65-я научная конференция МФТИ

Секция динамики и управления движением космических аппаратов

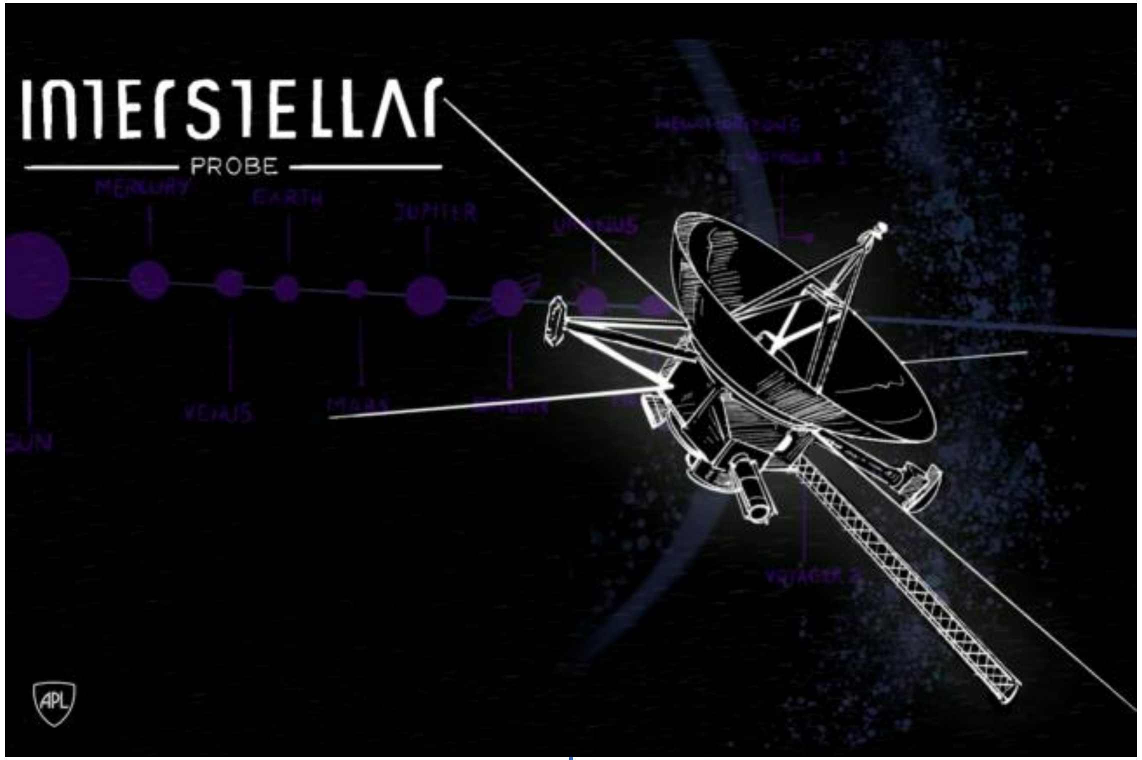
Относительное движение космических аппаратов на гиперболических траекториях

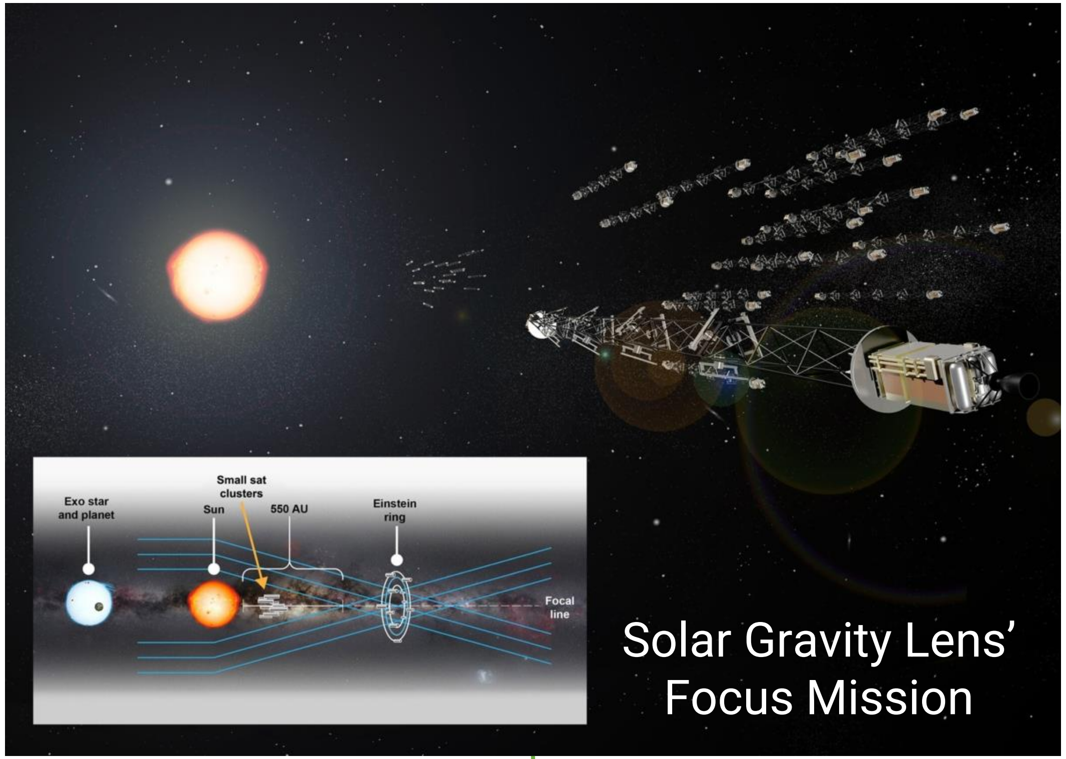
Перепухов Д.Г.[1,2]
Трофимов С.П.[2]

[1]Московский физико-технический институт (МФТИ)
[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Москва, 2023

Проекты перспективных миссий в дальний космос





Цель – исследование гелиосферы

Запуск - 2036

V_∞ 7 а.е./год

Длительность – 50 лет

Цель – наблюдения в фокусе солнечной гравитационной линзы

V_∞ 25 а.е./год

Групповой полёт

Длительность ~ 40 лет

Схемы разгона перспективных миссий в дальний космос

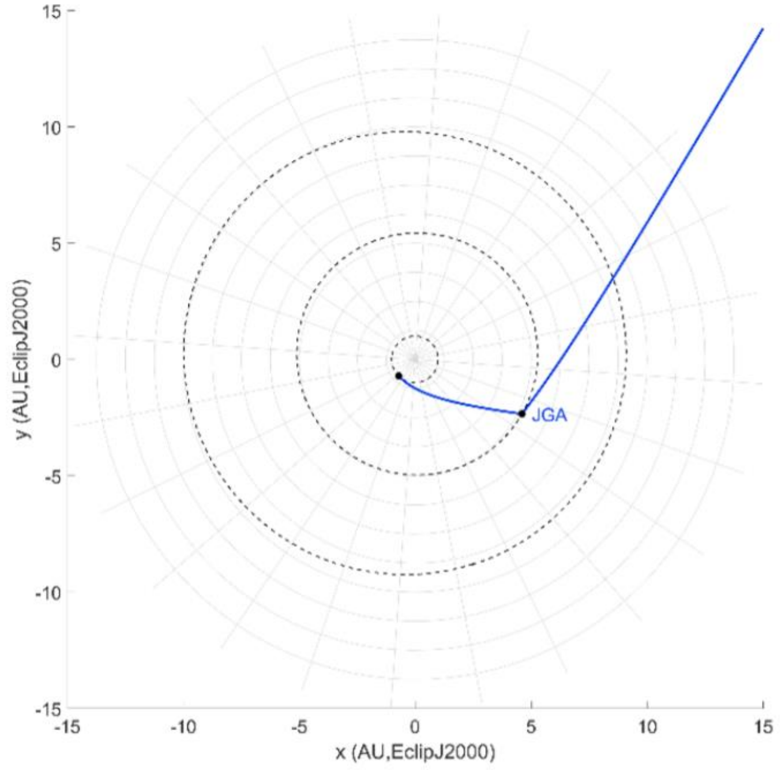


Схема полёта Interstellar Probe с пассивным грав. манёвром у Юпитера

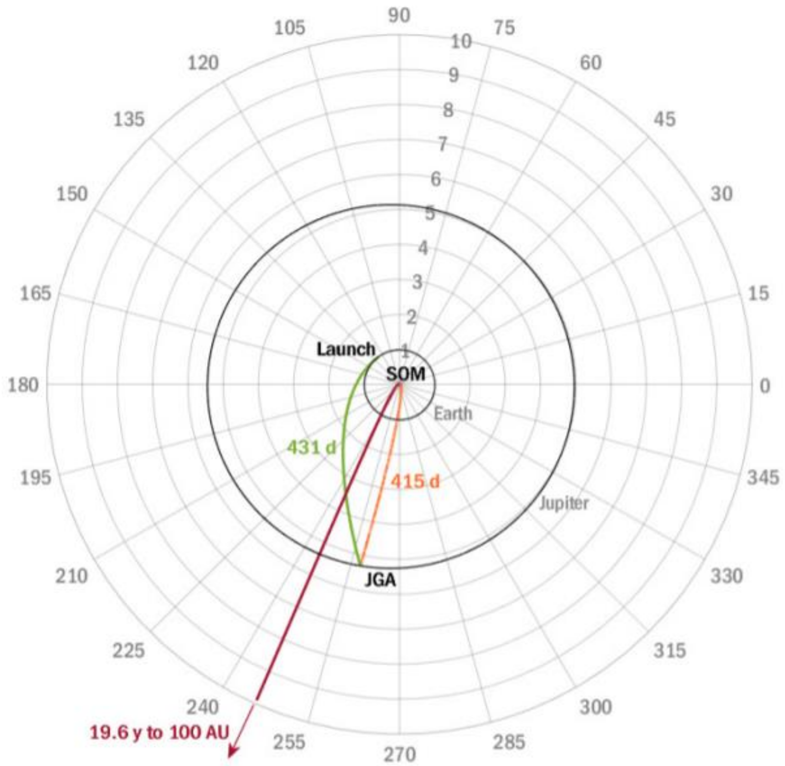


Схема полёта Interstellar Probe с пассивным грав. манёвром у Юпитера и импульсом в перигелии

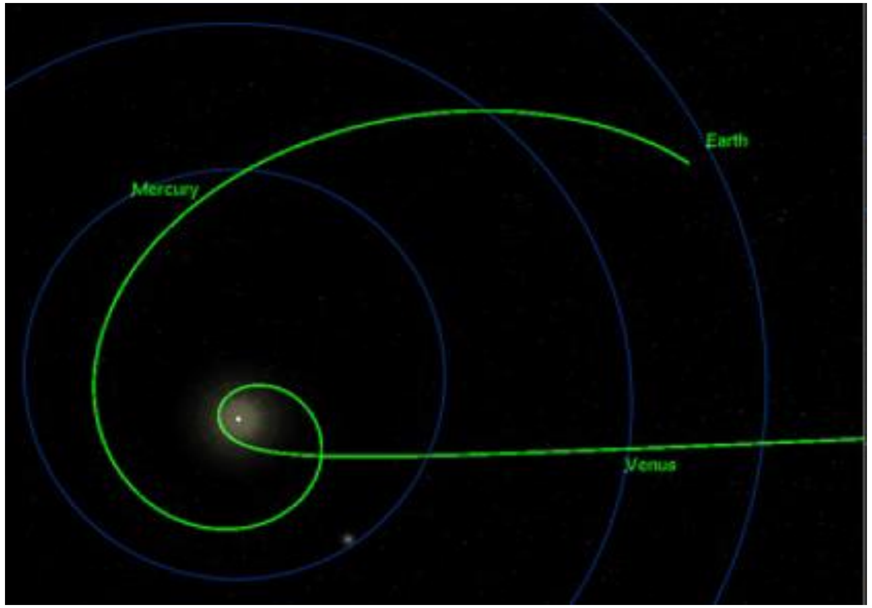


Схема полёта миссии к фокусу Солнца с разгоном в перигелии с помощью солнечного паруса

Картинки:
https://en.wikipedia.org/wiki/Interstellar_Probe_(spacecraft)
Turyshev S.G. [et al.] Direct Multipixel Imaging and Spectroscopy of an Exoplanet with a Solar Gravity Lens Mission // The Final Report for the NASA's Innovative Advanced Concepts Phase II proposal. arXiv:2002.11871v2. 2020.

Существующие проблемы

- Является открытым вопрос выбора способа разгона КА для достижения высоких гиперболических скоростей
  - Химические двигатели – дорого и неоптимально
  - Солнечные паруса – сложно управлять
- Является открытым вопрос выбора оптимального набора навигационных измерений на гиперболических траекториях
- Отсутствуют наглядные модели относительного движения на гиперболических траекториях
  - Нужно проектировать конфигурацию группы
  - Нужно планировать коррекционные манёвры
- Есть также и технические проблемы: коммуникация, энергетика, теплозащита, охлаждение, радиационная стойкость и т.д.

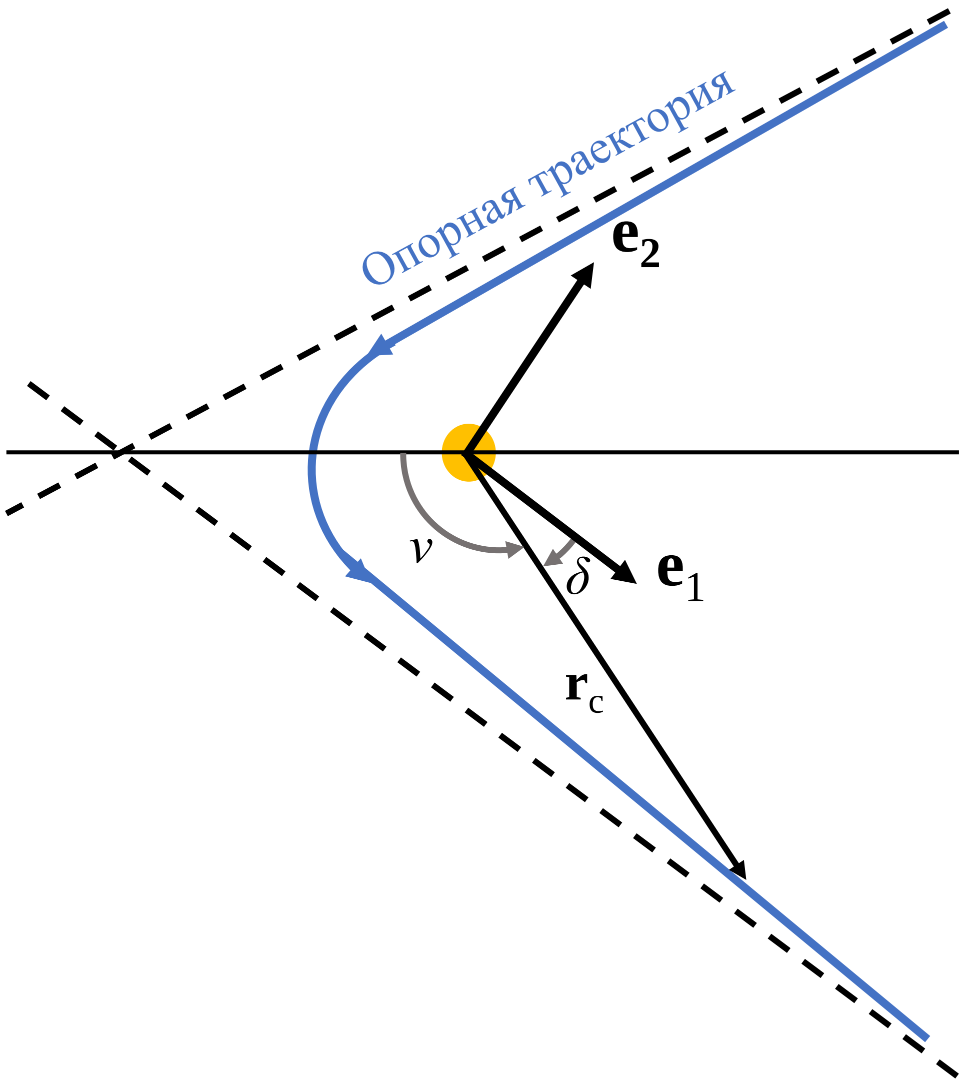
Цель работы

- Найти удобный *способ описания и проектирования* относительного движения на гиперболических траекториях

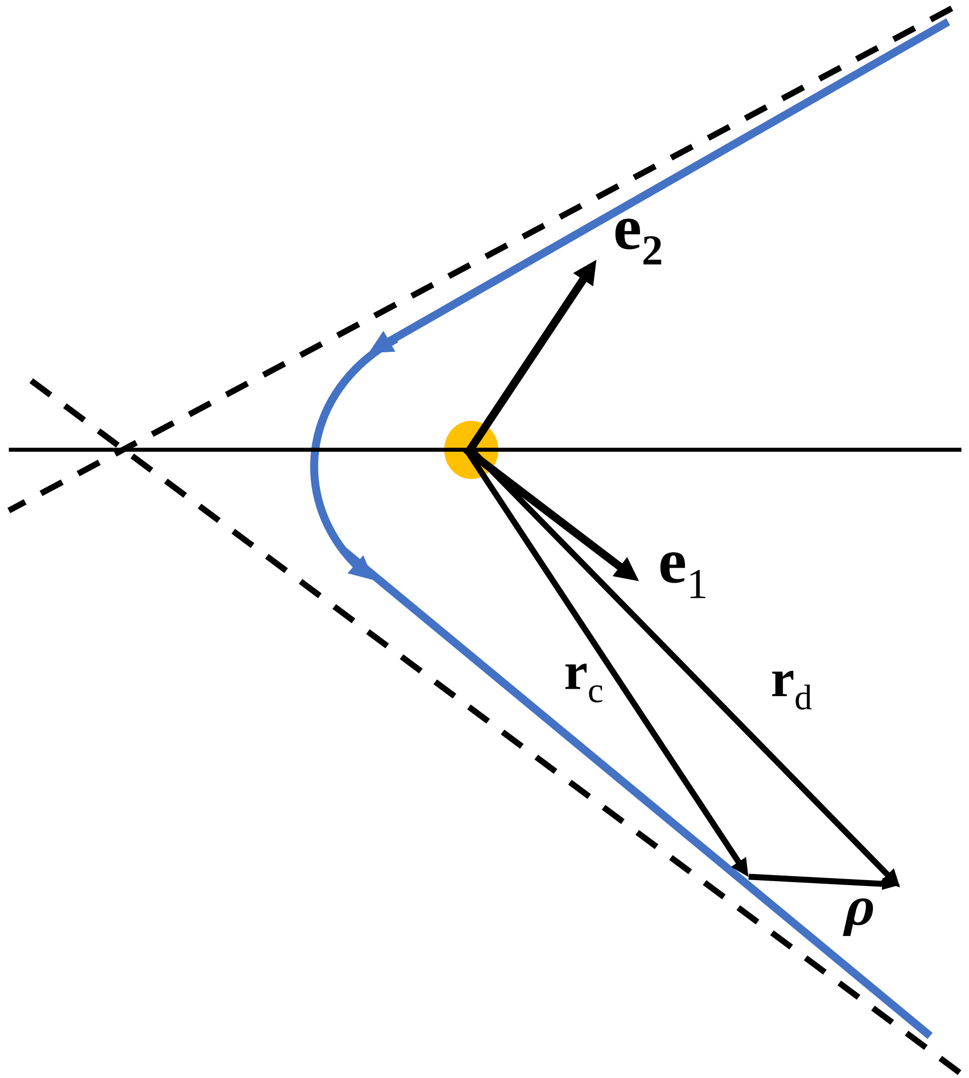
- Изучить *возможные типы* относительного движения на гиперболических траекториях

Асимптотическая система координат

- Задаётся опорная траектория
  - В модели задачи двух тел
- Вводится инерциальная система координат
  - Начало отсчёта – притягивающий центр
  - $\mathbf{e}_1$ – по уходящей асимптоте
  - $\mathbf{e}_2$ – до правой тройки
  - $\mathbf{e}_3$ – по интегралу площадей
- Вводится параметр δ
  - $\mathbf{r}_c$ – радиус-вектор ведущего аппарата
  - ν – истинная аномалия ведущего аппарата
    - $\nu \in (-\nu_{max}, \nu_{max}),\ \nu_{max} = \arccos\left(\frac{-1}{e}\right)$
  - $\delta = \nu_{max} - \nu$
    - $\delta \in (0, 2\nu_{max}),\ \lim\limits_{t\to+\infty} \delta = +0,\ \dot{\delta} < 0$
    - $\delta \sim \frac{1}{|\mathbf{r}_c|}$



Линеаризованные уравнения относительного движения



$\mathbf{r}_c$ – радиус-вектор ведущего аппарата

$\mathbf{r}_d$ – радиус-вектор ведомого аппарата

$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c$ – вектор относительного положения ведомого аппарата

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\mu(\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho})}{|\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}|^3} + \frac{\mu \mathbf{r}_c}{|\mathbf{r}_c|^3}$$

Линеаризация в окрестности $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\mu \mathbf{r}_c}{|\mathbf{r}_c|^3}(\boldsymbol{\rho} - 3(\mathbf{e}_c, \boldsymbol{\rho})\mathbf{e}_c)$$

$$\mathbf{e}_c = \frac{\mathbf{r}_c}{|\mathbf{r}_c|} = \begin{pmatrix} \cos\delta \\ -\sin\delta \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{АСК}}$$

Решение линеаризованных уравнений

Далее обозначаем

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} \end{pmatrix}, \Delta\mathrm{t} = \mathrm{t} - \mathrm{t}_0,$

$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r_c}, \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{c},$

$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v},$

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 & 0 & -\mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Δt – входит только в последний столбец Y

$\det Y \neq 0$

$\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(\mathrm{t}_0)$

$\Phi(t, t_0)$ – переходная матрица линеаризованной системы

Согласно [1], в инерциальной СК при $\mathbf{e} \neq \mathbf{1}$

$$\Phi(t, t_0) = Y(\mathrm{t}, \mathrm{t}_0)\, Y^{-1}(\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_0), \qquad Y(\mathrm{t}, \mathrm{t}_0) = Y(\mathbf{r}(\mathrm{t}), \mathbf{v}(\mathrm{t}), \Delta\mathrm{t})$$

$$Y(\mathbf{r}(\mathrm{t}), \mathbf{v}(\mathrm{t}), \Delta\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} [\mathbf{r}] & -([\mathbf{r}][\mathbf{v}] + [\mathbf{c}])B & -\mathbf{r} + \frac{3}{2}\mathbf{v}\Delta\mathrm{t} \\ [\mathbf{v}] & \left(\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3}[\mathbf{r}]^2 - [\mathbf{v}]^2\right)B & \frac{1}{2}\mathbf{v} - \frac{3\mu}{2|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}\Delta\mathrm{t} \end{pmatrix}$$

$B_{3\times 2} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2), \mathrm{rank}(B) = 2, \mathbf{b}_1 \perp \mathbf{c}, \mathbf{b}_2 \perp \mathbf{c}$

В качестве $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ возьмём $\frac{|\mathbf{c}|}{\mu}\mathbf{e}_1$ и $\frac{|\mathbf{c}|}{\mu}\mathbf{e}_2$

[1] *Reynolds R.G*. Direct Solution of the Keplerian State Transition Matrix // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2022. Vol. 45. № 6. P. 1162-1165.

Решение линеаризованных уравнений

Преобразуем матрицу Y

$$Y \to \frac{\mu}{|\mathbf{c}|^2} Y G^{-1}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\eta} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\eta} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\eta^2} & -1 & \frac{1}{2\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\eta} & -\frac{1}{2\eta^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\eta = \sqrt{e^2 - 1}, \qquad \det G \neq 0$

Обозначим столбец констант

$$\boldsymbol{\xi} = Y^{-1}(t_0, t_0)\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_{-1} \\ \beta_0 \\ \gamma_{-1} \\ \gamma_0 \\ \xi_6 \end{pmatrix} \text{(биекция)}$$

Тогда можно записать

$$\mathbf{x}(t) = Y(t, t_0)\boldsymbol{\xi} = Y(\delta(t), \delta(t_0))\boldsymbol{\xi}$$

Далее рассмотрим случай $\xi_6 = 0$

$\to \mathbf{x}(t)$ не содержит явного вхождения Δt

Решение линеаризованных уравнений

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \mathbf{x}(\mathrm{t}) = Y(\delta, \delta_0)\boldsymbol{\xi}$$

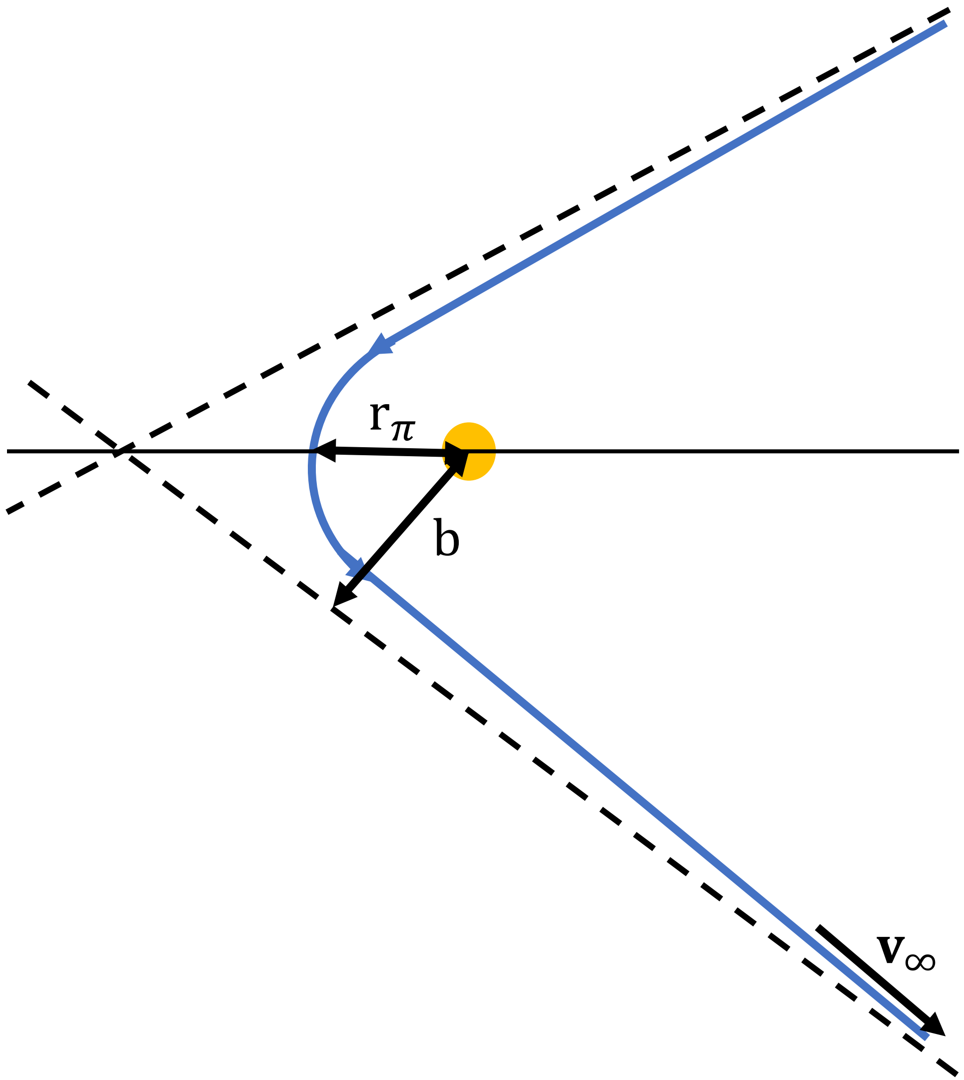
Разложим $Y(\delta, \delta_0)$ в ряд по δ в окрестности +0

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_0 + \boldsymbol{\delta}\left(\frac{\alpha_0}{\eta} - \frac{3\beta_{-1}}{2\eta}\right) - \frac{\beta_0\boldsymbol{\delta}^2}{2\eta} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) \\
y &= \frac{\beta_{-1}}{\boldsymbol{\delta}} + \beta_0 + \boldsymbol{\delta}\left(-\frac{\beta_{-1}}{3} - \frac{\beta_0}{2\eta}\right) + \boldsymbol{\delta}^2\left(-\frac{\alpha_0}{2\eta} + \frac{5\beta_{-1}}{8\eta} + \frac{\beta_0}{4\eta^2}\right) + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) \\
z &= \frac{\gamma_{-1}}{\boldsymbol{\delta}} + \gamma_0 + \boldsymbol{\delta}\left(-\frac{\gamma_{-1}}{3} - \frac{\gamma_0}{2\eta}\right) + \boldsymbol{\delta}^2\left(\frac{\gamma_{-1}}{8\eta} + \frac{\gamma_0}{4\eta^2}\right) + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right)
\end{aligned}$$

Тип относительного движения можно приближённо анализировать, оставив только несколько старших слагаемых рядов

Опорная траектория

- Гиперболическая гелиоцентрическая
- Гип. избыток $\mathrm{v}_{\infty} = 119\,\frac{\text{км}}{\text{с}} \approx 25\,\frac{\text{а.е.}}{\text{год}}$
- Эксцентриситет $\mathrm{e} = 1.8$
- Прицельная дальность $\mathrm{b} = 0.09$ а. е.
- Перигелий $\mathrm{r}_{\pi} = 0.05$ а. е.
- Большая полуось $a = 0.06$ а. е.



Возможные типы относительного движения – случай 1

$$\lim_{t\to+\infty}\delta = +0, \dot{\delta} < 0$$

$$x = \alpha_0 + \boldsymbol{\delta}\left(\frac{\alpha_0}{\eta} - \frac{3\beta_{-1}}{2\eta}\right) - \frac{\beta_0\boldsymbol{\delta}^2}{2\eta} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right)$$

$$y = \frac{\beta_{-1}}{\boldsymbol{\delta}} + \beta_0 + \boldsymbol{\delta}\left(-\frac{\beta_{-1}}{3} - \frac{\beta_0}{2\eta}\right) + \boldsymbol{\delta}^2\left(-\frac{\alpha_0}{2\eta} + \frac{5\beta_{-1}}{8\eta} + \frac{\beta_0}{4\eta^2}\right) + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right)$$

$$z = \frac{\gamma_{-1}}{\boldsymbol{\delta}} + \gamma_0 + \boldsymbol{\delta}\left(-\frac{\gamma_{-1}}{3} - \frac{\gamma_0}{2\eta}\right) + \boldsymbol{\delta}^2\left(\frac{\gamma_{-1}}{8\eta} + \frac{\gamma_0}{4\eta^2}\right) + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right)$$

Пусть $\beta_{-1} \neq 0, \gamma_{-1} \neq 0, \alpha_0 \neq 0$, тогда движение

- в плоскости Oyz будет происходить ***инфинитно*** по лучу (с точностью $O(\delta)$)

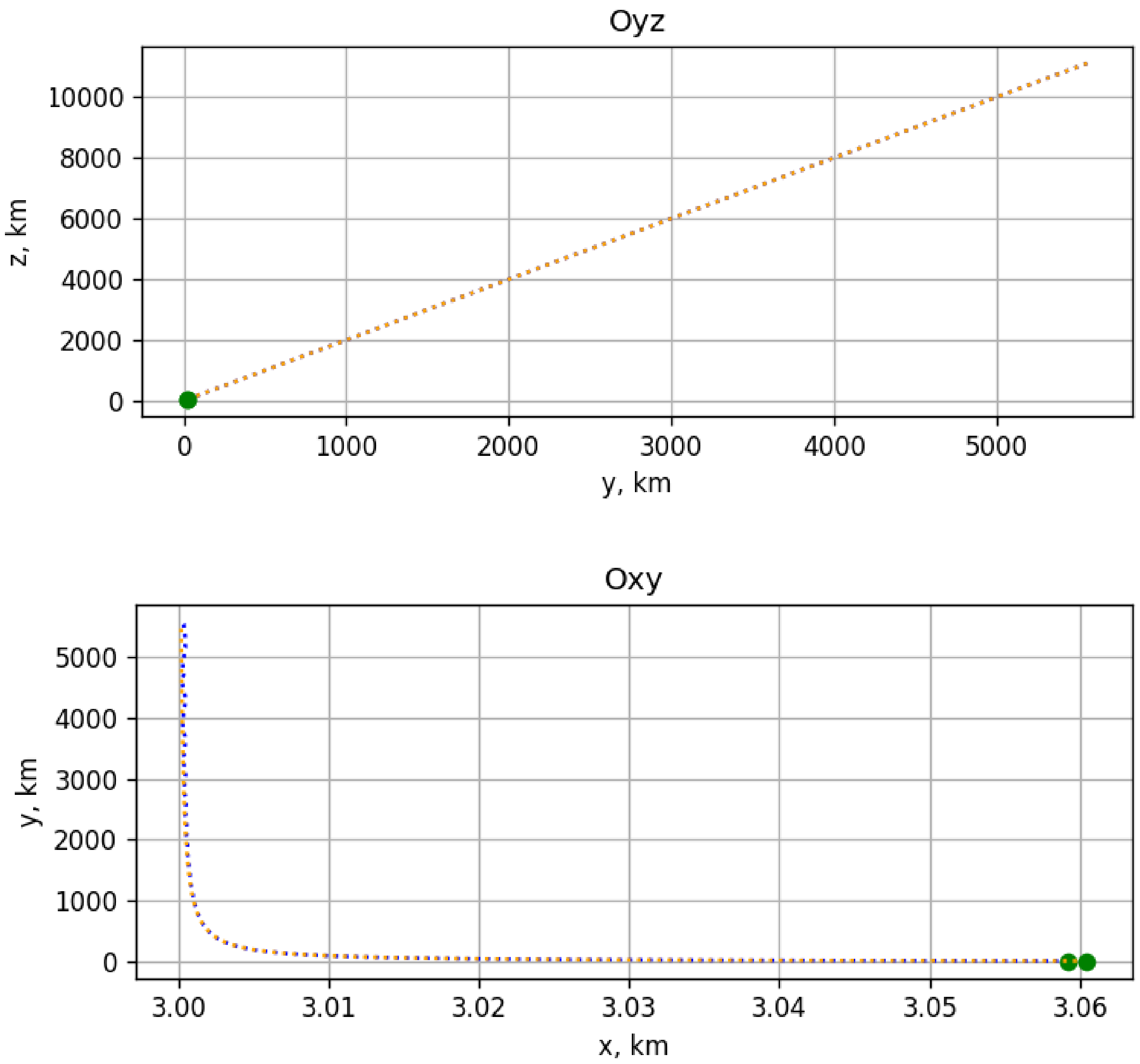
$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{-1} \\ \gamma_{-1} \end{pmatrix}\tau,\ \ \tau \in \overrightarrow{[\tfrac{1}{\delta_0}, +\infty)}$$

- в плоскости Oxy будет происходить ***инфинитно*** по гиперболе (с точностью $O(\delta)$)

$$y = \beta_0 + \frac{\beta_{-1}\left(\alpha_0 - \frac{3}{2}\beta_{-1}\right)}{\eta(x - \alpha_0)}$$

- в плоскости Oxz будет аналогично движению в плоскости Oxy

Возможные типы относительного движения – случай 1



$\alpha_0 = 3,$
$\beta_{-1} = 1, \beta_0 = 1,$
$\gamma_{-1} = 2, \gamma_0 = 2, \xi_6 = 0$

Полученные аналитические кривые

Результат численного моделирования

● Начальное положение $(\mathrm{t} = \mathrm{t}_0)$

$|\mathbf{r}(\mathrm{t}_0)| = 1.52$ а. е. $(\delta_0 \approx 0.0603)$

$|\mathbf{r}(\mathrm{t}_f)| = 520$ а. е. $(\delta_f \approx 0.0002)$

Возможные типы относительного движения – случай 2

$$x = \alpha_0 + \boldsymbol{\delta}\left(\frac{\alpha_0}{\eta} - \frac{3\beta_{-1}}{2\eta}\right) - \frac{\beta_0 \boldsymbol{\delta}^2}{2\eta} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right)$$

$$\lim_{t\to+\infty} \delta = +0, \dot{\delta} < 0$$

$$y = \frac{\beta_{-1}}{\boldsymbol{\delta}} + \beta_0 + \boldsymbol{\delta}\left(-\frac{\beta_{-1}}{3} - \frac{\beta_0}{2\eta}\right) + \boldsymbol{\delta}^2\left(-\frac{\alpha_0}{2\eta} + \frac{5\beta_{-1}}{8\eta} + \frac{\beta_0}{4\eta^2}\right) + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right)$$

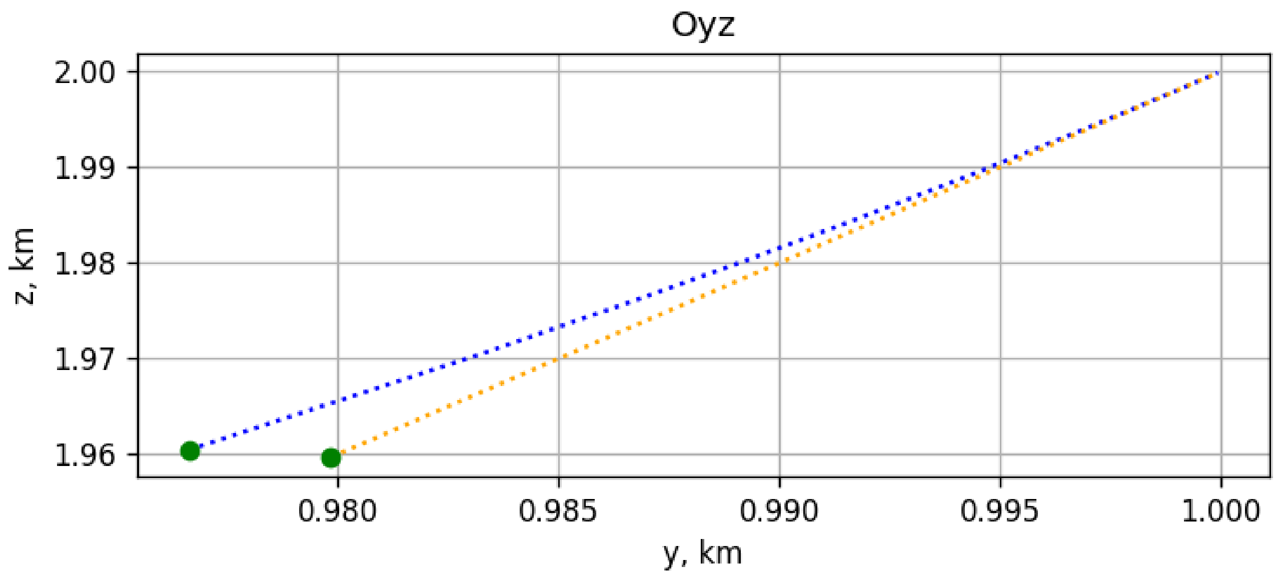
$$z = \frac{\gamma_{-1}}{\boldsymbol{\delta}} + \gamma_0 + \boldsymbol{\delta}\left(-\frac{\gamma_{-1}}{3} - \frac{\gamma_0}{2\eta}\right) + \boldsymbol{\delta}^2\left(\frac{\gamma_{-1}}{8\eta} + \frac{\gamma_0}{4\eta^2}\right) + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right)$$

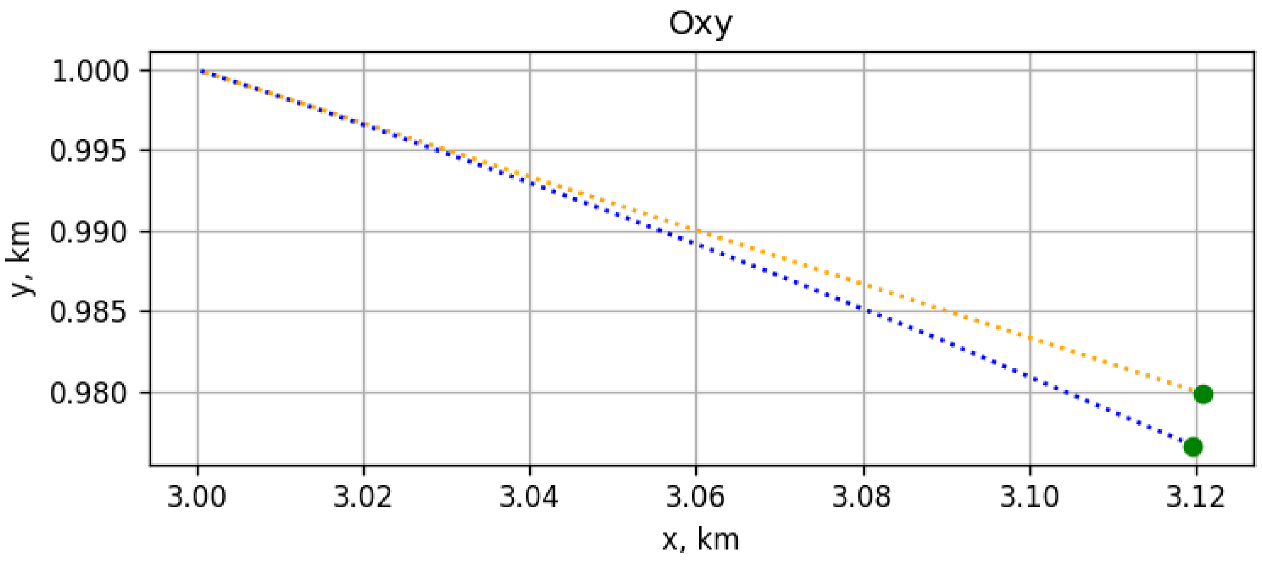
Пусть $\beta_{-1} = 0,\ \gamma_{-1} = 0, \beta_0 \neq 0, \gamma_0 \neq 0, \alpha_0 \neq 0$, тогда движение

- в пространстве будет происходить ***финит но*** по отрезку (с точностью до $O(\delta^2)$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_0 \\ -\beta_0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix} \frac{\tau}{2\eta},\ \ \tau \in \overleftarrow{(0, \delta_0]}$$

Возможные типы относительного движения – случай 2





$\alpha_0 = 3,$
$\beta_{-1} = 0, \beta_0 = 1,$
$\gamma_{-1} = 0, \gamma_0 = 2, \xi_6 = 0$

Полученные аналитические кривые

Результат численного моделирования

● Начальное положение $(\mathrm{t} = \mathrm{t}_0)$

$|\mathbf{r}(\mathrm{t}_0)| = 1.52$ а. е. $(\delta_0 \approx 0.0603)$

$|\mathbf{r}(\mathrm{t}_f)| = 520$ а. е. $(\delta_f \approx 0.0002)$

Связь констант ξ и начальных отклонений

Пусть дан вектор констант $\boldsymbol{\xi}$, тогда соответствующий ему вектор начальных отклонений можно найти из

$$\mathbf{x}_0 = Y(\delta_0, \delta_0)\boldsymbol{\xi}$$

Например, $\boldsymbol{\xi} = (3, 1, 1{,}2{,}2{,}0) \rightarrow$

$$\mathbf{x}_0 = \left(3.06 \text{ км}, 17.53 \text{ км}, 35.07 \text{ км}, -0.03 \,\frac{\text{мм}}{\text{с}}, 8.87 \frac{\text{мм}}{\text{с}}, 17.74 \frac{\text{мм}}{\text{с}}\right)$$

Пусть даны условия на вектор констант $\boldsymbol{\xi}$ в виде СЛАУ

$$A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{q}$$

Тогда соответствующие условия на вектор $\mathbf{x}_0$ – тоже СЛАУ

$$AY^{-1}(\delta_0, \delta_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{q}$$

Например, $\xi_6 \;= 0 \rightarrow \frac{2\mathrm{b}^2}{|\mathbf{r}_0|^2}(\mathrm{x}_0 \cos\delta_0 - \mathrm{y}_0 \sin\delta_0) + \frac{2\mathrm{b}}{\mathrm{v}_\infty}\left[\mathrm{v}_{\mathrm{x}_0}(\eta + \sin\delta_0) - \mathrm{v}_{\mathrm{y}_0}(1 - \cos\delta_0)\right] = 0$

$$\gamma_{-1} = 0 \rightarrow \frac{1}{\eta}\left(\frac{\mathrm{b}|\mathbf{r}_0|}{\mathrm{a}}\frac{\mathrm{v}_{\mathrm{z}0}}{\mathrm{v}_\infty}\sin\delta_0 - \mathrm{z}_0(1 - \cos\delta_0)\right) = 0$$

Заключение

- Предложена система координат (асимптотическая СК), удобная для описания гиперболического движения
- Выписано решение линеаризованных уравнений, выраженное через параметры гиперболического движения
- Выписаны в общем виде уравнения, определяющие условия на вектор начальных отклонений в зависимости от значения/условий на вектор $\boldsymbol{\xi}$
  - Записаны условия отсутствия векового дрейфа
- Выписаны в виде рядов по малому параметру (δ) выражения для относительных положения и скорости *в частном случае* $\xi_6 = 0$
  - Проанализированы возможные типы относительного движения

Динамика относительного движения

[17] Melton, R.G. (2022). Relative Motion Between Hyperbolic Trajectories– A Technical Footnote. *73rd International Astronautical Congress*, Paris, France.

[16] Willis, M., Alfriend, K. T., & D'Amico, S. (2019). Second-order solution for relative motion on eccentric orbits in curvilinear coordinates. *arXiv preprint arXiv:1909.02146*.

- В работе [17] показывается, что результаты работы [16] справедливы для гиперболического случая
  - ➢ Полученные результаты совершенно ненаглядны

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho} = {} & K_1 \left(1 - \frac{3}{2} ekJ(t)\sin f\right) + K_2 k \sin f + K_3 k \cos f \\
& + c_{\rho j} \left(1 - \frac{3}{2} ekJ(t)\sin f\right) + c_{\rho s} k \sin f + c_{\rho c} k \cos f \\
& + K_1^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{8} k^3 J(t)^2 e \cos f\right) \\
& - \frac{3}{2} \left(K_1 K_2 \cos f - K_1 K_3 \sin f\right) k^3 J(t) \\
& + K_2^2 \left[\left(-\frac{e^2}{2}\sin^2 f + \frac{3}{2}(k-1) + \frac{1}{1-e^2}\right)\cos^2 f \right. \\
& \left. + \frac{e(1+e^2)\cos f}{2(1-e^2)}\right] \\
& + K_2 K_3 \frac{(ek^2 - (1+k)\cos f)k \sin f}{1-e^2} \\
& + K_3^2 \frac{k(3 - k - k^2 + k^3 - (1+k)(e^2 + \cos^2 f)}{2(1-e^2)}
\end{aligned}
$$

- В работе [18] сделана попытка описать и линеаризовать относительно гиперболическое движение в более подходящей СК
  - ➢ На малых промежутках времени (1500 с) результаты достаточно точные и наглядные
  - ➢ Не представлено аналитическое решение

[18] Albert, S. W., & Schaub, H. RELATIVE MOTION ON HYPERBOLIC ATMOSPHERIC ENTRY TRAJECTORIES.

Дальнейшее развитие исследования

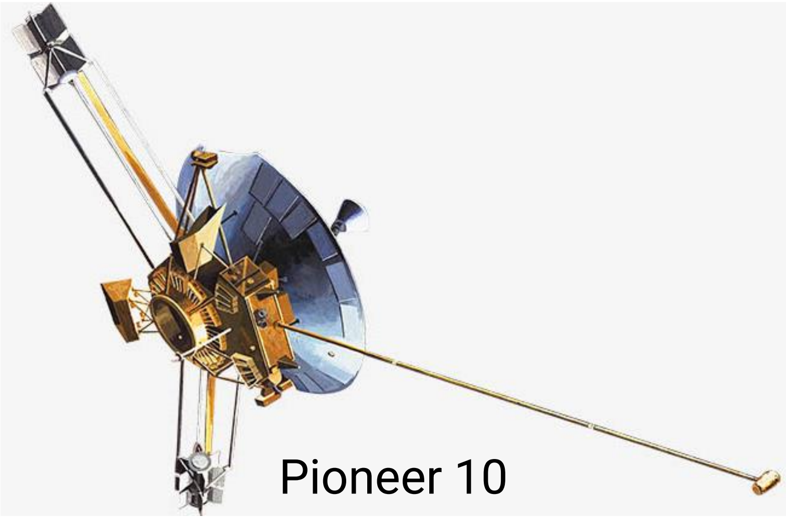
- Переписать условия (СЛАУ) на начальные отклонения в виде условий (СЛАУ) на дифференциальные орбитальные элементы

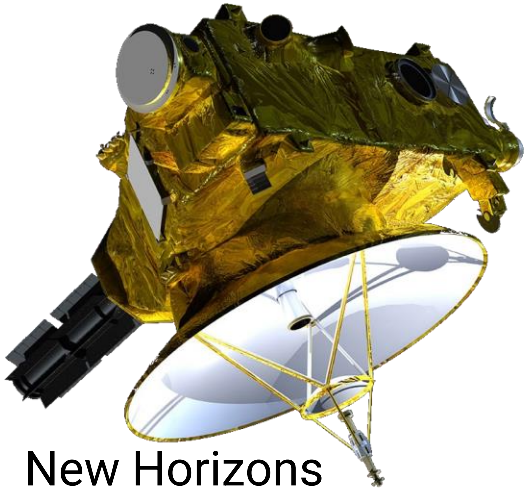
- Избавиться от требования $\xi_6 = 0$, выразив Δt в виде ряда по δ
  - Изучить типы относительного движения в данном случае

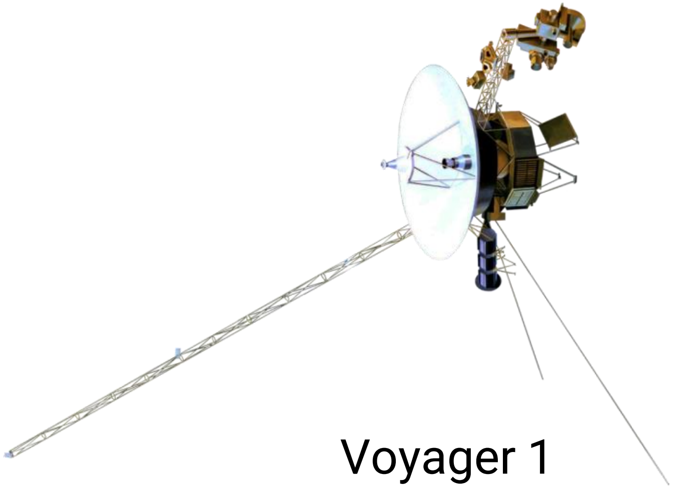
$$
Y(\delta, \delta_0) = \begin{matrix}
1 + \frac{\boldsymbol{\delta}}{b_e} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) & -\frac{3\boldsymbol{\delta}}{2b_e} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) & -\frac{\boldsymbol{\delta}^2}{2b_e} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) \\
-\frac{\boldsymbol{\delta}^2}{2b_e} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) & \frac{1}{\boldsymbol{\delta}} - \frac{\boldsymbol{\delta}}{3} + \frac{5\boldsymbol{\delta}^2}{8b_e} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) & 1 - \frac{\boldsymbol{\delta}}{2b_e} + \frac{\boldsymbol{\delta}^2}{4b_e^2} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) \\
0 & 0 & 0 \\
-\frac{\boldsymbol{\delta}^2\mu^2 b_e}{C^3} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) & \frac{3\boldsymbol{\delta}^2\mu^2 b_e}{2C^3} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) & O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) \\
O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) & \frac{\mu^2 b_e^2}{C^3} + \frac{\boldsymbol{\delta}\mu^2 b_e}{C^3} + \frac{\boldsymbol{\delta}^2\mu^2}{4C^3} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) & \frac{\boldsymbol{\delta}^2\mu^2 b_e}{2C^3} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) \\
0 & 0 & 0
\end{matrix}
$$

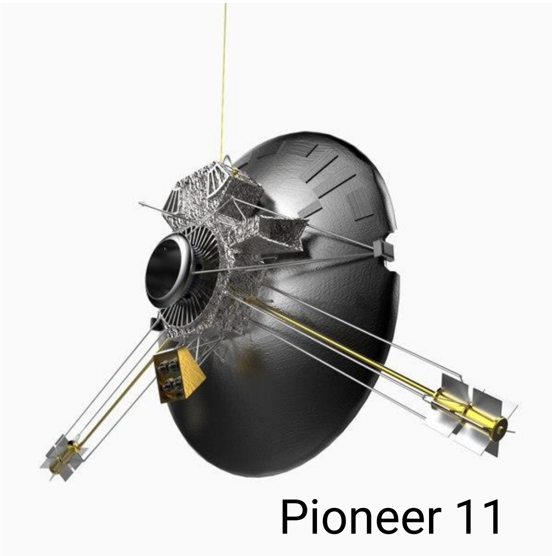
$$
\begin{matrix}
0 & 0 & \frac{3\boldsymbol{\Delta}_t\mu^2 b_e}{2C^3} + \frac{3\boldsymbol{\Delta}_t\boldsymbol{\delta}\mu^2}{2C^3} - \frac{1}{\boldsymbol{\delta} b_e} + \frac{1}{2b_e^2} - \frac{\boldsymbol{\delta}}{4b_e^3} + \frac{\boldsymbol{\delta}}{3b_e} + \frac{\boldsymbol{\delta}^2}{8b_e^4} - \frac{\boldsymbol{\delta}^2}{8b_e^2} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) \\
0 & 0 & -\frac{3\boldsymbol{\Delta}_t\boldsymbol{\delta}^2\mu^2}{4C^3} + \frac{1}{b_e} - \frac{\boldsymbol{\delta}}{2b_e^2} + \frac{\boldsymbol{\delta}^2}{4b_e^3} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) \\
\frac{1}{\boldsymbol{\delta}} - \frac{\boldsymbol{\delta}}{3} + \frac{\boldsymbol{\delta}^2}{8b_e} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) & 1 - \frac{\boldsymbol{\delta}}{2b_e} + \frac{\boldsymbol{\delta}^2}{4b_e^2} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) & 0 \\
O(0) & O(0) & -\frac{3\boldsymbol{\Delta}_t\boldsymbol{\delta}^2\mu^4 b_e^2}{2C^6} + \frac{\mu^2 b_e}{2C^3} + \frac{\boldsymbol{\delta}\mu^2}{2C^3} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) \\
0 & 0 & -\frac{\boldsymbol{\delta}^2\mu^2}{4C^3} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) \\
\frac{\mu^2 b_e^2}{C^3} + \frac{\boldsymbol{\delta}\mu^2 b_e}{C^3} + \frac{\boldsymbol{\delta}^2\mu^2}{4C^3} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) & \frac{\boldsymbol{\delta}^2\mu^2 b_e}{2C^3} + O\left(\boldsymbol{\delta}^3\right) & 0
\end{matrix}
$$

Успешные миссии в дальнем космосе

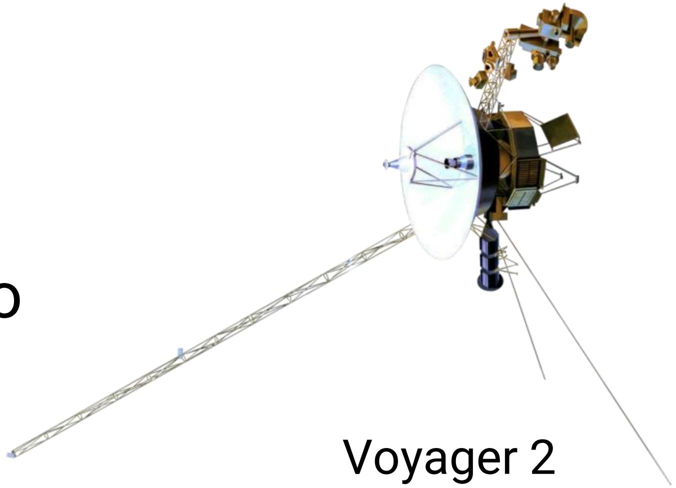

Pioneer 10


New Horizons


Voyager 1


Pioneer 11

Единственные аппараты, имеющие гиперболическую гелиоцентрическую траекторию


Voyager 2