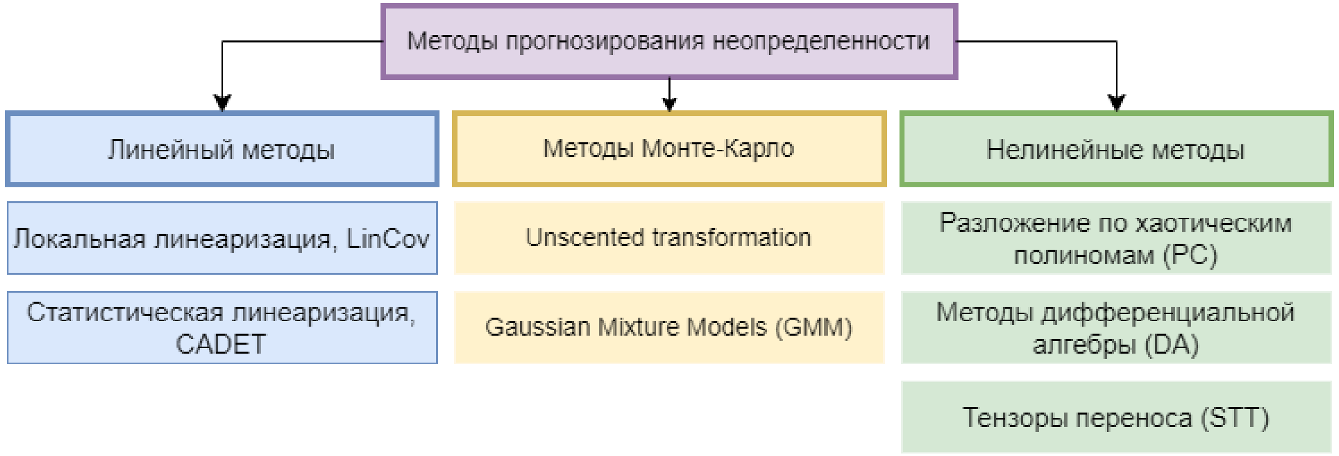


Рис. 4. Используемые методы прогнозирования

Метод тензоров переноса

Метод основан на нелинейной аппроксимации функции решения ϕ(t, x) с помощью полиномов Тейлора. Разложения производится относительно номинальной траектории(**x***), полученной с помощью интегрирования начального среднего состояния до некоторого момента времени. Рассчитывается **прогноз отклонения относительной номинальной траектории** (**X** = **x** – **x***). Так разложения отклонения порядка m описывается как:

$$\mathbf{X}_i(t) = \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{p!} \Phi_{i,k_1\ldots k_p} \mathbf{X}^0_{k_1} \ldots \mathbf{X}^0_{k_p}$$

Тензор переноса порядка p определяется выражением (* означает, что дифференцирование производится по номинальной траектории):

$$\Phi_{i,k_1\ldots k_p} = \left. \frac{\partial^p \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{x}^0_{k_1} \ldots \partial \mathbf{x}^0_{k_p}} \right|_{*}$$

Аналогично относительного номинальной траектории происходит вычисление вероятностных моментов. Относительное мат. ожидание (**M** = **m** – **x***) определяется как:

$$\mathbf{m}(t) = \int_{\infty} \mathbf{x}(t) p[\mathbf{x}(t)] \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\infty} \phi\left(t; \mathbf{x}^0, t^0\right) p\left(\mathbf{x}^0\right) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^0} \right|^{-1} \mathrm{d}\mathbf{x}^0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{M}_i(t) = \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{p!} \Phi_{i,k_1\ldots k_p} \int_{\infty} p\left(\mathbf{X}^0\right) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^0} \right|^{-1} \mathbf{X}^0_{k_1} \ldots \mathbf{X}^0_{k_p} \, \mathrm{d}\mathbf{X}^0$$

Матрица ковариации определяется аналогично:

$$\begin{aligned} [P](t) &= \int_{\infty} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}(t)]^{\mathrm{T}} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}(t)] p[\mathbf{x}(t)] \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{\infty} \left[\phi\left(t; \mathbf{x}^0, t^0\right) - \mathbf{m}(t)\right]^{\mathrm{T}} \left[\phi\left(t; \mathbf{x}^0, t^0\right) - \mathbf{m}(t)\right] p\left(\mathbf{x}^0\right) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^0} \right|^{-1} \mathrm{d}\mathbf{x}^0 \\ \Leftrightarrow [P]_{ij}(t) &= \left[\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \frac{1}{p!q!} \Phi_{i,k_1\ldots k_p} \Phi_{j,l_1\ldots l_q} \int_{\infty} p\left(\mathbf{X}^0\right) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^0} \right|^{-1} \mathbf{X}^0_{k_1} \ldots \mathbf{X}^0_{k_p} \mathbf{X}^0_{l_1} \ldots \mathbf{X}^0_{l_q} \, \mathrm{d}\mathbf{X}^0 \right] - \mathbf{M}_i(t) \mathbf{M}_j(t) \end{aligned}$$

Метод тензоров переноса

Для случая центрального поля используется система орбитальных элементов Пуанкаре, которая выражается через кеплеровы элементы орбиты следующим образом:

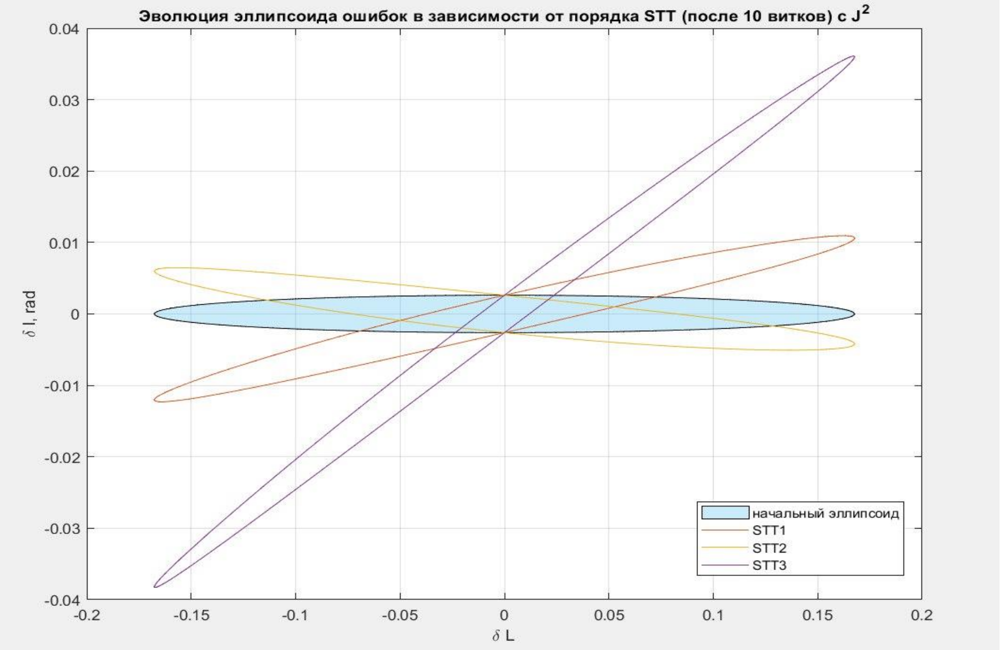
$$L = \sqrt{\mu a} \quad l = \Omega + \omega + M$$
$$G = -g \tan(\omega + \Omega) \quad g = \sqrt{2L(1 - \sqrt{1 - e^2})} cos(\omega + \Omega)$$
$$H = -h \tan \Omega \quad h = \sqrt{2L\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)} \cos \Omega$$

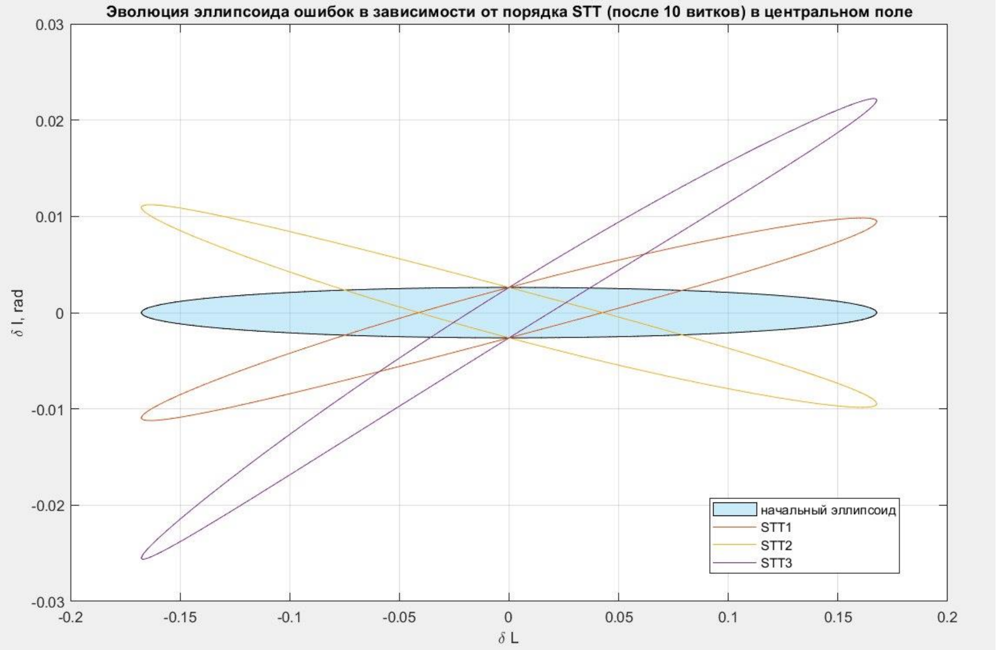
Тогда тензор переноса является функцией только элемента L:

$$\Phi_{i,k_1...k_p} = \begin{cases} \left[(-1)^p \mu^2 (p+2)! \Delta t / 2!\right] / \left[\left(L^0\right)^{p+3}\right] & i = 2 \quad \text{и} \quad k_1 = k_2 = \ldots = k_p = 1 \\ 1 & p = 1 \quad \text{и} \quad k_1 = i \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

В случае учета возмущений от гармоники гравитационного потенциала J2 необходимо произвести дополнительный переход к элементам Делоне для получения аналитических выражений для тензора переноса:

$$\dot{a} = 0 \quad \dot{\Omega} = -\frac{3n^0 r_E^2 J_2}{2(p^0)^2} \cos i^0 \quad \dot{e} = 0$$
$$\dot{\omega} = \frac{3n^0 r_E^2 J_2}{4(p^0)^2} \left(4 - 5\sin^2 i^0\right) \quad \dot{i} = 0$$
$$\dot{M}^0 = \frac{-3n^0 r_E J_2 \sqrt{1 - (e^0)^2}}{4(p^0)^2} \left(3\sin^2 i^0 - 2\right)$$





Метод Монте-Карло

Для валидации полученного с помощью тензоров переноса распределения принято использовать распределение, вычисленное с помощью метода Монте-Карло.
На известном начальном распределении, задаваемым с помощью матрицы ковариации, с помощью генератора случайных чисел (с нулевым средним) равномерно размещается N точек. Далее для каждой точки выполняется прогнозирование траектории движения. При этом вероятностные моменты легко определяется из полученной статистики по финальным точкам.

Основываясь на законе больших чисел и сходимости статистики, большое число точек позволяет максимально близко оценить реальное распределение случайной величины**.**
Такой подход часто используется в практических задачах, но он непременно требует больших вычислительных мощностей на фоне значительного числа точек.
В текущих тестовых случаях используется моделирование с числом точек N = 10^4.

$$\boldsymbol{m}_i(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_i(t;\boldsymbol{x}_k^o, t^o)$$

$$\boldsymbol{P}_{ij}(t) = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left[\boldsymbol{\phi}_i\left(t;\boldsymbol{x}_k^o, t^o\right) - \boldsymbol{m}_i(t)\right]\left[\boldsymbol{\phi}_j\left(t;\boldsymbol{x}_k^o, t^o\right) - \boldsymbol{m}_j(t)\right]$$

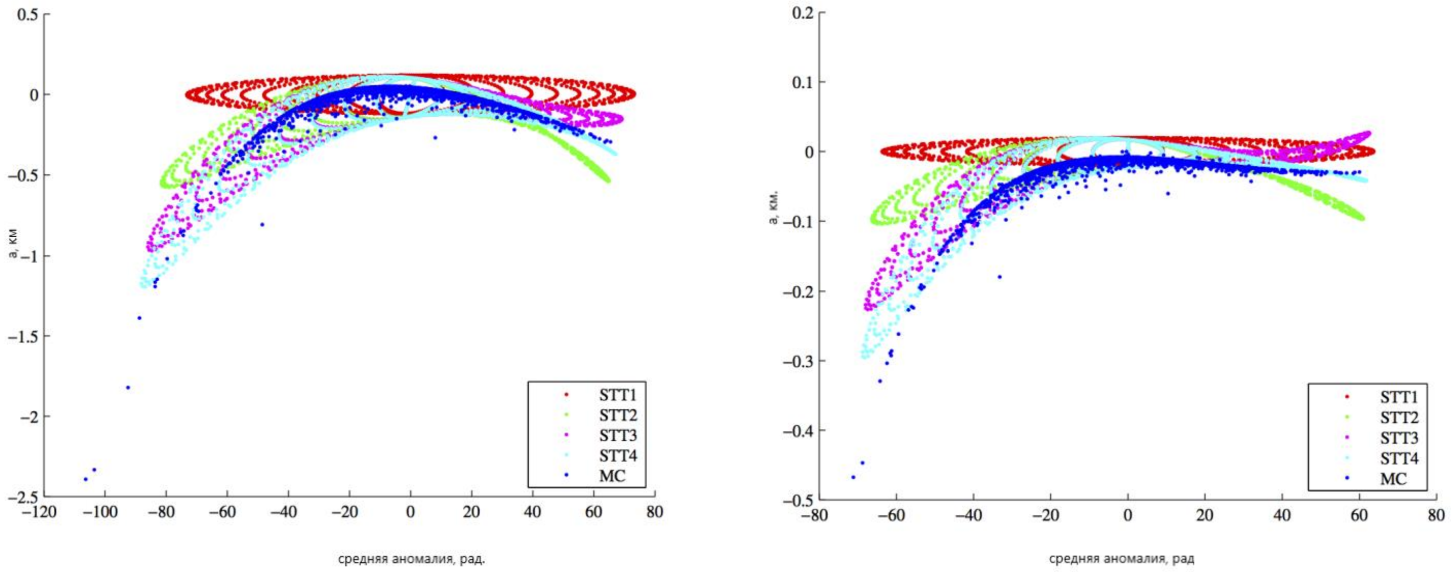


Рис. 5. Пример распределения эллипсоидов ошибок для центрального поля (левый график) и с учетом гармоники J2 (правый график) в зависимости от используемого метода (после 30 витков).

Сравнительный анализ

Для анализа рассматривается следующая орбита :

$$a = 6972\ км,\ e = i = \Omega = \omega = M = 0$$
$$\rightarrow L = 4.6679,\ l = G = g = H = h = 0$$

Начальный отклонения по положения 5 км по каждой оси в орбитальной системе координат, по скорости – 1 м/с.

Рассматривались временные промежутки в 5, 10, 30 и 100 витков. Производилось 100 симуляций методом Монте-Карло. Результирующие вероятностные моменты для валидации получались усреднением по всем симуляциям. Ввиду того, что в ходе движения в центральном поле меняется только один орбитальный элемент (l) ,то для него и показываются основные вероятностные соотношения.

В ходе анализа для тензоров 3 порядка (STT3) получена **относительная ошибка вычисления в 4% для мат. ожидания и 1% для компонентов ковариационной матрицы**.

Период прогноза, количество витков	MC	STT1		STT2		STT3	
	<l>	<l>	Δ,%	<l>	Δ,%	<l>	Δ,%
5	1.132	0.011	99	1.043	7.9	1.087	4.0
10	2.177	0	100	2.016	7.4	2.096	3.7
30	4.561	1.283	72	4.921	7.9	4.399	3.6
100	11.874	4.946	58	10.981	7.5	11.41	3.9

Период прогноза, количество витков	MC		STT1		STT2		STT3	
	cov_{Ll}	cov_{ll}	cov_{Ll}	cov_{ll}	cov_{Ll}	cov_{ll}	cov_{Ll}	cov_{ll}
5	-2.138	33	-2.196	35	-2.162	34	-2.151	33
10	-4.584	124	-4.708	132	-4.634	126	-4.612	125
30	-10.503	891	-10.787	954	-10.619	910	-10.567	899
100	-38.911	6893	-39.962	7482	-39.339	7038	-39.148	6966

Рис. 6. Результаты сравнительного анализа для математического ожидания и ненулевых членов матрицы ковариации для орбитального элемента l *

	MC	STT1	STT2	STT3
Время вычисления, сек.	639	0.38	3.4	5.7

Рис. 7. Время вычислений для различный методов (период прогноза – 30 витков)

*приведены результаты для расчетов в центральном поле

Применение в задаче предотвращения столкновения

Рассматривается возможное применение метода прогнозирования в задаче уклонения от опасного сближения. Проводилось моделирования сближения между тестовыми объектами со следующими орбитами:

$i,^\circ$	$\Omega,^\circ$	e	$\omega,^\circ$	$M,^\circ$	a, км
64	0	0	0	0	800
90	0	0	0	0	805

Момент наибольшего сближения рассчитывался с помощью метода ANCAS, использующий сплайновую интерполяции с минимизацией по расстоянию. В момент сближения и определялась вероятностные моменты методом STT3.

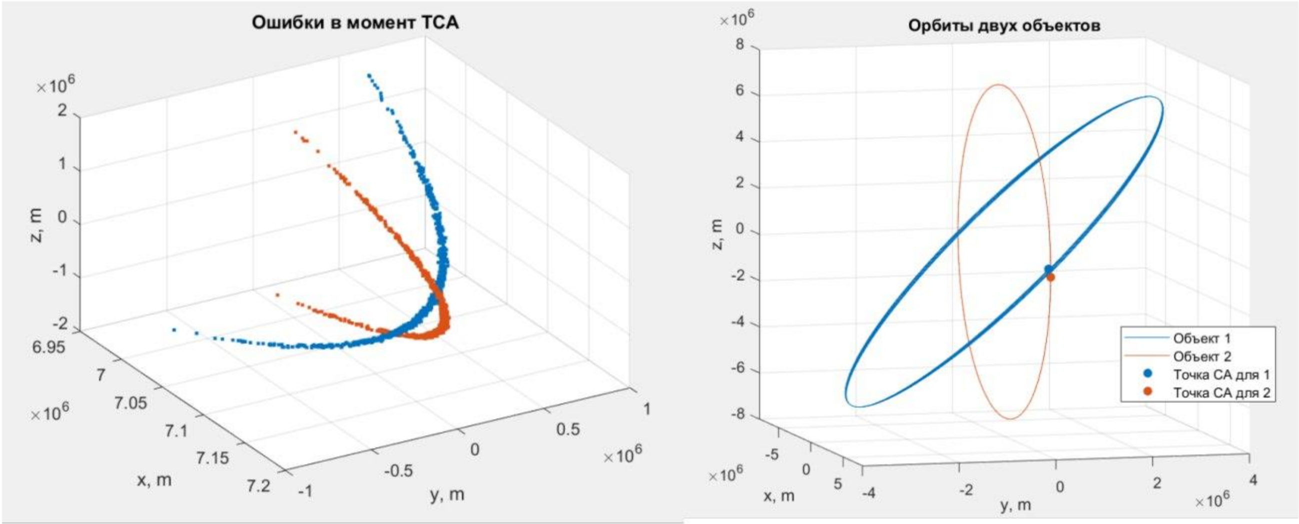


Рис. 8. Пример эволюции возможных положений сближающихся объектов в момент нахождения на минимальном расстояния (в данном случае 0.6 км)

Далее для валидации алгоритма рассчитывалась вероятность столкновения (метод Patera) – общепринятая метрика оценки опасности сближения.

Полученная вероятность столкновения совпадает с тестовым значением с относительной ошибкой в 2%, что позволяет говорить о применимости данного метода в реальном сервисе по уклонению от опасных сближений.

Используемые источники

- CelesTrak: SATCAT Boxscore. *(n.d.). https://celestrak.org/satcat/boxscore.php*.
- *Rovetto R.J., Kelso T.S.* Preliminaries of a space situational awareness ontology. 26th AIAA/AAS Space Flight Mechanics meeting, Napa, 2016, No. 158 – 16 p.
- *Park S.H.* Nonlinear Trajectory Navigation [Ph.D. Thesis], University of Michigan, 2007 - 189 p.
- *Park R.S., Scheeres D.J.* Nonlinear Mapping of Gaussian Statistics: Theory and Applications to Spacecraft Trajectory Design. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006. Vol. 6, 1367–1375.
- *Frank, T.* Nonlinear Fokker – Planck Equations, Springer – Verlag: New York, 2005. XII – 404 p
- *Fujimoto, Kohei & Scheeres, D. & Alfriend, K*. Analytical Nonlinear Propagation of Uncertainty in the Two-Body Problem. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2012. 35. 497-509. 10.2514/1.54385.
- *Fujimoto, K., and Scheeres, D. J.*, Rapid Non-Linear Uncertainty Propagation via Analytical Techniques, Proceedings of the Air Force Maui Optical and Space Surveillance (AMOS) Technologies Conference Maui Economic Development Board, Kihei, HI, 2012.
- *Luo, Yazhong & Yang, Zhen*. A review of uncertainty propagation in orbital mechanics. Progress in Aerospace Sciences, 2016. 89. 10.1016/j.paerosci.2016.12.002

Спасибо за внимание !

Приложение

Приближение о гауссовых ошибках

Если принять упрощение, что ошибки описывается гауссовым распределением, то функция плотности вероятности примет вид:

$$p(\delta \boldsymbol{x}^o, t^o) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \boldsymbol{P}^o}} \exp\{-\tfrac{1}{2}(\delta \boldsymbol{x}^o - \delta \boldsymbol{m}^o)^T \boldsymbol{\Lambda}^o (\delta \boldsymbol{x}^o - \delta \boldsymbol{m}^o)\}$$

В этом случае выражение для оператора ожидаемого значения от многомерного случайной величины имеет вид:

$$E[\boldsymbol{x}_i] = \boldsymbol{m}_i$$

$$E[\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_j] = \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{m}_j + \boldsymbol{P}_{ij}$$

$$E[\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{x}_k] = \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{m}_j \boldsymbol{m}_k + (\boldsymbol{m}_i \boldsymbol{P}_{jk} + \boldsymbol{m}_j \boldsymbol{P}_{ik} + \boldsymbol{m}_k \boldsymbol{P}_{ij})$$

- Тогда моменты первого порядка определяются как:

$$\delta \boldsymbol{m}(t) = \boldsymbol{\Phi} \delta \boldsymbol{m}^o$$
$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{P}^o \boldsymbol{\Phi}^T - \delta \boldsymbol{m} \delta \boldsymbol{m}^T$$

- Вероятностные моменты второго порядка :

$$\delta \boldsymbol{m}_i(t) = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}_{i,ab} \boldsymbol{P}^o_{ab}$$

$$\boldsymbol{P}_{ij}(t) = \boldsymbol{\Phi}_{i,a} \boldsymbol{\Phi}_{j,\alpha} \boldsymbol{P}^o_{a\alpha} - \delta \boldsymbol{m}_i \delta \boldsymbol{m}_j + \tfrac{1}{4} \boldsymbol{\Phi}_{i,ab} \boldsymbol{\Phi}_{j,\alpha\beta} \Big[\boldsymbol{P}^o_{ab} \boldsymbol{P}^o_{\alpha\beta} + \boldsymbol{P}^o_{a\alpha} \boldsymbol{P}^o_{b\beta} + \boldsymbol{P}^o_{a\beta} \boldsymbol{P}^o_{b\alpha} \Big]$$

- Вероятностные моменты третьего порядка :

$$\delta \boldsymbol{m}_i(t^k) = \sum_{p=1}^{3} \frac{1}{p!} \boldsymbol{\Phi}_{i,k_1 \cdots k_p} E\Big[\delta \boldsymbol{x}^o_{k_1} \cdots \delta \boldsymbol{x}^o_{k_p} \Big]$$

Орбитальные элементы

Орбитальные элементы Пуанкаре применятся в связи с тем, что образуют связные группы, где каждая пара элементов описывает угловое положение, ее угловое движение и геометрию орбиты. Функция обратного решения, описывается через данные элементы следующим образом:

$$L^0(t) = L \quad l^0(t) = l + \mu^2/L^3(t^0 - t)$$
$$G^0(t) = G \quad g^0(t) = g$$
$$H^0(t) = H \quad h^0(t) = h$$

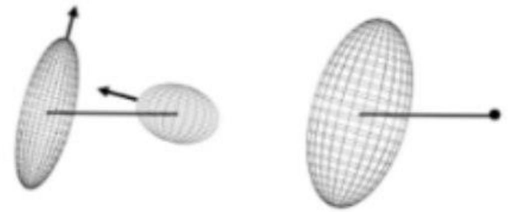
Орбитальные элементы Делоне определяются как (использованы аналогичные буквенные обозначения:

$$L = \sqrt{\mu a} \qquad l = M$$
$$G = L\sqrt{1 - e^2} \qquad g = \omega$$
$$H = G\cos i \qquad h = \Omega$$

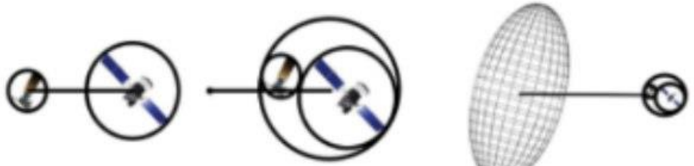
С учетом J2 прямое решение выражается как:

$$L(t) = L^0 \qquad l(t) = l^0 + \left[\frac{-3\mu^4 r_E^2 J_2\{(G^0)^2 - 3(H^0)^2\}}{4(L^0)^4(G^0)^5} + \frac{\mu^2}{(L^0)^3}\right]\Delta t$$
$$G(t) = G^0 \qquad g(t) = g^0 + \left\{\frac{-3\mu^4 r_E^2 J_2}{4(L^0)^3(G^0)^4} + \frac{15\mu^4 r_E^2 J_2 (H^0)^2}{4(L^0)^3(G^0)^6}\right\}\Delta t$$
$$H(t) = H^0 \qquad h(t) = h^0 - \frac{3\mu^4 r_E^2 J_2 H^0}{2(L^0)^3(G^0)^5}\Delta t$$

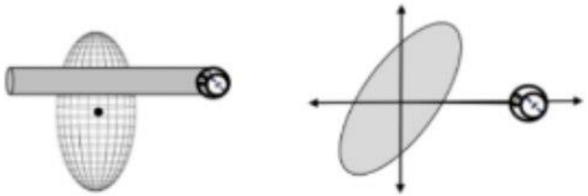
Расчет вероятности столкновения



Шаг 1:
Вычисляется суммарный эллипсоид ошибок и его центр помещается в центр налетающего объекта



Шаг 2:
Вычисляется суммарный размер двух объектов и соответствующая габаритная сфера помещается в центр КА



Шаг 3:
Для быстрых столкновений движение эллипсоида считается криволинейным, а сам эллипсоида - постоянным

$$P_C = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\left|C^*\right|}} \iint_A \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{r}^{\,T} C^{*-1}\vec{r}\right) dXdZ$$

Шаг 4:
Вероятность столкновения есть интеграл от плотности вероятности по области пересечений суммарного эллипсоида и габаритной сферы