



65-я Всероссийская научная конференция МФТИ  
Москва, 6 апреля, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН



# Анализ структуры решений краевых задач принципа максимума при оптимизации перелёта Земля-Марс

Корнеев Кирилл Романович, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Трофимов Сергей Павлович, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН



## Мотивация



При оптимизации траекторий с малой тягой часто применяется принцип максимума Понтрягина (ПМП).

Краевые задачи принципа максимума обладают высокой чувствительностью и многоэкстремальны.

Понимание структуры решений позволит выбирать хорошие начальные приближения.



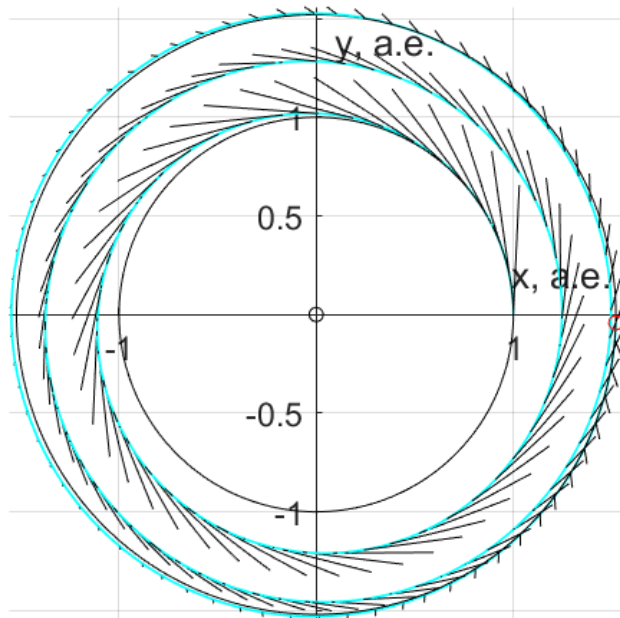
Ионный двигатель NASA  
Evolutionary Xenon Thruster (NEXT)  
Источник: NASA



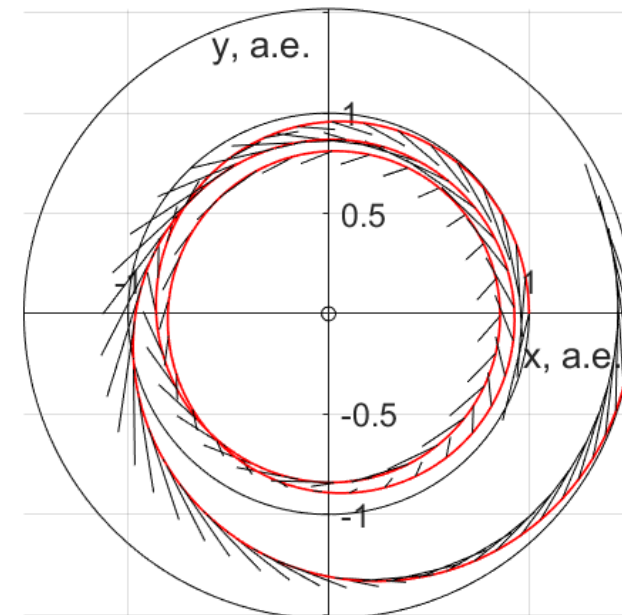
# Экстремали принципа максимума



Для одной угловой дальности может существовать несколько экстремалей ПМП:



Локальный оптимум,  
являющийся глобальным



Локальный оптимум, не  
являющийся глобальным

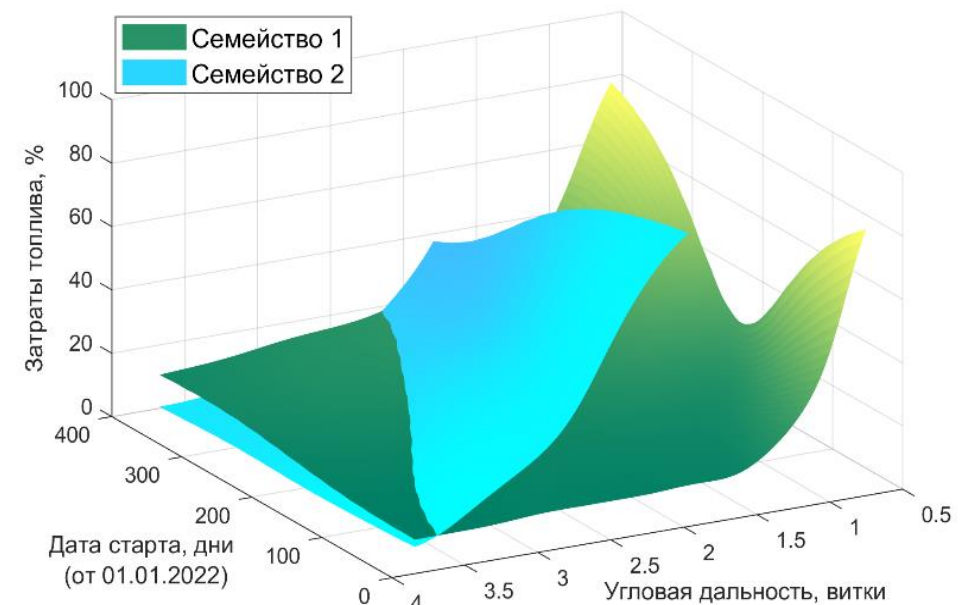


# Упрощение задачи



При решении задачи перелёта Земля-Марс в эфемеридах сложно проанализировать структуру решений:

1. Пространство решений 6-мерное
2. Решения привязаны ко времени, а не к геометрии задачи
3. Неизвестна причина возникновения нескольких семейств решений:
  - a. Геометрические особенности задачи?
  - b. Некомпланарность орбит?
  - c. Эллиптичность орбит?



**Нужна декомпозиция**

Два семейства решений краевой задачи ПМП в эфемеридах



Этапы исследования:

## 1. Перелёты между плоскими круговыми орбитами

Параметры задачи:

- a) Отношение радиусов орбит
- b) Начальная разность фаз
- c) Угловая дальность перелёта

## 2. Перелёты между плоскими эллиптическими орбитами

Дополнительные параметры задачи:

- a) Эксцентриситеты орбит
- b) Угол между линиями аписид

## 3. Перелёты между пространственными эллиптическими орбитами



## Цели работы



- Получить семейства экстремалей ПМП для перелёта между круговыми компланарными орбитами с двигателем малой тяги
- Изучить структуру решений краевой задачи ПМП и выявить закономерности



# Уравнения движения и функционал



Уравнения движения задачи двух тел:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v},$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{u}$$

где  $\mathbf{x}=(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  - фазовый вектор. Управление  $\mathbf{u}$  – это реактивное ускорение. Используется модель идеально регулируемого двигателя.

Минимизируемый функционал соответствует задаче с ограниченной мощностью, доступной двигателю

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^2 dt \rightarrow \min.$$

Здесь  $t_0$  и  $t_f$  - начальное и конечное время.



# Принцип максимума Понтрягина



Необходимым условием ПМП является максимизация функции Гамильтона-Понтрягина по управлению  $\mathbf{u}$ :

$$H = -\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \mathbf{p}_v \cdot \left( -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{u} \right) + \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{p} = (\mathbf{p}_r, \mathbf{p}_v)^T \in \mathbb{R}^4, \quad H \rightarrow \max_{\mathbf{u}}.$$

После применения ПМП записываются сопряжённые уравнения:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$$

Граничные условия:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad \mathbf{p}(t_0) = ?, \quad \mathbf{p}(t_f) = ?$$





# Поиск решения краевой задачи ПМП



Решение краевой задачи ПМП определяется вектором значений сопряжённых переменных в момент  $t_0$  :

$$\mathbf{p}(t_0) = ?$$

Для упрощения поиска решений применены методы:

1. Переход к переменным Кустаанхеймо-Штифеля
2. Преобразование времени Сундмана
3. Поворот плоских орбит в трёхмерном пространстве, чтобы избежать нулевых начальных значений
4. Сведение краевой задачи к оптимизационной



# Постановка эксперимента



Предположения:

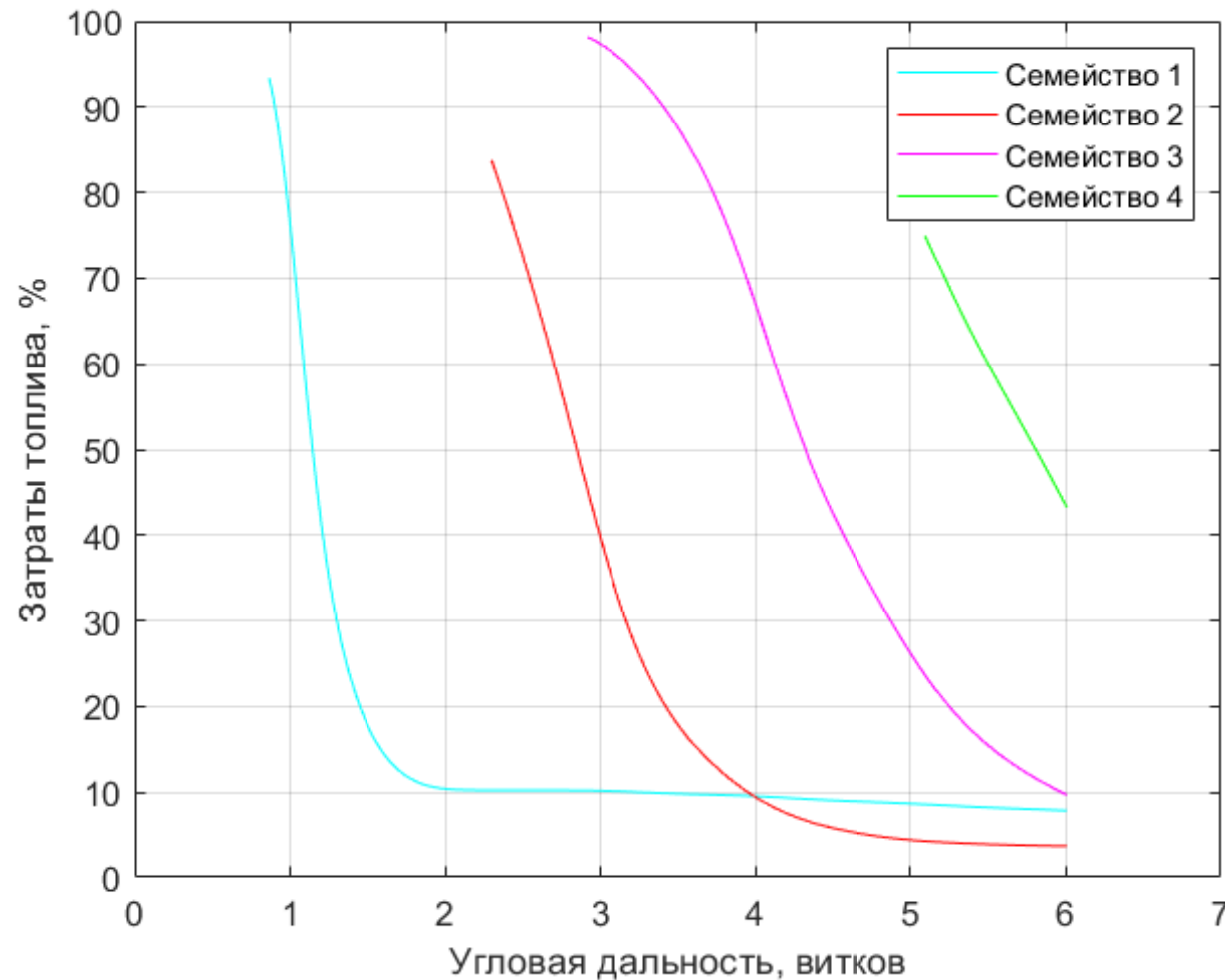
- Перелёт компланарный
- Начальная и конечная орбиты плоские круговые (1 DU и 1.52 DU)
- Задача сопровождения

Переменные:

- Угловая дальность (изменение истинной аномалии в витках)  $\Delta\theta$
- Разница фаз планет в начальный момент времени (разница эклиптической долготы в градусах)  $\Delta\lambda$



# Семейства решений при $\Delta\lambda = \pi$



Затраты топлива в зависимости от угловой дальности, несколько семейств решений



# Сравнение решений 1-2, $\Delta\lambda = \pi$



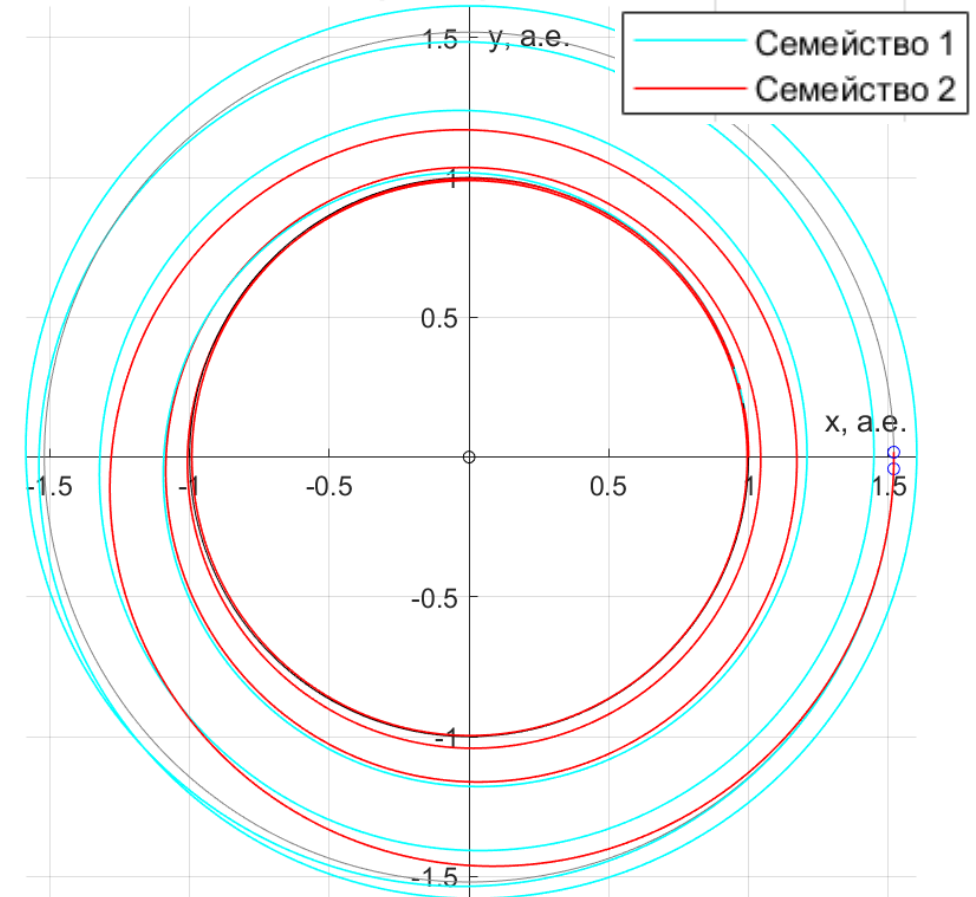
Угловая дальность перелёта - 4 витка:

Время перелёта:

1. 6.6 лет
2. 4.7 лет

Затраты топлива:

1. 9.5%
2. 9.3%



Два решения с одинаковой угловой дальностью



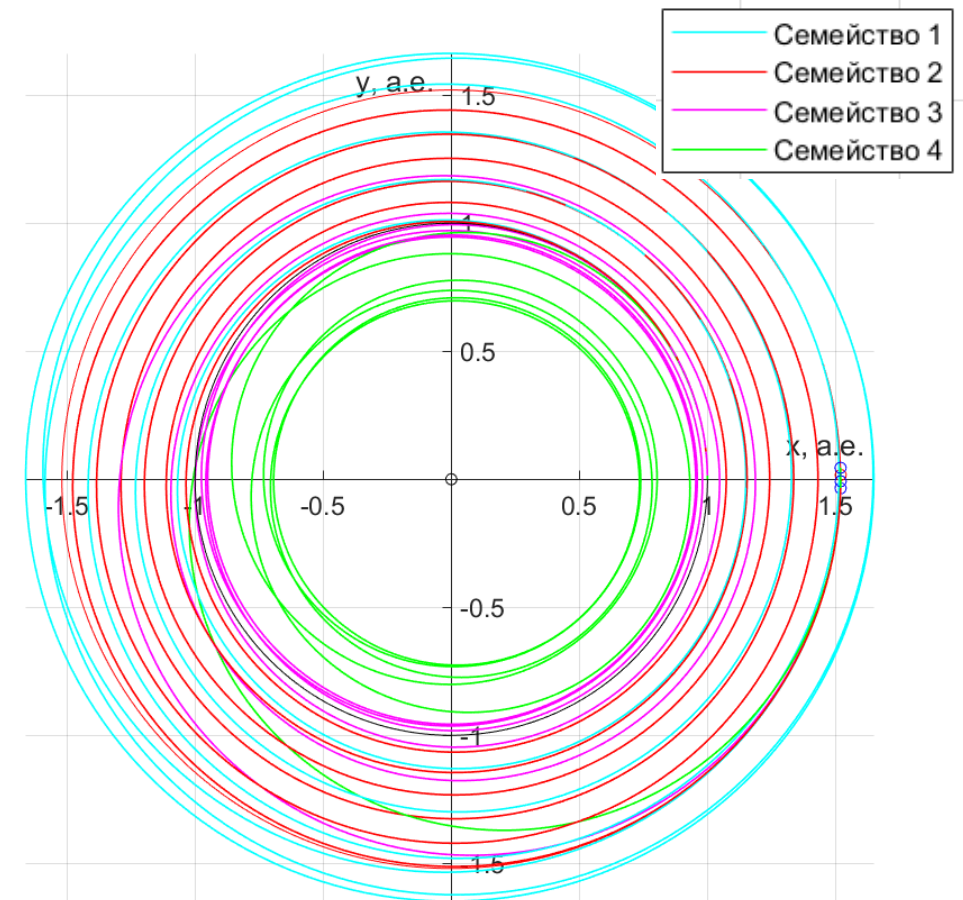
# Сравнение решений 1-4, $\Delta\lambda = \pi$



Угловая дальность перелёта -  
**6 витков:**

Время перелёта: Затраты топлива:

1. 10.3 лет	1. 7.9%
2. 8.4 лет	2. 3.8%
3. 6.6 лет	3. 9.7%
4. 4.7 лет	4. 43.3%



Четыре разных локально-оптимальных перелёта



# Продолжение по разности фаз

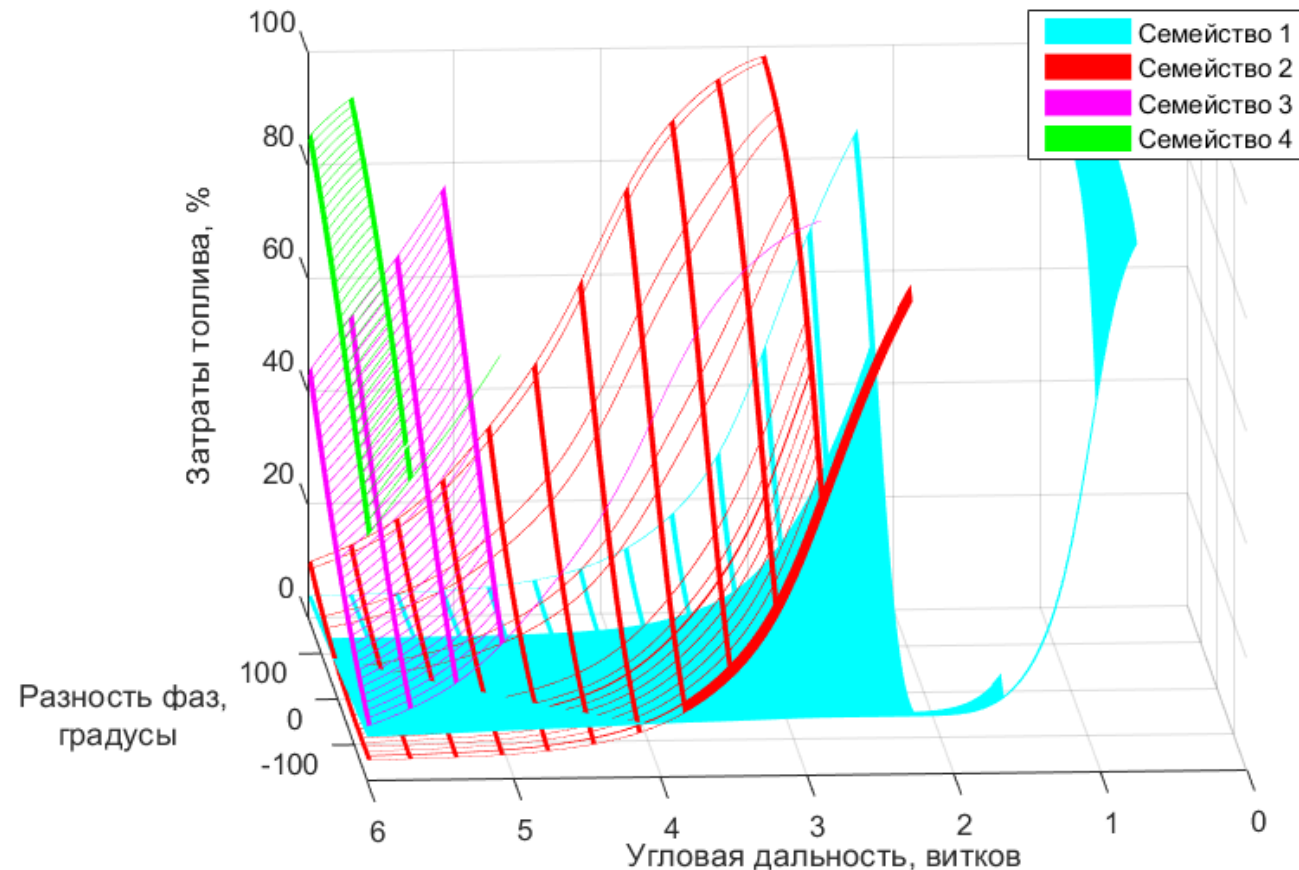


Оптимальные затраты топлива зависят от угловой дальности перелёта, разности фаз и семейства решений:

$$x = \Delta\theta,$$

$$y = \Delta\lambda,$$

$$z = \frac{\Delta m}{m_0}.$$





# Продолжение по разности фаз

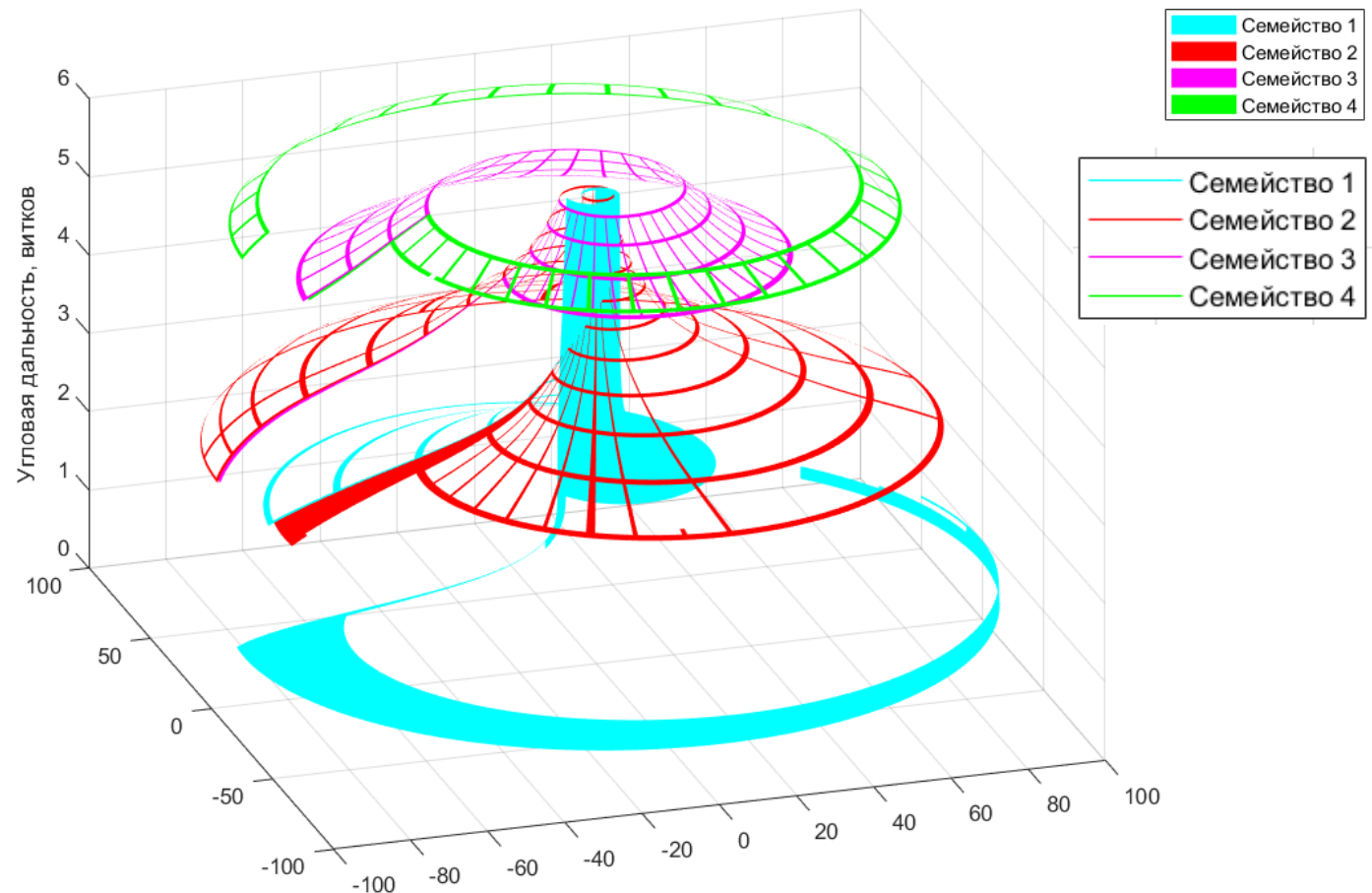


Цилиндрическое представление:

$$x = \frac{\Delta m}{m_0} \cos \Delta \lambda,$$

$$y = \frac{\Delta m}{m_0} \sin \Delta \lambda,$$

$$z = \Delta \theta.$$



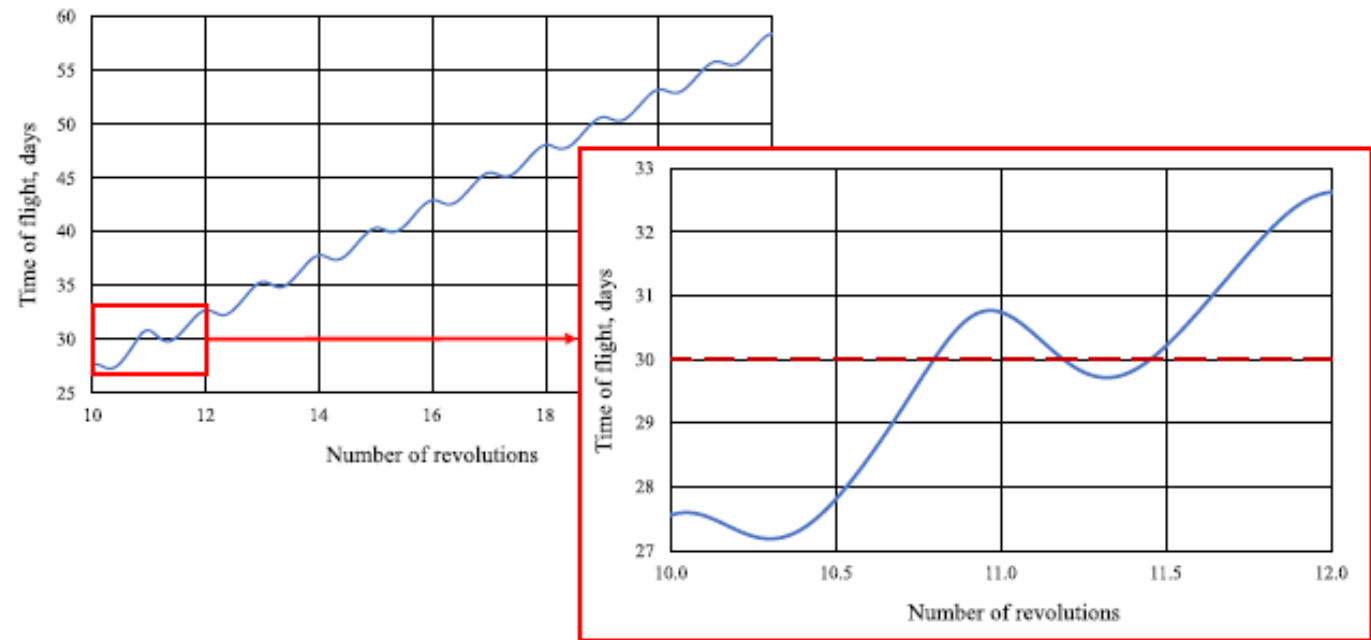


# Сравнение с другими работами



[1] Ivanyukhin A., Petukhov V. Optimization of Multi-revolution Limited Power Trajectories Using Angular Independent Variable // J Optim Theory Appl. 2021. Vol. 191, № 2-3. P. 575-599.

В упоминаемой работе показывается существование нескольких решений, отличающихся угловой дальностью при одинаковом времени перелёта. Также показаны причины существования таких решений



Зависимость времени перелёта от угловой дальности





## Выводы



- Оптимальный расход массы достигается при выборе нужного семейства решений для определённых угловой дальности и разности фаз
- Разные семейства решений имеют разную длительность перелёта при одинаковой угловой дальности
- Другие семейства решений можно получить непрерывно увеличивая разность фаз планет
- Планируется провести исследование разных семейств решений в пространстве сопряжённых переменных



# Бэкап



# Преобразование Кустаанхеймо-Штифеля (КС) и преобразование Сундмана



КС-преобразование:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u})\mathbf{u}$$

Преобразование Сундмана:

$$dt = \frac{r}{\sqrt{-2h}} ds$$

Временная компонента:

$$\tau = t_0 + \sqrt{\frac{\mu^2}{8h^3}} E$$



# Уравнения движения в переменных Кустаанхеймо-Штифеля



Уравнения движения:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{w}' = -\frac{\mathbf{u}}{4} - \frac{\mathbf{u}^2}{4h} L^T \mathbf{a} - \frac{2\mathbf{w} \cdot L^T \mathbf{a}}{2h} \mathbf{w}$$

$$\tau' = \frac{(\mu + (8(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}) \cdot L^T \mathbf{a})}{(-2h)^{3/2}}$$

Функционал:

$$J = \frac{1}{2\eta N_{max}} \int_{s_0}^{s_f} \mathbf{a}^2(t) \frac{\mathbf{u}^2(s)}{\sqrt{-2h(s)}} ds$$

Оптимальное управление:

$$\Lambda = L \left( -\frac{\mathbf{u}^2}{4h} \mathbf{p}_w - \frac{\mathbf{w}}{h} \mathbf{p}_w \cdot \mathbf{w} \right)$$

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda - \frac{\Lambda_4}{\mathbf{u}^2} L \mathbf{u}_b$$

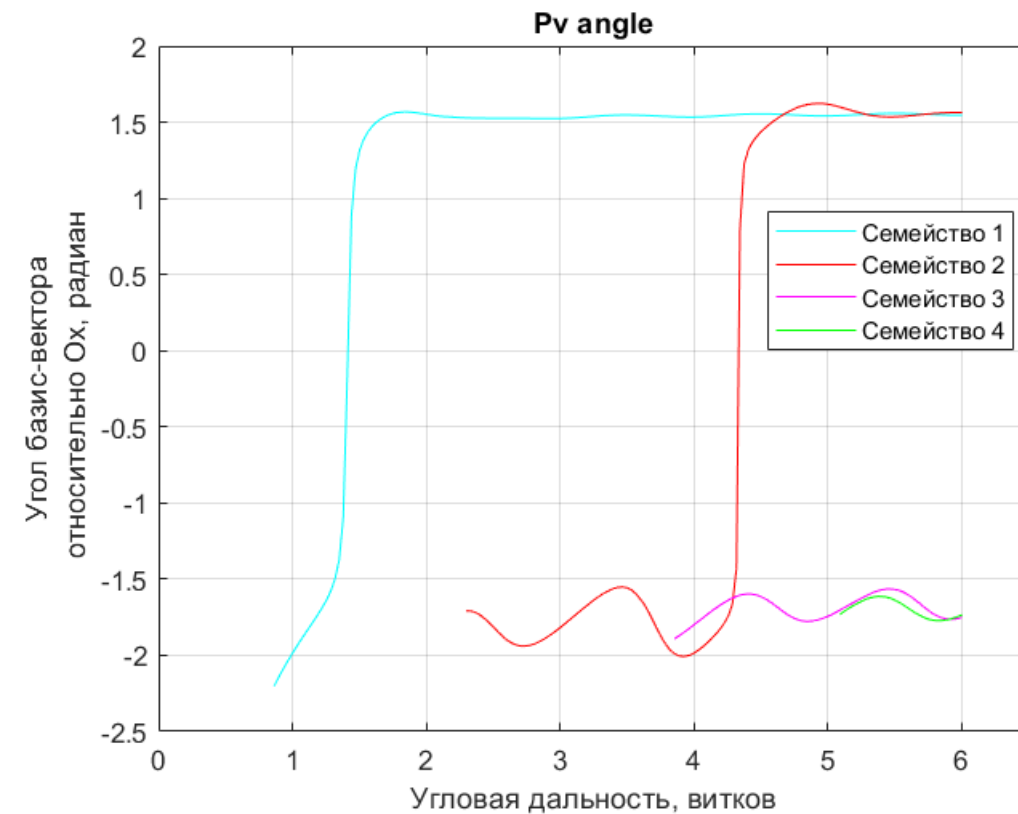
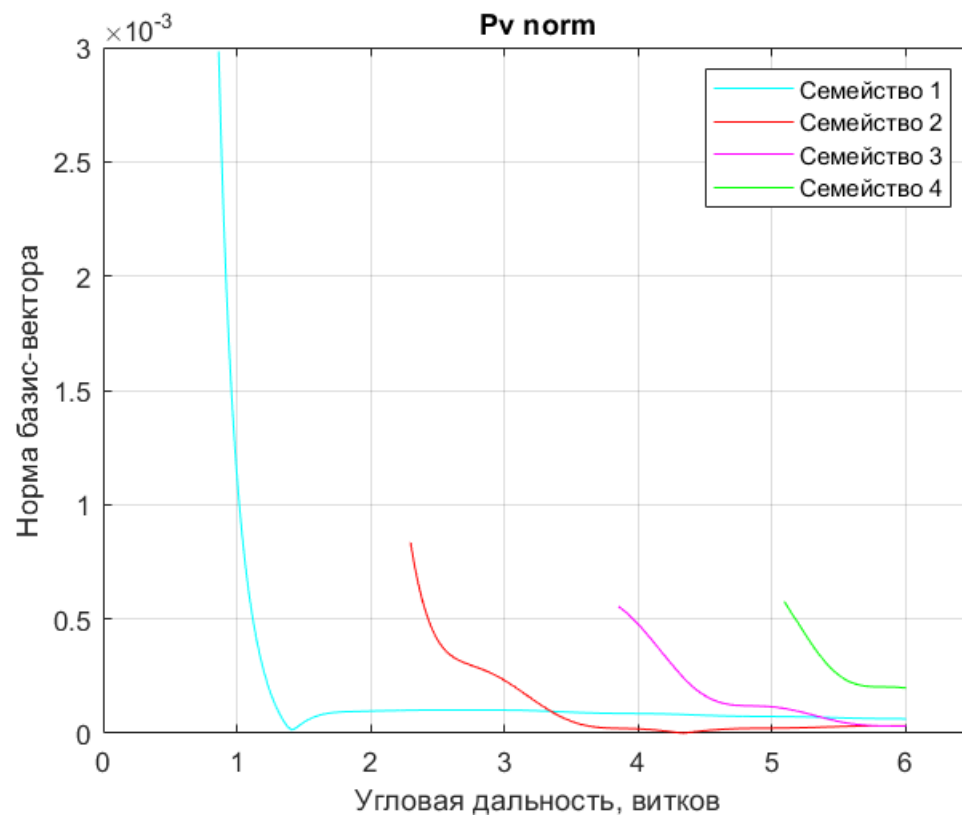
$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{-2h}}{\mathbf{u}^2} \tilde{\Lambda}$$



# Решения для противофазы



Базис вектор этих решений в  $t_0$  :

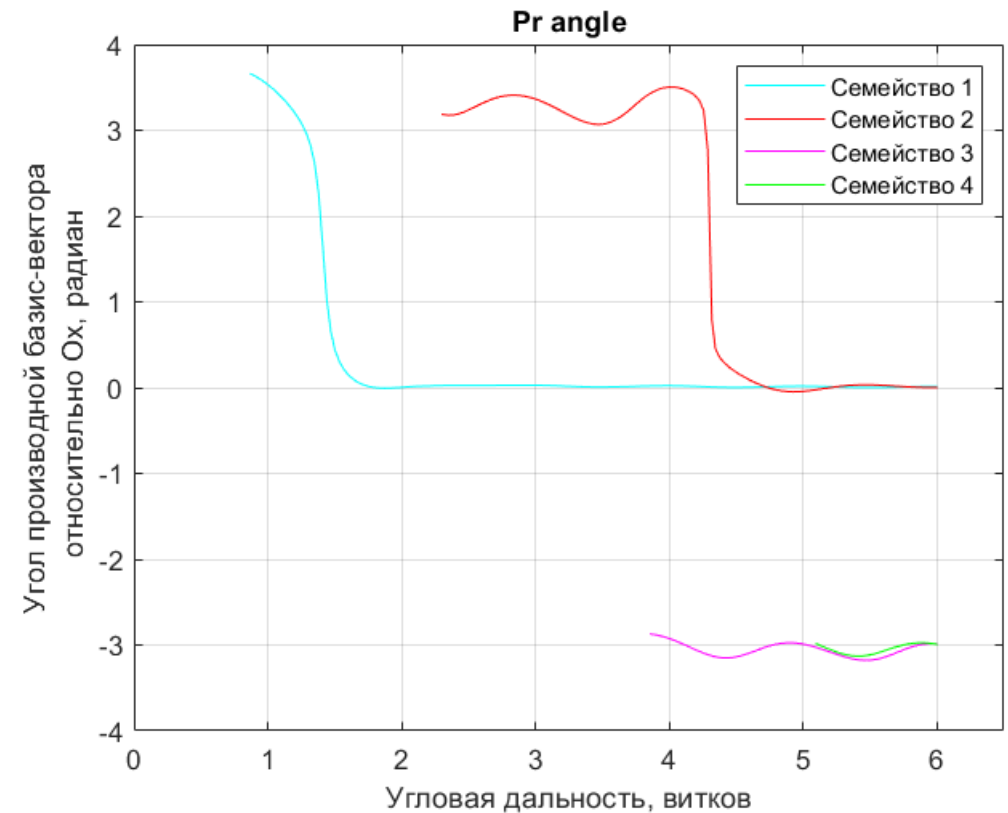
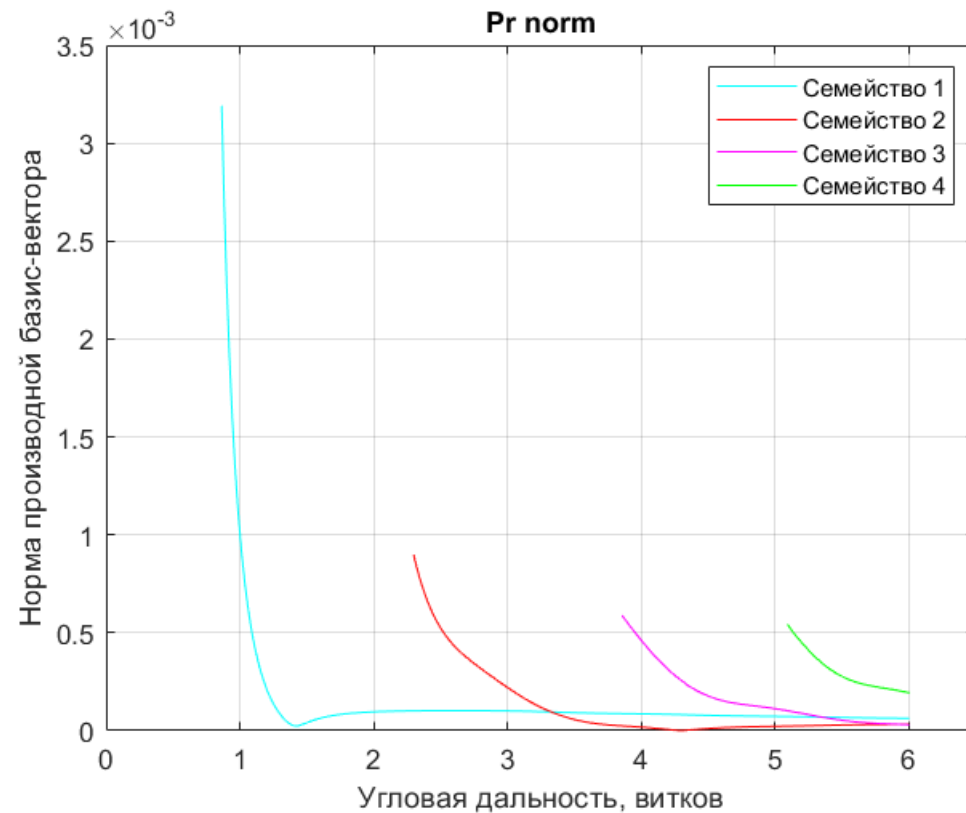




# Решения для противофазы



## Производная базис-вектора в $t_0$ :





# Численная проверка



Делаем численную проверку,  
находя оптимальные траектории при  
помощи принципа максимума  
Понтрягина

Максимальная разница в координатах

Расход массы в KS-координатах

Расход массы в прямоугольных координатах

4.6 м.

296.1 кг

296.1 кг

