# Исследование различных режимов движения тетраэдральной формации, управляемой с помощью силы Лоренца

Аспирант группы А05-201 Чернов Кирилл

Научный руководитель к.ф.-м.н. Иванов Д.С.

Московский физико-технический институт,

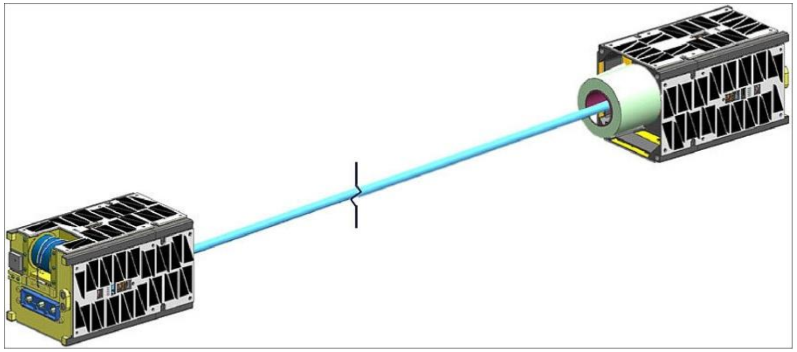
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

# Содержание работы

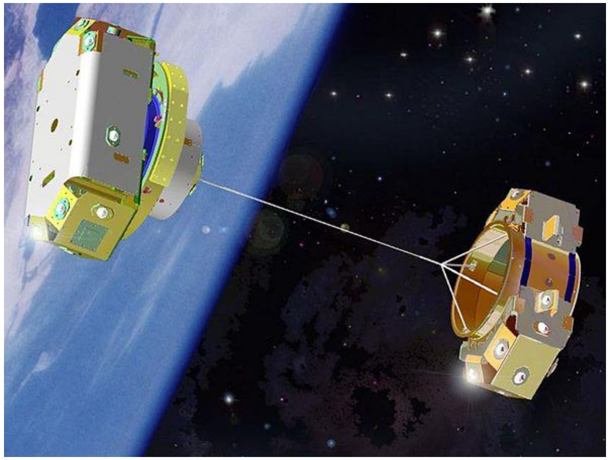
- Введение
- Постановка задачи
- Расчет требуемого управления
- Вычисление силы Лоренца
- Численное исследование
- Заключение

# Электродинамические тросы

- На проводник с током в магнитном поле Земли действует сила
- Эту силу можно использовать для управления движением аппаратов, связанных электродинамическим тросом
- В настоящий момент разрабатывается ряд миссий



Tether Electrodynamics Propulsion CubeSat Experiment (TEPCE)



Tether Physics and Survivability Experiment (TiPS)

# Задачи управления

- Основная задача – удерживать трос в натянутом состоянии
- Для создания центробежной силы система раскручивается относительно центра масс с помощью двигателей
- Существующие проекты нацелены на управление орбитальным движением тросовой системы
- В настоящей работе рассматриваются 4 аппарата, соединенных электродинамическими тросами, с помощью которых обеспечивается:
  – Угловое движение для натяжения тросов
  – Требуемое орбитальное движение центра масс

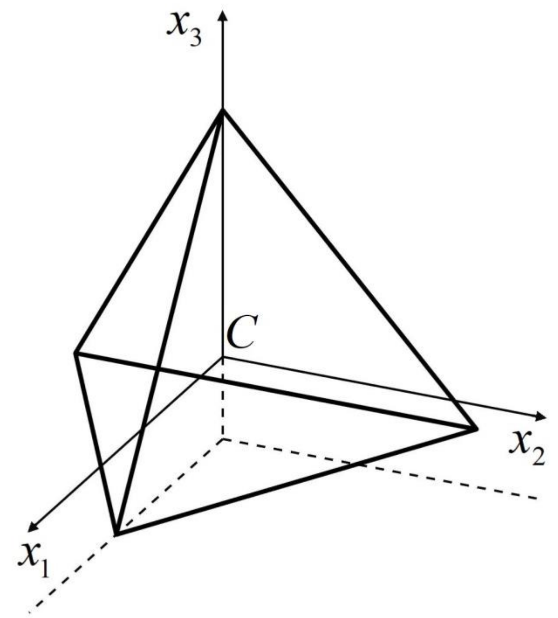
# Постановка задачи

**Дано:**

- 4 спутника в вершинах правильного тетраэдра
- Каждый спутник соединен с остальными жесткими стержнями
- Стержни проводят электрический ток

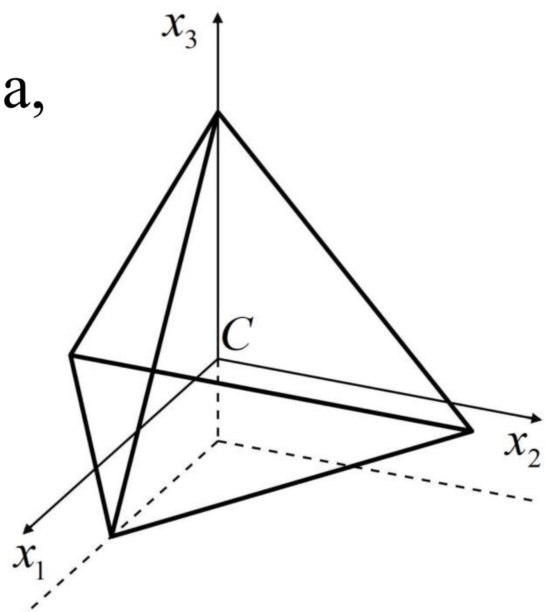
**Требуется:**

Построить управление
с помощью электрического тока,
текущего по стержням,
для достижения требуемого
углового и орбитального движения
системы



# Системы координат

- Инерциальная – центр в центре Земли, система не вращается
- Орбитальная – движется по круговой орбите
- Опорная – центр движется по орбите, система вращается с постоянной угловой скоростью
- Связанная – центр в центре масс тетраэдра, две оси параллельны одной из граней, третья ось направлена на вершину, не лежащую на этой грани



# Уравнения движения

## Тетраэдр (связанная система координат)

### Орбитальное

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\dfrac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{f}_{J_2} + \mathbf{f}_{control} \end{cases}$$

### Угловое

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{M}_{grav} + \mathbf{M}_{control} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right) \\ \dot{\mathbf{q}} = \dfrac{1}{2}\mathbf{q} \circ [0; \boldsymbol{\omega}] \end{cases}$$

## Опорная система координат

### Орбитальное

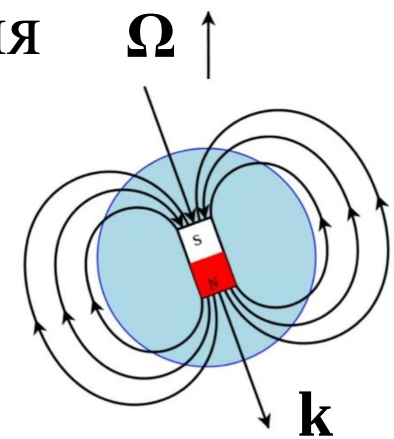
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_{ref} = \mathbf{v}_{ref} \\ \dot{\mathbf{v}}_{ref} = -\dfrac{\mu}{r_{ref}^3}\mathbf{r}_{ref} \end{cases}$$

### Угловое

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} = 0 \\ \dot{\mathbf{q}}_{ref} = \dfrac{1}{2}\mathbf{q}_{ref} \circ [0; \boldsymbol{\omega}_{ref}] \end{cases}$$

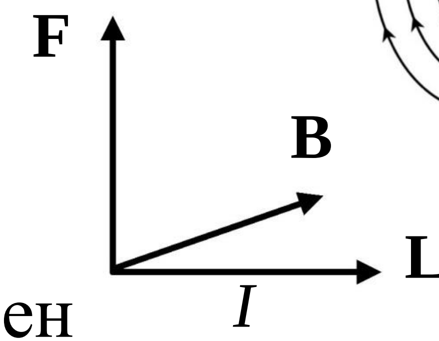
# Сила Лоренца

- Рассматривается модель наклонного диполя Земли для расчета индукции геомагнитного поля




- Сила Лоренца перпендикулярна вектору магнитной индукции

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

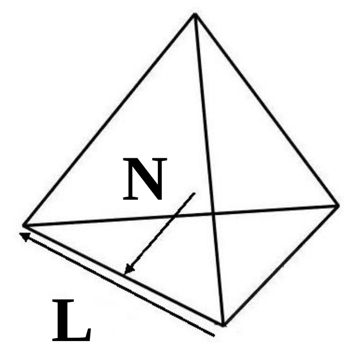



- Момент каждой силы направлен вдоль ребра

$$\mathbf{M} = \mathbf{N} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} \times (I\mathbf{L} \times \mathbf{B}) =$$

$$= \mathbf{L}(\mathbf{N}^T\mathbf{B})I - \mathbf{B}(\mathbf{N}^T\mathbf{L})I = \mathbf{L}(\mathbf{N}^T\mathbf{B})I$$

$$\mathbf{N} \perp \mathbf{L}$$



# Уравнения Хилла–Клохесси–Уилтшира

- Линеаризованные уравнения относительного движения в орбитальной системе координат [1]

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_{orb}\dot{z} = f_x \\ \ddot{y} + \omega_{orb}^2 y = f_y \\ \ddot{z} - 2\omega_{orb}\dot{x} - 3\omega_{orb}^2 z = f_z \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{ref}$$

- Решение для свободного движения

$$\begin{cases} x(t) = -3C_1\omega_{orb}t + 2C_2\cos(\omega_{orb}t) - 2C_3\sin(\omega_{orb}t) + C_4 \\ y(t) = C_5\sin(\omega_{orb}t) + C_6\cos(\omega_{orb}t) \\ z(t) = 2C_1 + C_2\sin(\omega_{orb}t) + C_3\cos(\omega_{orb}t) \end{cases}$$

[1] Hill, G.W. Researches in Lunar Theory // American Journal of Mathematics, 1878. Vol. 1. Pp. 5–26.

# Требуемое относительное движение

- Дрейф по оси *x*

$$x(t) = -\underline{3C_1\omega_{orb}t} + 2C_2\cos(\omega_{orb}t) - 2C_3\sin(\omega_{orb}t) + C_4$$

$$C_1(t_0) = \frac{\dot{x}(t_0)}{\omega_{orb}} + 2z(t_0)$$

- Управление по оси *x* для устранения дрейфа [2]

$$f_{calc,x}(t) = -\frac{\omega_{orb}}{\Delta t}C_1(t_0), \quad t_0 < t < t_0 + \Delta t$$

- Управление с учетом текущего дрейфа

$$f_{calc,x}(t) \sim -C_1(t - dt)$$

[2] Ivanov D., Monakhova U., Ovchinnikov M. Nanosatellites swarm deployment using decentralized differential drag-based control with communicational constraints // Acta Astronautica. 2019. V. 159. P. 646-657.

# Требуемое угловое движение

- Вращение с заданной постоянной угловой скоростью для обеспечения натяжения тросов: $\boldsymbol{\omega}_{ref} = const$
- Движение вдоль требуемой опорной траектории $\mathbf{q}_{ref}$ $\dot{\mathbf{q}}_{ref} = 1/2\mathbf{q}_{ref} \circ [0; \boldsymbol{\omega}_{ref}],\quad \mathbf{q}_{ref}(t=0)$ задается

- Расчет управляющего момента – на основе метода Ляпунова. $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{ref}$, $\mathbf{q}_{rel} = \tilde{\mathbf{q}}_{ref} \circ \mathbf{q}$

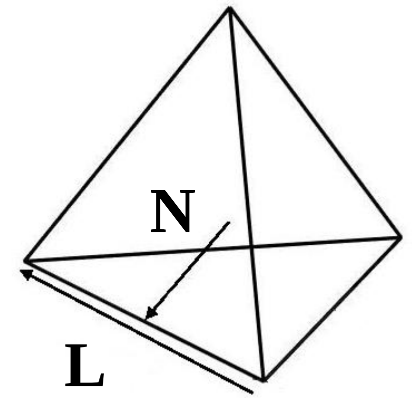
Функция Ляпунова $V = \dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{\omega}_{rel}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{rel}\right) + \mathbf{K}_a \left(1 - q_{rel,0}\right)$

$$\mathbf{M}_{calc} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \boldsymbol{\omega}_{ref}) - \mathbf{K}_a \mathbf{q}_{rel} - \mathbf{K}_w \boldsymbol{\omega}_{rel} - \mathbf{M}_{grav}$$

# Расчет сил тока

- Токи создают силу и момент, равные

$$\mathbf{F}_{appl} = \sum_{i=1}^{6} I_i \mathbf{L}_i \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{M}_{appl} = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{L}_i (\mathbf{N}_i^T \mathbf{B}) I_i$$




- Компоненты силы и момента зависят от токов линейно

$$\begin{bmatrix} f_{appl,x} \\ \mathbf{M}_{appl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_z \sum I_i L_{i,y} - B_y \sum I_i L_{i,z} \\ \sum \mathbf{L}_i (\mathbf{N}_i^T \mathbf{B}) I_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_f^T \\ \mathbf{A}_M \end{bmatrix} = \mathbf{AI},$$

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} B_z L_{i,y} - B_y L_{i,z} \\ \mathbf{L}_i (\mathbf{N}_i^T \mathbf{B}) \end{matrix} \right\|, \mathbf{I} = [I_1, \ldots, I_6]^T$$

# Расчет сил тока

- Токи $I_k$ ограничиваются по модулю параметром $I_{\max}$

$$\begin{cases} \left|\mathbf{M}_{appl}(\mathbf{I}) - \mathbf{M}_{calc}\right|^2 + k_{Mf}\left(f_{appl,x}(\mathbf{I}) - f_{calc,x}\right)^2 \to \min \\ \left|I_k\right| \le I_{\max},\ k = 1\ldots 6 \end{cases}$$

$$\left\|\mathbf{AI} - \mathbf{b}\right\|^2 = \mathbf{I}^T\mathbf{A}^T\mathbf{AI} - 2\mathbf{b}^T\mathbf{AI} + \mathbf{b}^T\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{I}^T\left(2\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)\mathbf{I} - 2\left(\mathbf{A}^T\mathbf{b}\right)^T\mathbf{I} + \mathbf{b}^T\mathbf{b}$$

- Задача квадратичного программирования с ограничениями типа неравенства

$$\begin{cases} J_{opt} = \frac{1}{2}\mathbf{I}^T\left(\mathbf{A}_M^T\mathbf{A}_M + k_{Mf}\mathbf{a}_f\mathbf{a}_f^T\right)\mathbf{I} - \left(\mathbf{A}_M^T\mathbf{M}_{calc} + k_{Mf}\mathbf{a}_f f_{calc,x}\right)^T\mathbf{I} \to \min \\ \left|I_k\right| \le I_{\max},\ k = 1\ldots 6 \end{cases}$$

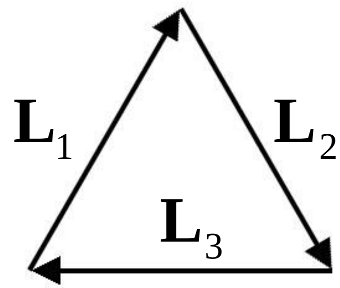
# Контуры с током

- Суммарная сила равна нулю

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L}_1 \times \mathbf{B} + I\mathbf{L}_2 \times \mathbf{B} I + \mathbf{L}_3 \times \mathbf{B} = I\left(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3\right) \times \mathbf{B} = I\,\mathbf{0} \times \mathbf{B}$$

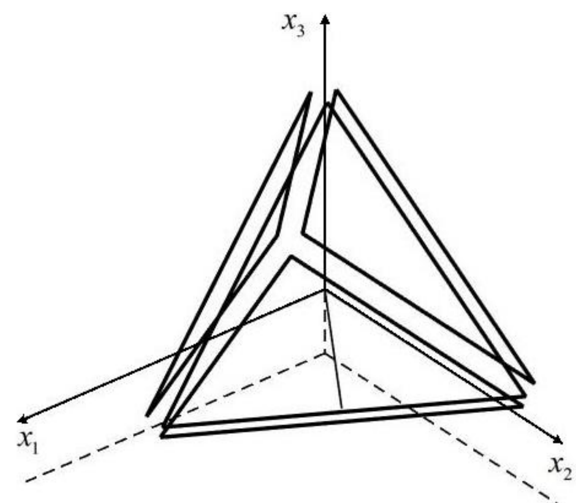
- Момент не равен нулю

$$\mathbf{M} = I\left(\mathbf{L}_1(\mathbf{N}_1^T\mathbf{B}) + \mathbf{L}_2(\mathbf{N}_2^T\mathbf{B}) + \mathbf{L}_3(\mathbf{N}_3^T\mathbf{B})\right)$$




- Момент, действующий на тетраэдр, линейно зависит от токов

$$\mathbf{M}_{appl} = \sum_{i=1}^{N_I}\left(\sum_{j=1}^{N_i}\mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{N}_{i,j}^T\mathbf{B})\right)I_i = \mathbf{A}_M\mathbf{I}$$

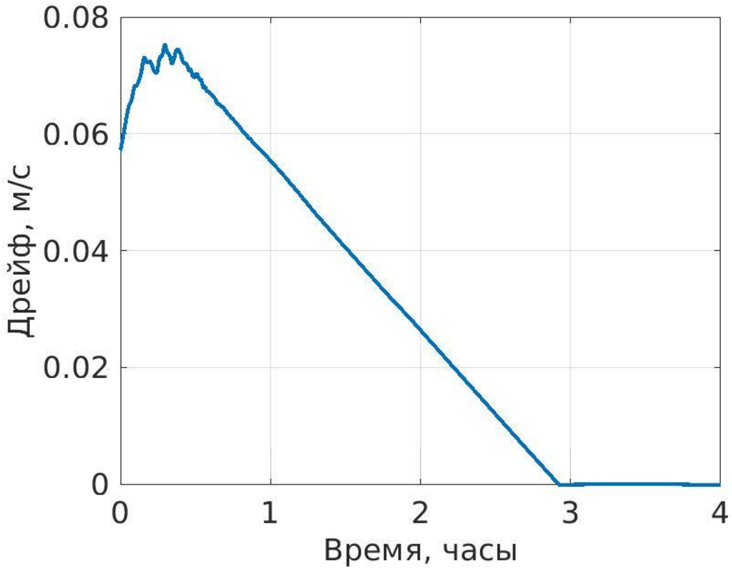


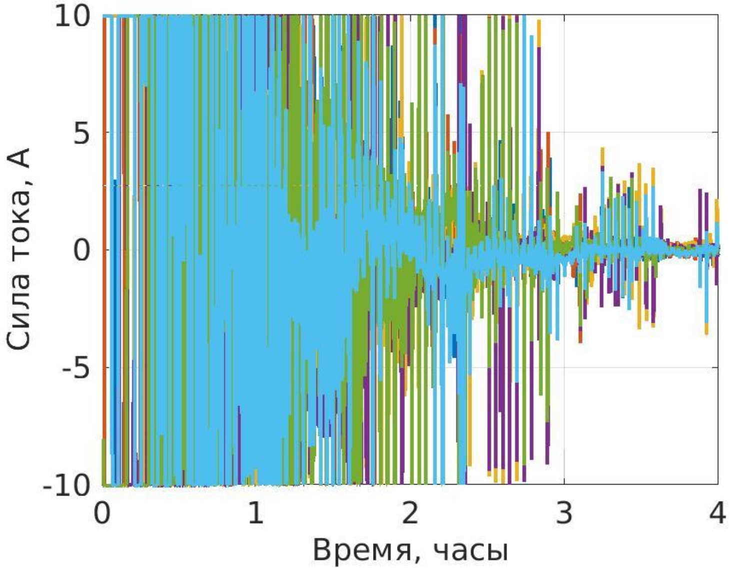
# Параметры моделирования

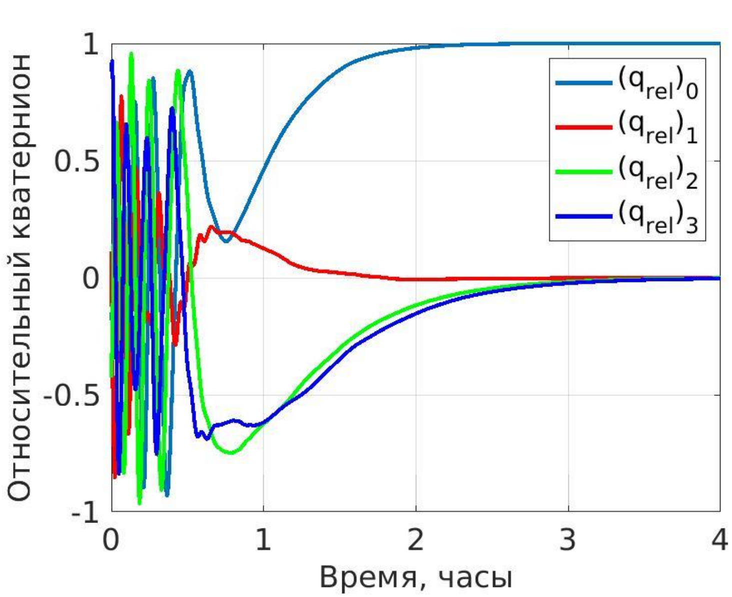
| | |
|---|---|
| Высота орбиты | 550 км |
| Масса спутников | 10 кг |
| Масса стержней | 100 г |
| Длина стержней | 10 м |
| Максимальный ток | 10 А |
| $k_{Mf}$ | 100 |
| Требуемая угловая скорость | $10^{-2}$ рад/с |

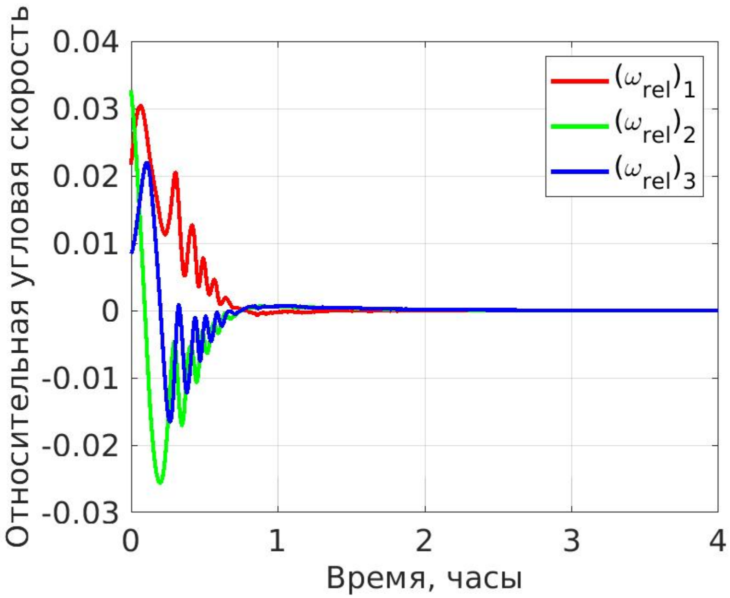
$$\mathbf{K}_w = diag\left(\left[8, 8, 8\right]\right)\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{с}}, \quad \mathbf{K}_a = diag\left(\left[\frac{K_{w,1}^2}{8J_{xx}}, \frac{K_{w,2}^2}{8J_{yy}}, \frac{K_{w,3}^2}{8J_{zz}}\right]\right)\text{Н}\cdot\text{м}$$

# Параметры движения



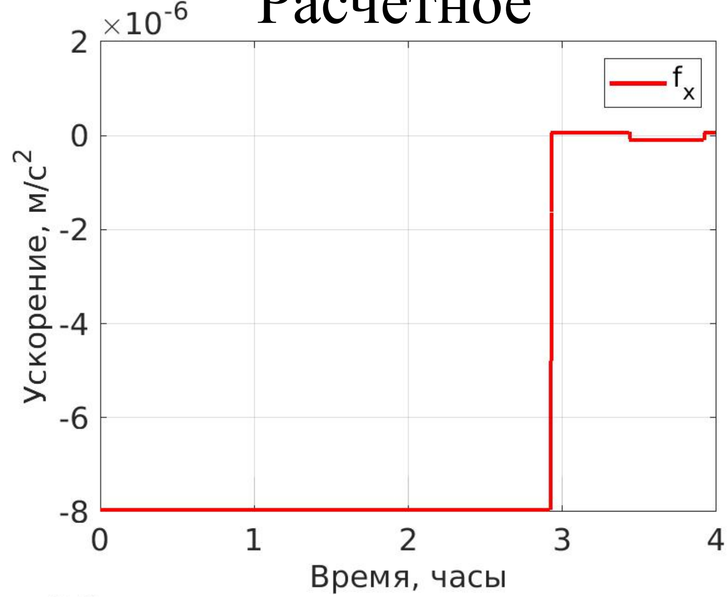



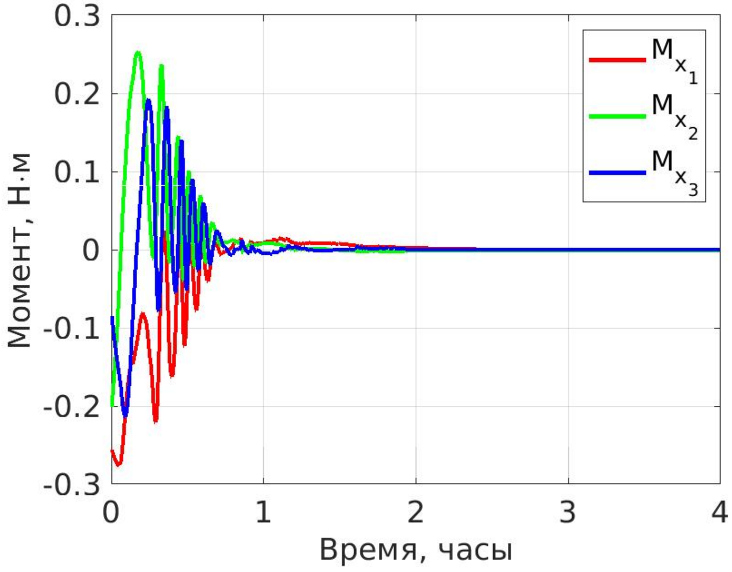



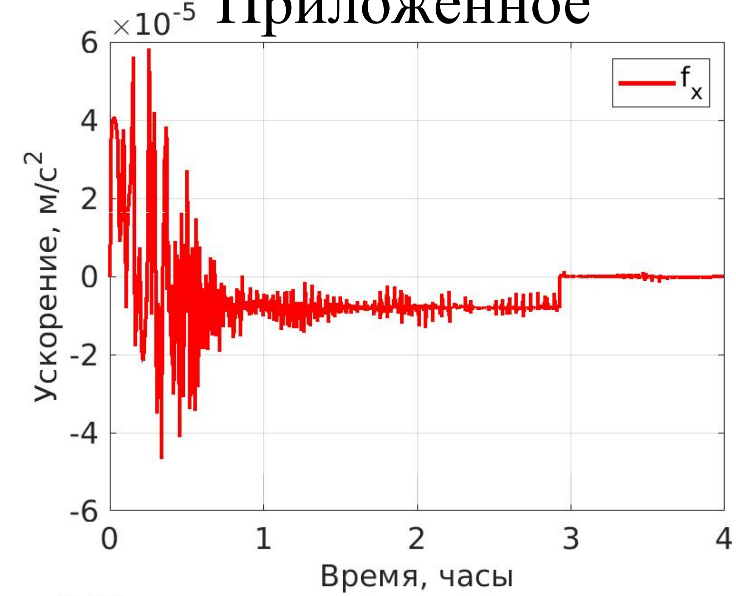
# Управление

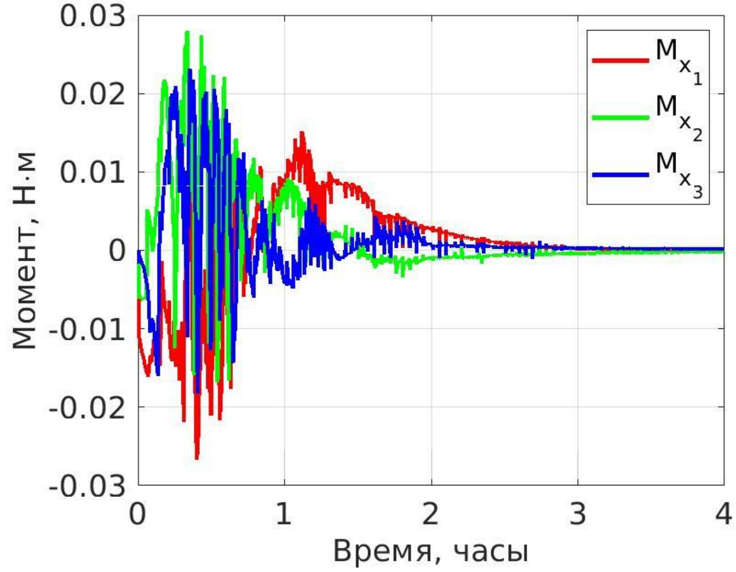
## Расчетное



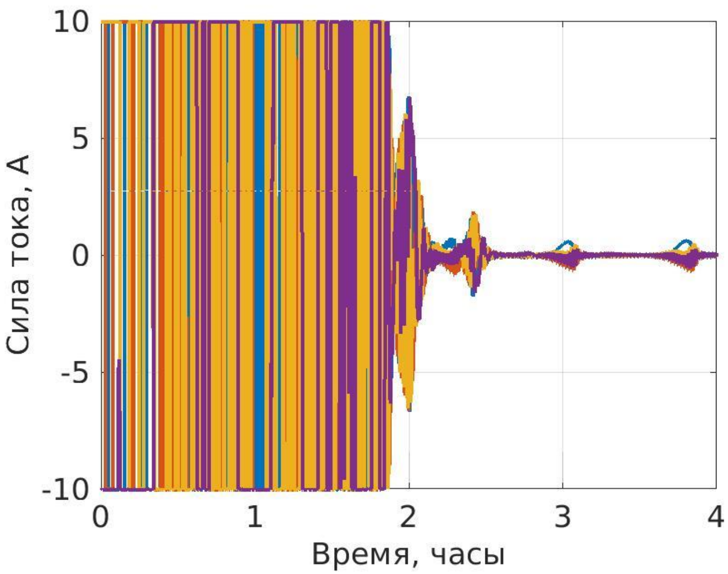



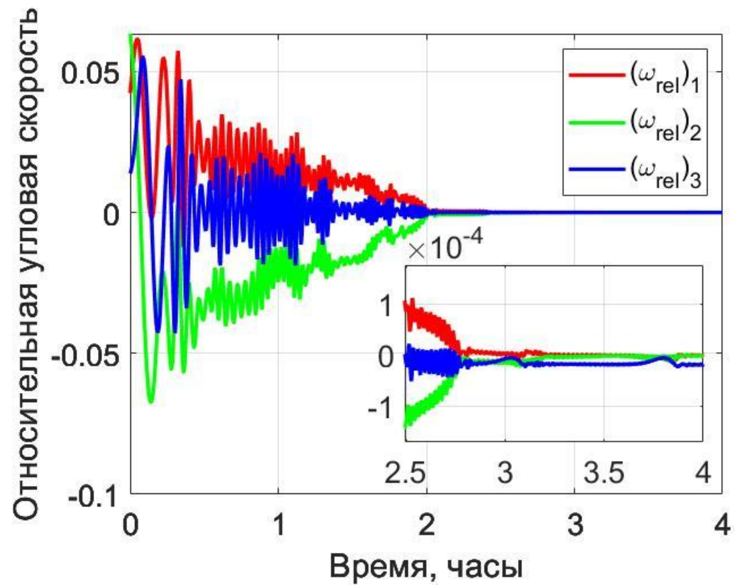

## Приложенное

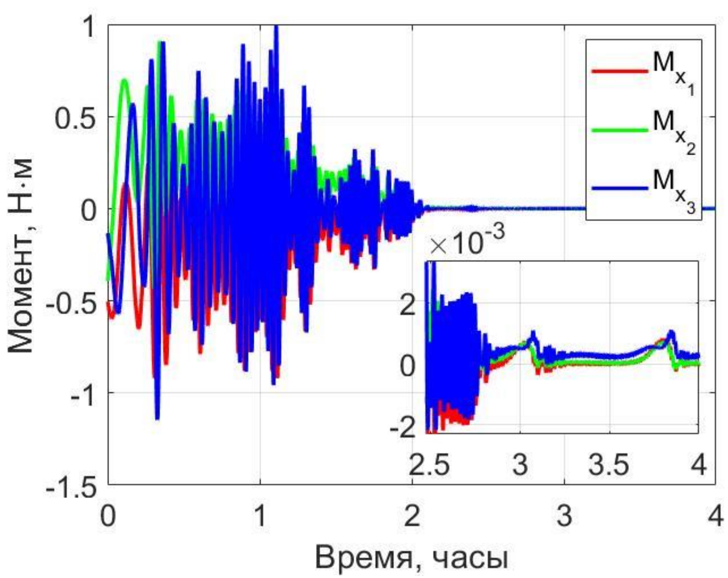


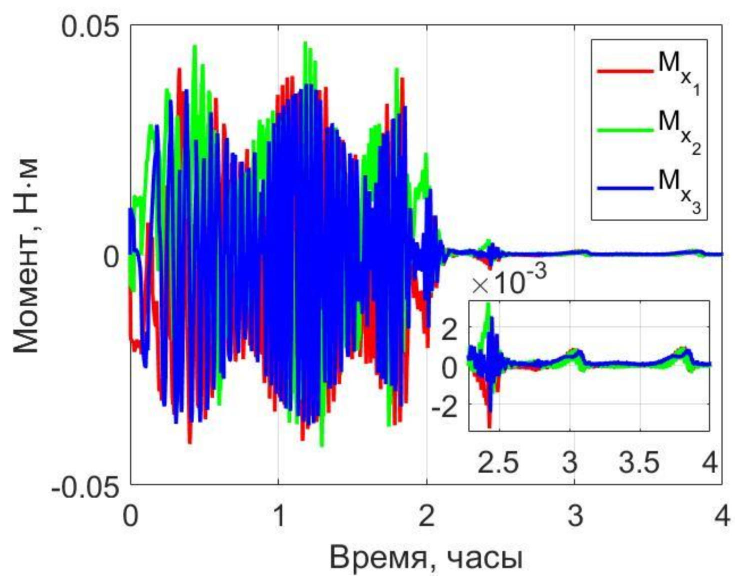



# 4 контура


Сила тока, А
Время, часы

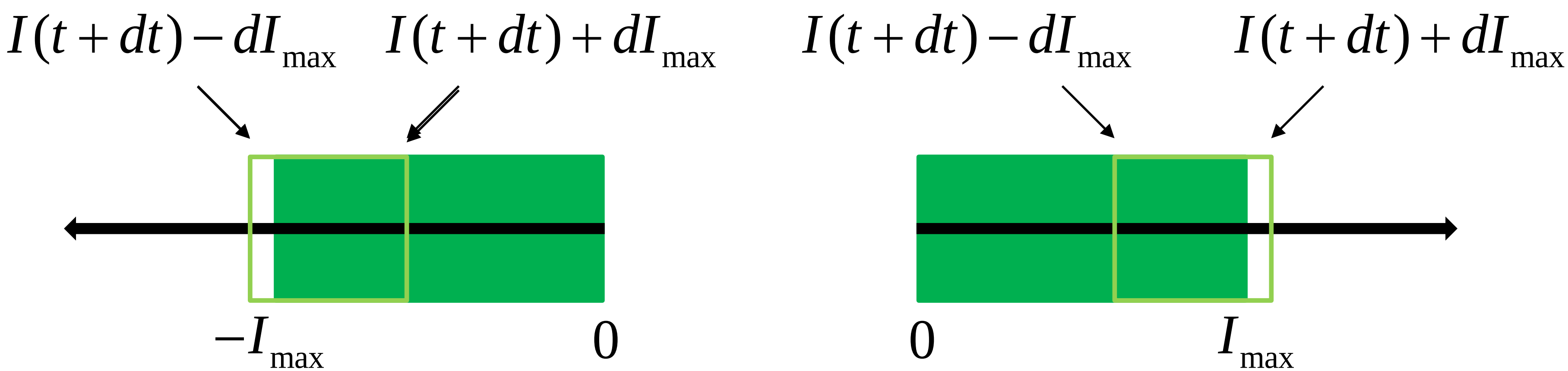

Относительная угловая скорость
Время, часы
$(\omega_{rel})_1$
$(\omega_{rel})_2$
$(\omega_{rel})_3$
$\times 10^{-4}$


Момент, Н·м
Время, часы
$M_{x_1}$
$M_{x_2}$
$M_{x_3}$
$\times 10^{-3}$


Момент, Н·м
Время, часы
$M_{x_1}$
$M_{x_2}$
$M_{x_3}$
$\times 10^{-3}$

# Ограничения скорости изменения силы тока

$$\left|I\right| \le I_{\max},\ I(t-dt) - dI_{\max} \le I(t) \le I(t-dt) + dI_{\max}$$

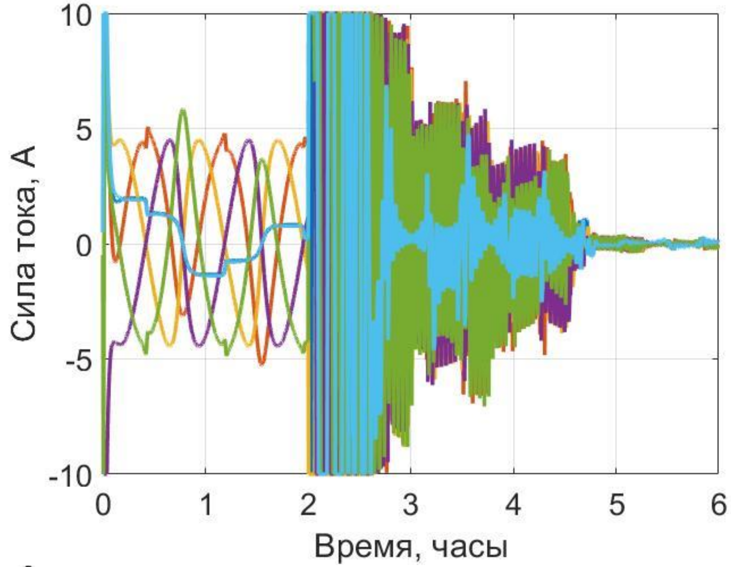


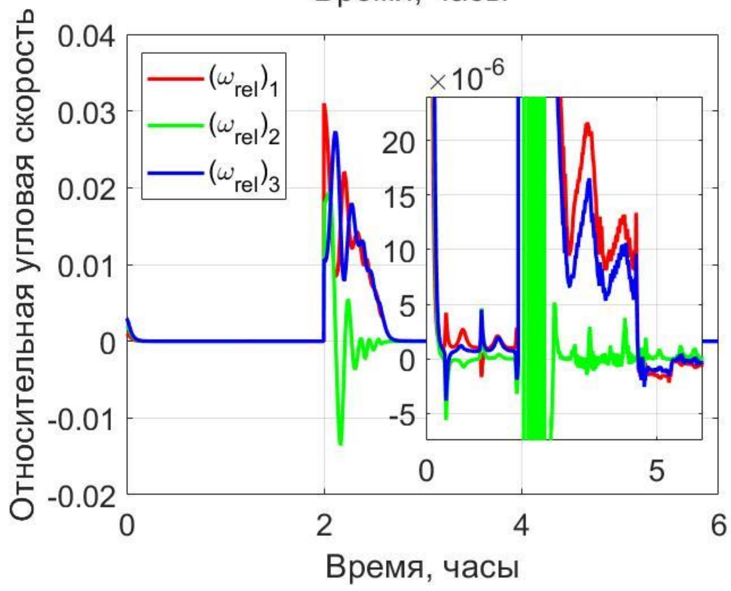

$$I(t) \ge \max\left\{-I_{\max},\ I(t-dt) - dI_{\max}\right\}$$

$$I(t) \le \min\left\{I_{\max},\ I(t-dt) + dI_{\max}\right\}$$

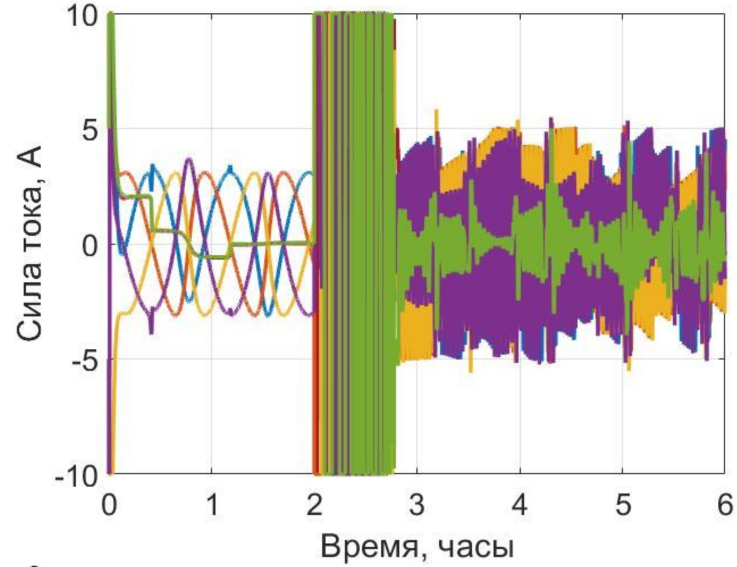
# Ограничения изменения силы тока

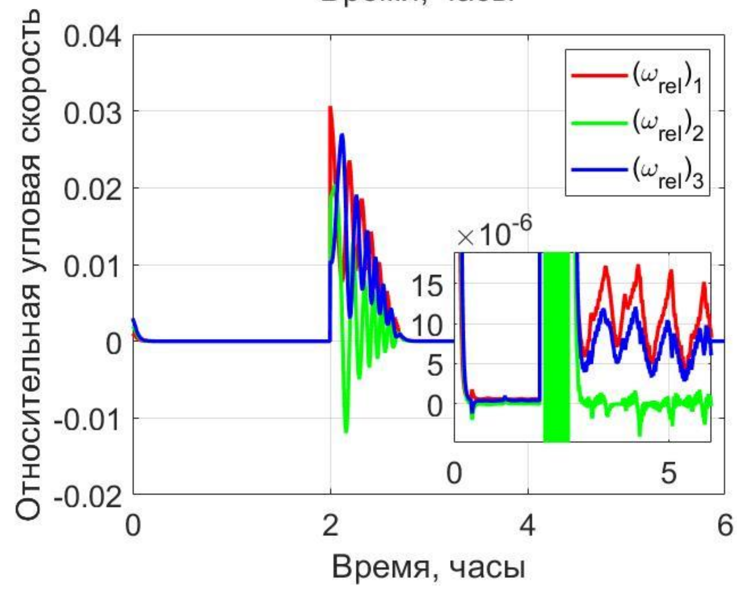
$dI_{\max} = 0.5A$



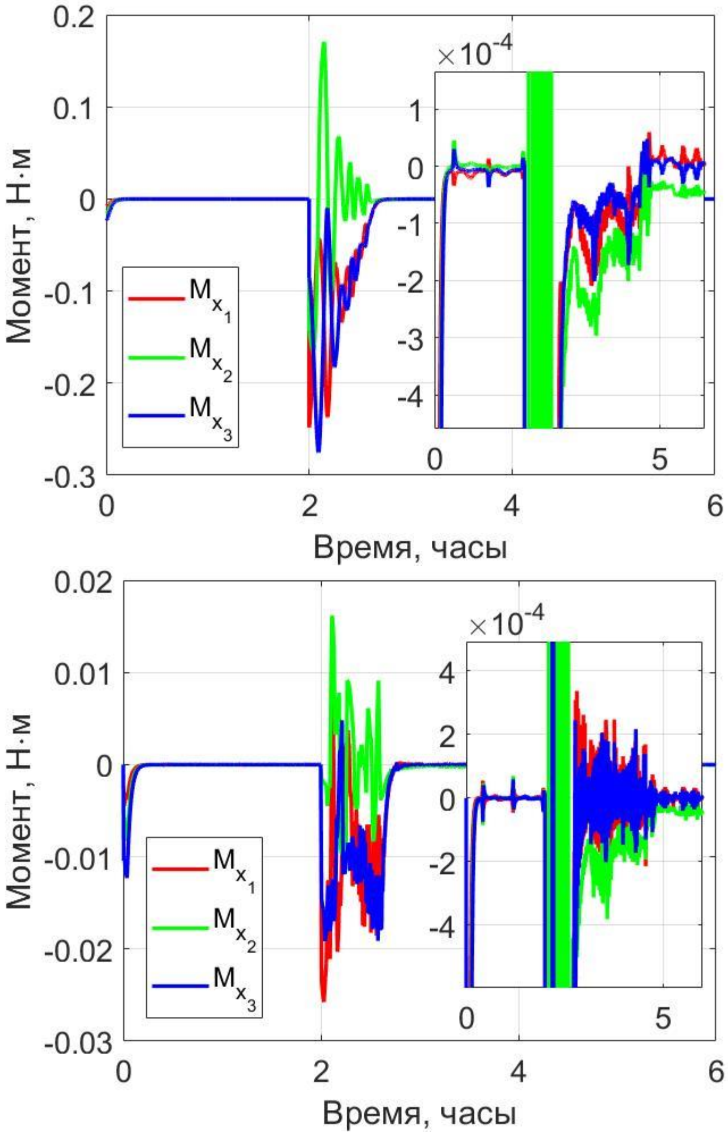

$dI_{\max} = 5A$



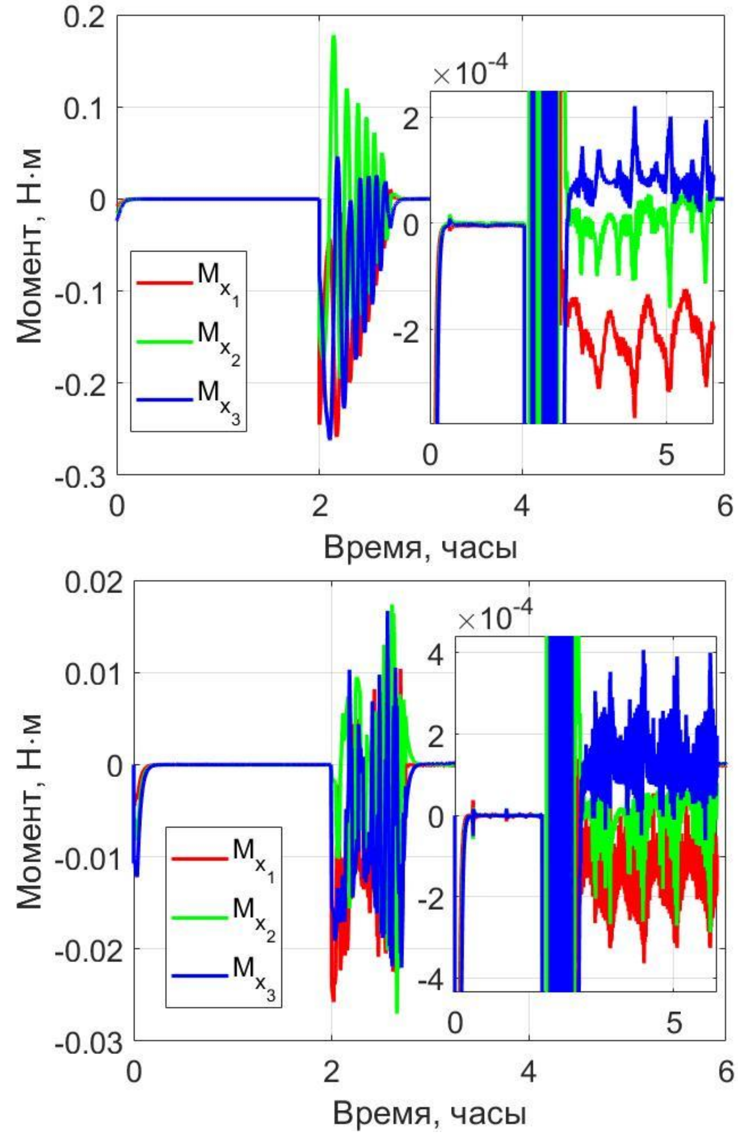



# Ограничения изменения силы тока

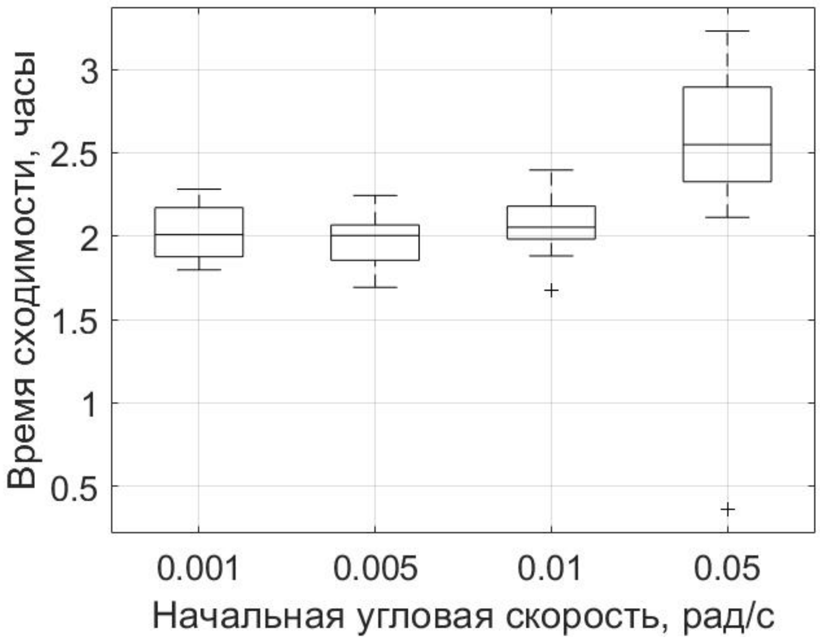
$dI_{\max} = 0.5A$

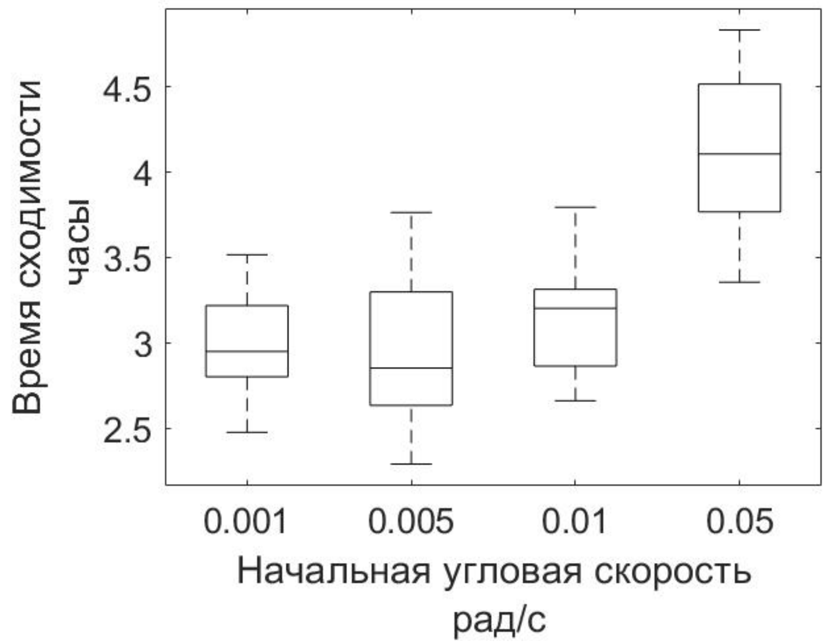



$dI_{\max} = 5A$



# Зависимость от начальных условий




- Проведено численное исследование с помощью метода Монте-Карло

# Заключение

- Показана принципиальная возможность управления тетраэдральным группой аппаратов с помощью электрического тока, текущего по проводникам, установленным на аппарате
- Для заданных в работе параметров системы требуемое угловое и поступательное движение достигается за 4 часа
- Проведено исследование движения системы при различных ее параметрах

# Публикации и доклады

- К.С. Чернов, Д.С. Иванов «Управление тросовой тетраэдральной формацией микроспутников с помощью силы Лоренца» // Труды 64-й конференции МФТИ, 25 ноября – 3 декабря 2021 г.
- К.С. Чернов, Д.С. Иванов. «Использование силы Лоренца для управления тросовой тетраэдральной формацией микроспутников на низкой околоземной орбите» // XLVI Академические чтения по космонавтике, 25-28 января 2022 г.

# Дальнейшие планы

- Изучение различных моделей для учета гибкости тросов
- Исследование движения системы при ее развертывании
- Выступления на конференциях
- Рассмотрение других аспектов реализации системы

Спасибо за внимание!