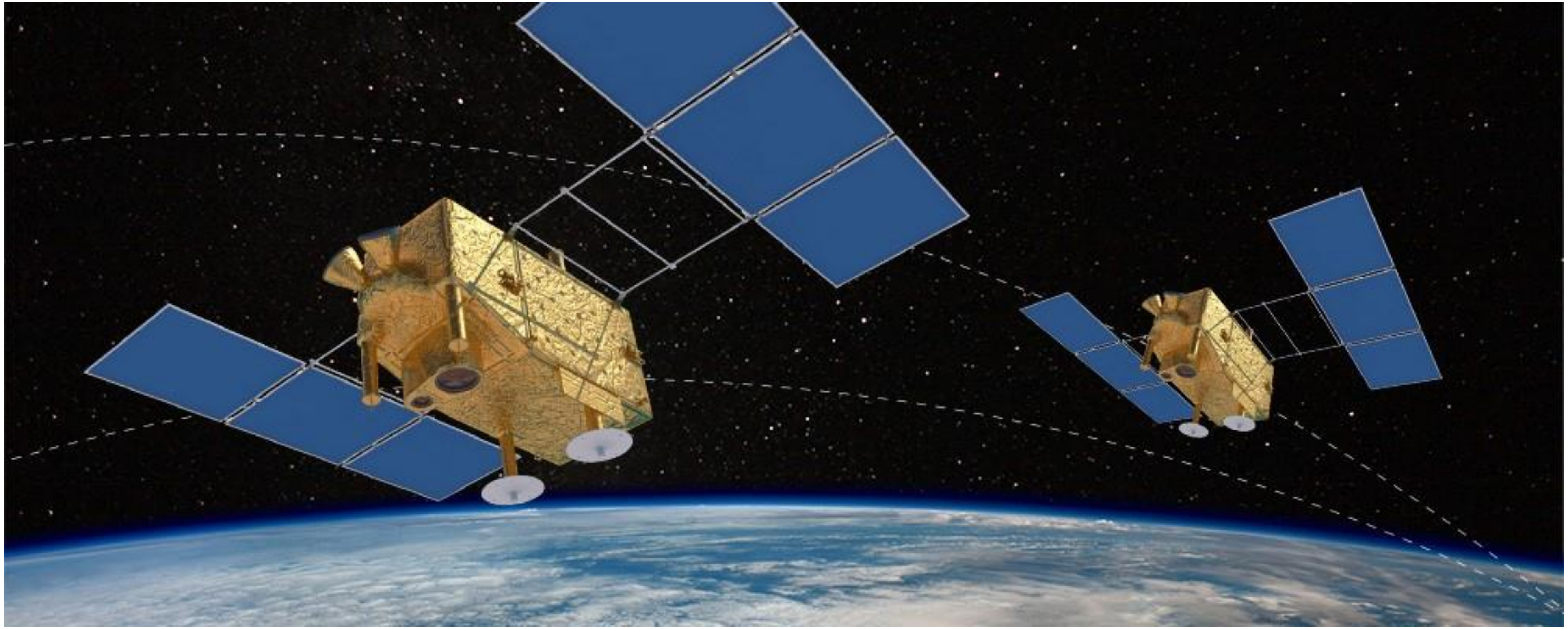
Использование криволинейных координат в модели Швайгхарта-Седвика



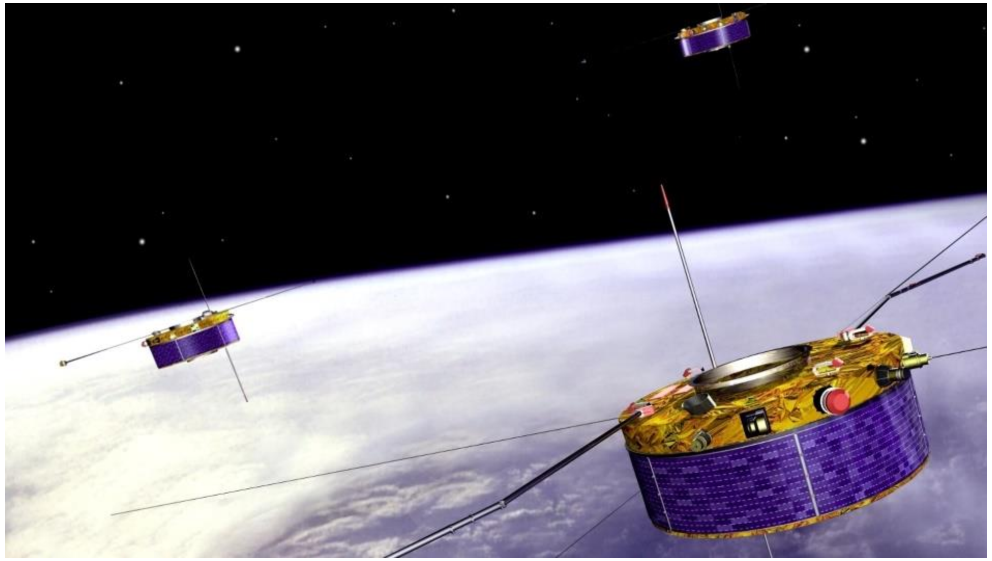
И.А. Суслова, Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков

Введение

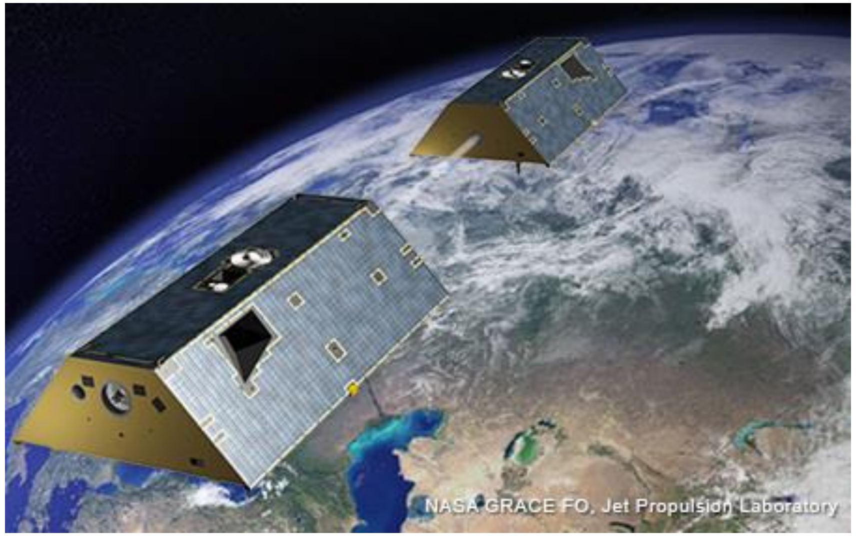
Использование нескольких аппаратов обладает рядом преимуществ

Большая популярность групповых полётов

Необходимость в моделях относительного движения



Cluster II



GRACE-FO

Цель работы

- Получение уравнений Швайгхарта-Седвика (ШС) в криволинейных координатах
- Сравнение модели Швайгхарта-Седвика в криволинейных координатах с моделью в декартовых координатах
- Показать преимущество криволинейных координат над декартовыми

Постановка задачи

Имеется:

- Два аппарата, движущихся по близким низким околокруговым орбитам
- Модель: центральное поле + J2
- Время моделирования – 24 часа

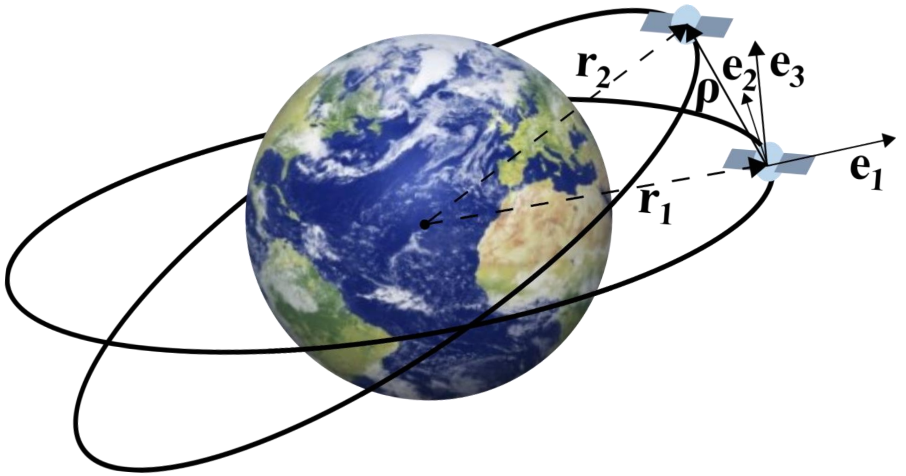
Необходимо:

- Получить уравнения ШС в криволиненых координатах
- Реализовать модели движения ШС в декартовых и в криволинейных координатах
- Промоделировать движение на нескольких размерах относительных орбит, а также при различных параметрах орбиты главного аппарата
- Промоделировать движение при выборе различных параметров опорной орбиты
- Численно оценить точность каждой модели

Уравнения Швайгарта-Седвика (ШС)

Уравнения в декартовых относительных координатах:

$$\ddot{x} - 2nc\dot{y} - \left(5c^2 - 2\right)n^2 x = 0,$$
$$\ddot{y} + 2nc\dot{x} = 0,$$
$$\ddot{z} + q^2 z = 2lq\cos\left(qt + \beta\right).$$



Предположения:
1) Модель движения: центральное гравитационное поле и учет второй гармоники гравитационного потенциала J2
2) Орбита главного аппарата является круговой

Идея вывода уравнений Швайгхарта-Седвика в криволинейных координатах

Начальные уравнения движения

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_2(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r},$$

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = -(3/2)\left(\frac{J_2 \mu R_e^2}{r^4}\right)[(1-3\sin^2 i \sin^2\theta)\hat{x} + (2\sin^2 i \sin\theta\cos\theta)\hat{y} + (2\sin i \cos i \sin\theta)\hat{z}]$$

Выбирая опорную орбиту под действием потенциала сферической земли с постоянным радиусом и линеаризируя уравнения движения по отношению к опорной орбите, получаем:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}_{ref}) + \nabla\mathbf{g}(\mathbf{r}_{ref})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{ref}) + \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_{ref}) + \nabla\mathbf{J}_2(\mathbf{r}_{ref})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{ref})$$

Идея вывода уравнений Швайгхарта-Седвика в криволинейных координатах

1) Усреднение градиента потенциала J_2

2) Корректировка периода опорной орбиты

3) Корректировка дрейфа долготы восходящего узла

4) Корректировка движения вне плоскости

Итого:

$$\ddot{x} - 2(nc)\dot{y} - (5c^2 - 2)n^2 x = -3n^2 J_2 \left(\frac{R_e^2}{r_{ref}}\right)\left[\frac{1}{2} - \left(3\sin^2 i_{ref}\sin^2(kt)/2\right) - \left(\frac{1+3\cos 2i_{ref}}{8}\right)\right]$$

$$\ddot{y} + 2(nc)\dot{x} = -3n^2 J_2 \left(\frac{R_e^2}{r_{ref}}\right)\sin^2 i_{ref}\sin(kt)\cos(kt)$$

$$\ddot{z} + q^2 z = 2lq\cos(qt + \varphi)$$

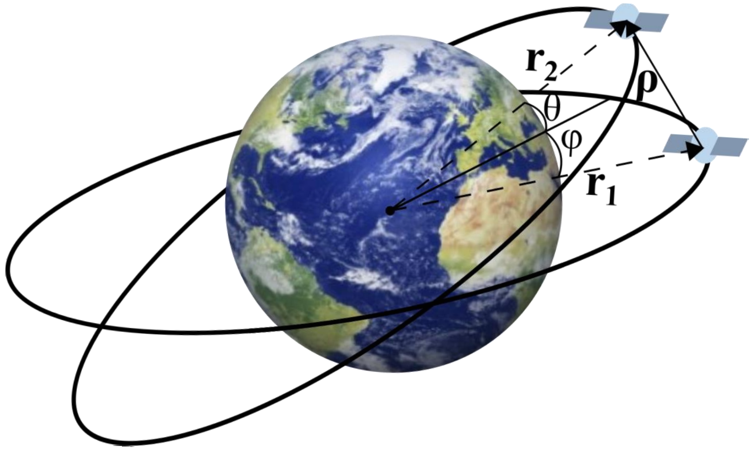
Идея вывода уравнений Швайгхарта-Седвика в криволинейных координатах

- Замена

$$x = (r_{ref} + a)\cos\theta\cos\varphi$$

$$y = (r_{ref} + a)\cos\theta\sin\varphi$$

$$z = (r_{ref} + a)\sin\theta$$



- Линеаризация уравнений при условиях $r_{ref} >> a$, a, θ, φ-малые величины

$$\ddot{a} - 2(nc)r_{ref}\dot{\varphi} - (5c^2 - 2)n^2 a = -3n^2 J_2\left(\frac{R_e^2}{r_{ref}}\right)\left[\frac{1}{2} - \left(3\sin^2 i_{ref}\sin^2(kt)/2\right) - \left(\frac{1 + 3\cos 2i_{ref}}{8}\right)\right]$$

$$\ddot{\varphi} + 2(nc)\dot{a} = -3n^2 J_2\left(\frac{R_e^2}{r_{ref}}\right)\sin^2 i_{ref}\sin(kt)\cos(kt)$$

$$r_{ref}\ddot{\theta} + q^2 r_{ref}\theta = 2lq\cos(qt + \varphi)$$

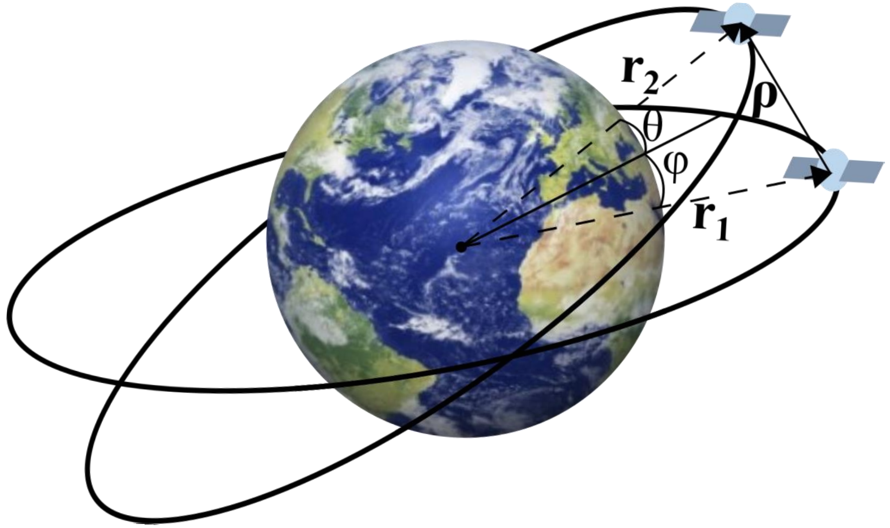
Уравнения Швайгхарта-Седвика в криволинейных координатах

Так как уравнения спутника относительно опорной орбиты получились линейными, то при рассмотрении Движении главного спутника относительно второго спутника, можно вычесть одно уравнение из другого. Тогда Получаем уравнения:

$$\ddot{\rho} - 2ncr_c\dot{\theta} - \left(5c^2 - 2\right)n^2\rho = 0,$$

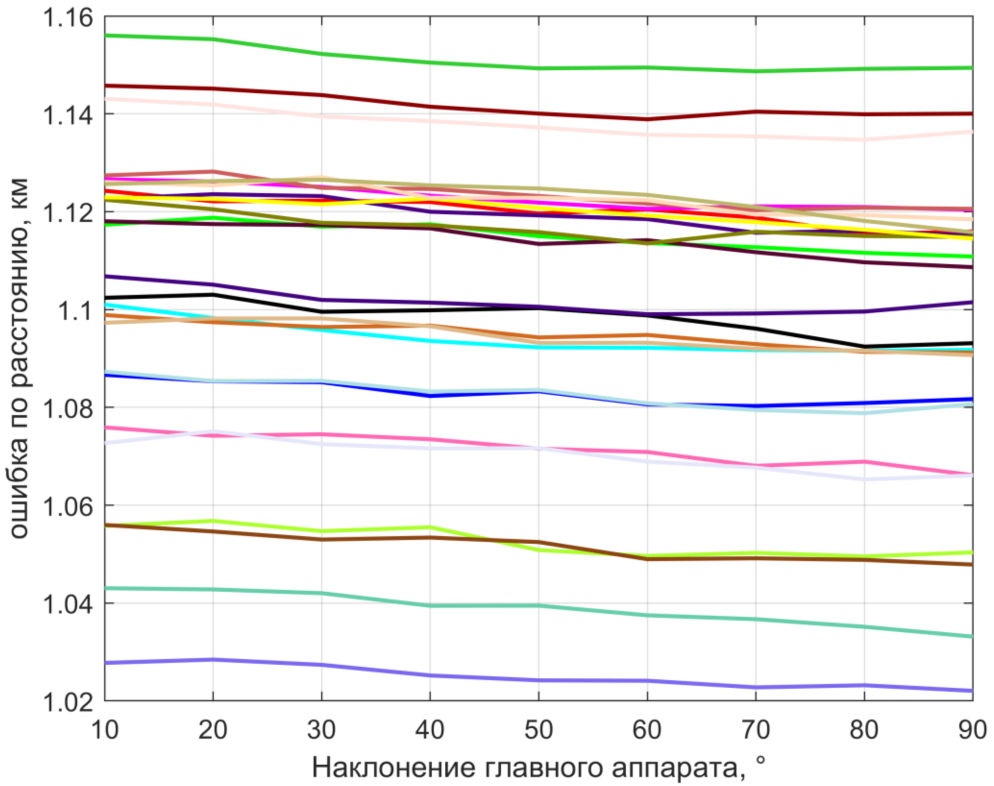
$$r_c\ddot{\theta} + 2nc\rho = 0,$$

$$r_c\ddot{\varphi} + q^2 r_c\varphi = 2lq\cos\left(qt + \beta\right).$$

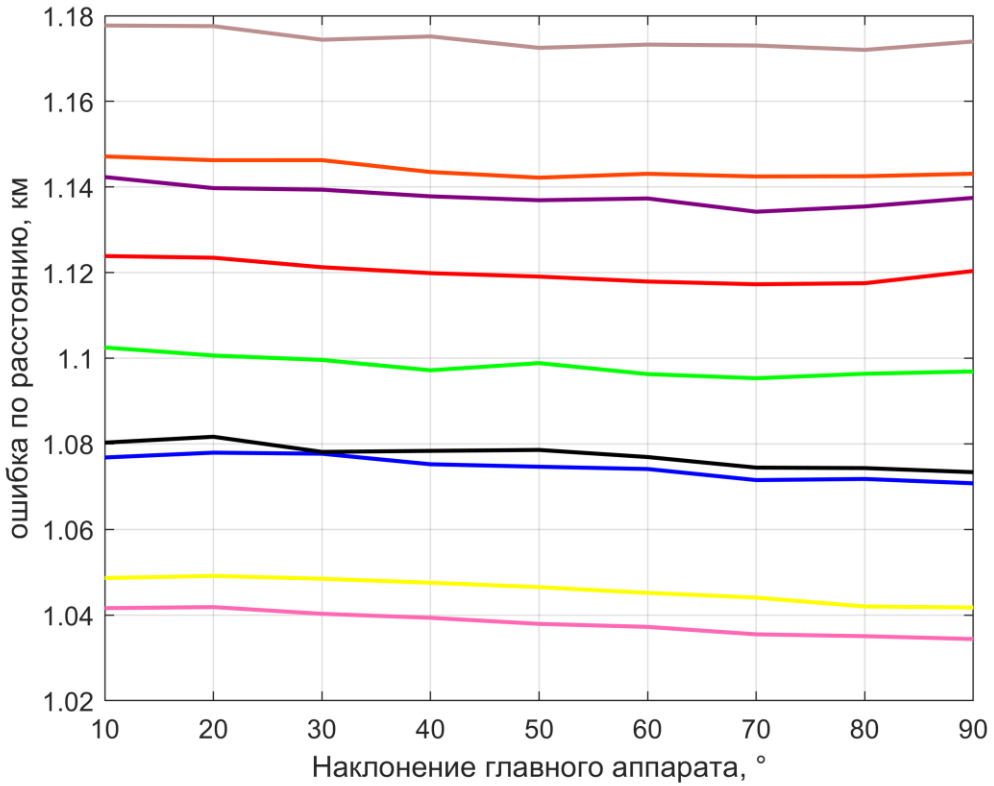


Исследование зависимости результатов от опорной орбиты

Перебирались значения радиуса и наклонения опорной орбиты



Наклонение опорной орбиты фиксировано; радиус перебирался от 6900 до 7100



Радиус опорной орбиты фиксирован; перебиралось наклонение

Исследование зависимости результатов от опорной орбиты

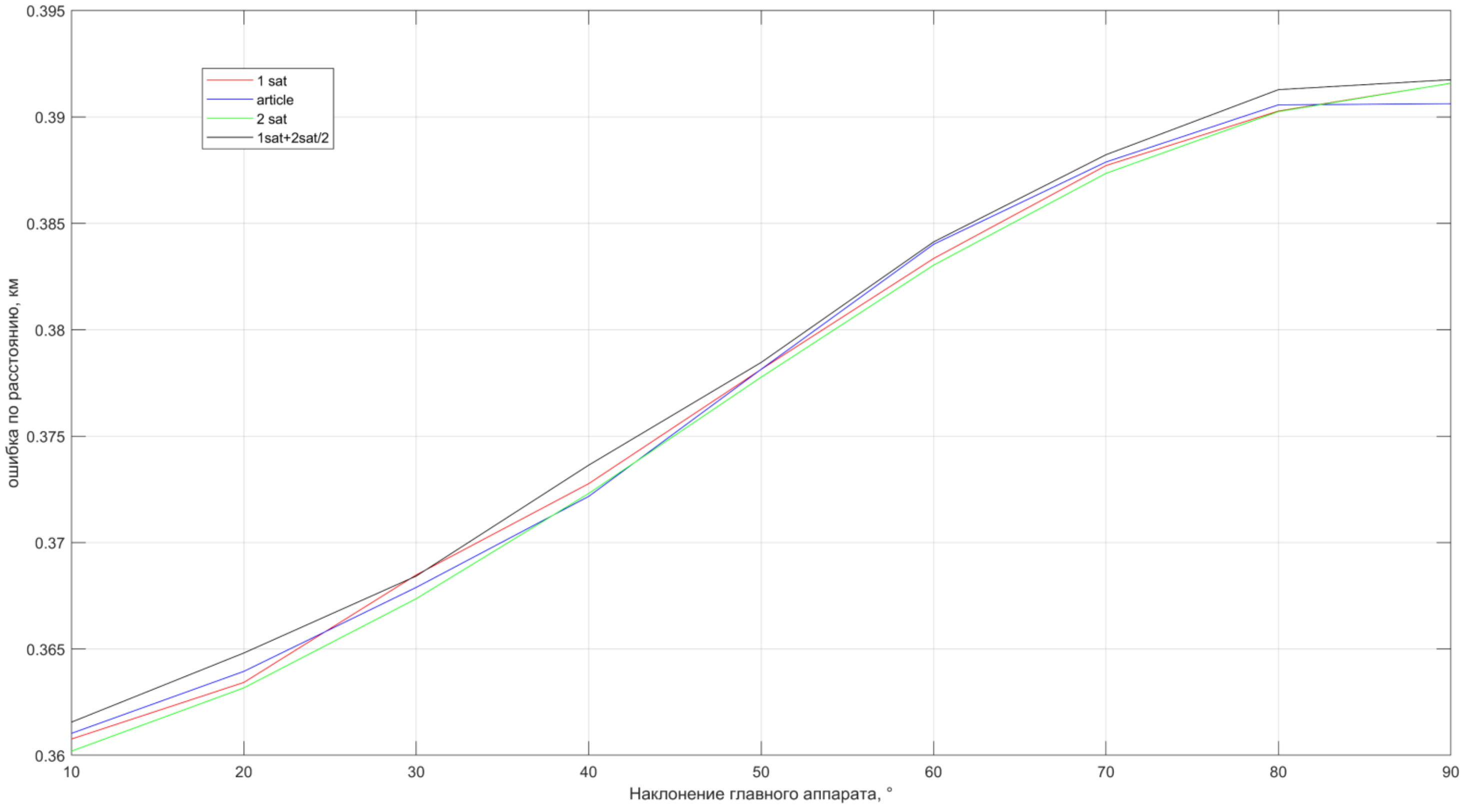
Различные варианты опорной орбиты:

- В качестве опорной орбиты бралась орбита главного спутника
- Наклонение опорной орбиты считалось по формуле:

$$i = i_{ref} - \left(\frac{3\sqrt{\mu} J_2 R_e^2}{2kr^{7/2}}\right) \cos i_{ref} \sin i_{ref}$$

- В качестве опорной орбиты бралась орбита второго спутника
- В качестве параметров опорной орбиты брался средний радиус между первым и вторым спутников, а также среднее наклонение

Исследование зависимости результатов от опорной орбиты



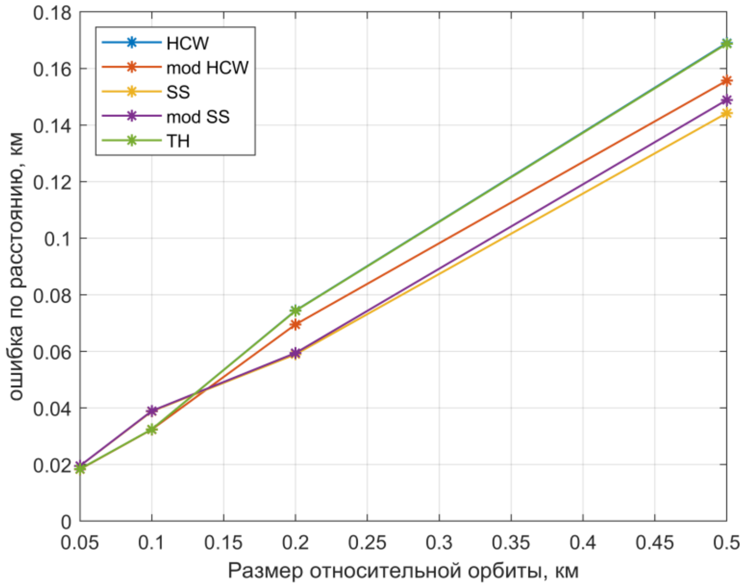
Методика оценивания точности

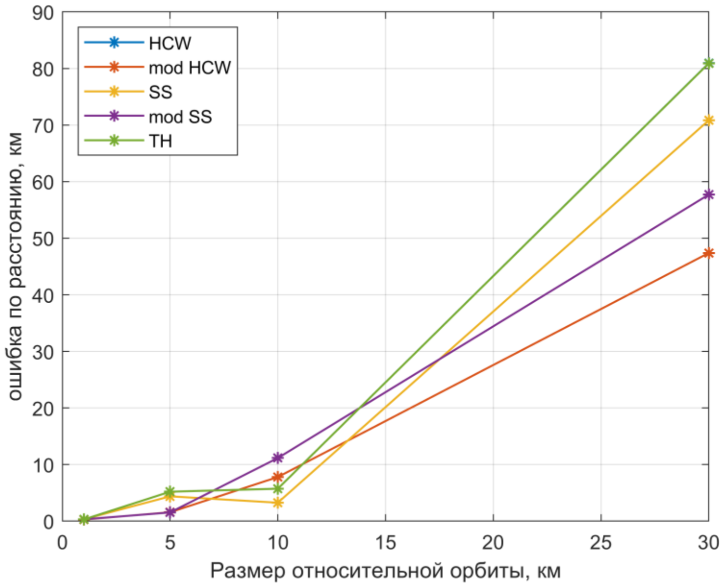
- Задается размер относительной орбиты
- Задается размер орбиты главного аппарата, получение $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1$
- С помощью хилловских констант задается относительная орбита, получение начального радиус-вектора и вектора скорости второго аппарата $\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2$
- С помощью метода Монте-Карло получается набор данных: к начальным данным, имитируя ошибку выведения, добавляются случайные величины
- Проводится интегрирование уравнений движений в рамках всех моделей
- Время моделирования – 24 часа.

Оценка точности проводится 2 способами:

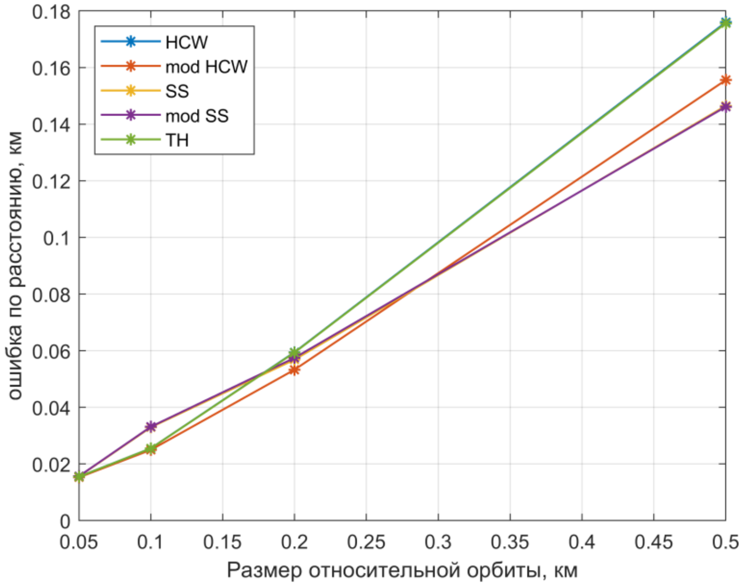
1) На последнем витке усредняется ошибка по расстоянию
2) Фиксируется время, когда приближенные уравнения начинают отличаться от полных уравнения движения на заданную величину. В качестве такой величины берется некоторый процент от размера относительной орбиты

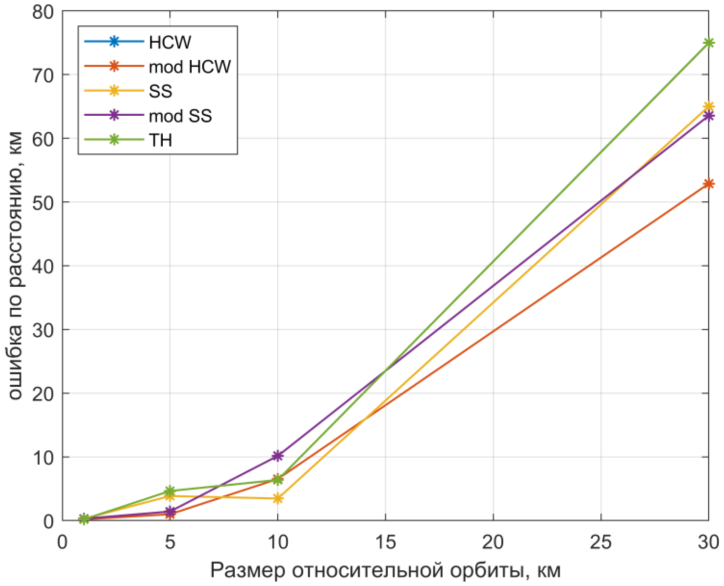
Сравнение моделей





Наклонение 30°
Эксцентриситет 0.01





Наклонение 90°
Эксцентриситет 0.01

Оценка точности через время

	Наклонение орбиты 30°				Наклонение орбиты 90°			
	100 м	500 м	1000 м	5000 м	100 м	500 м	1000 м	5000 м
Уравнения ХКУ	14,12 ч	12,52 ч	13,13 ч	4,91 ч	13,75 ч	10,62 ч	21,05 ч	5,68 ч
Модифици-рованные уравнения ХКУ	14,27 ч	14,09 ч	13,19 ч	11,56 ч	13,89 ч	11,11 ч	23,33 ч	17,99 ч
Уравнения ШС	10,87 ч	13,54 ч	10,04 ч	4,99 ч	11,35 ч	14,44 ч	13,73 ч	6,43 ч
Модифици-рованные уравнения ШС	10,62 ч	14,02 ч	11,57 ч	14,73 ч	11,19 ч	15,04 ч	14,68 ч	13,94 ч
Уравнения ШХ	14,15 ч	12,53 ч	13,13 ч	4,91 ч	13,76 ч	10,64 ч	21,05 ч	5,86 ч

Заключение

- Получены уравнения ШС в криволинейных координатах
- Протестированы модели ШС в декартовых координатах и в криволинейных координатах в зависимости от выбора опорной орбиты
- Для малых размеров относительных орбит (до километра) возможно использование любой из моделей (ХКУ, ШС, ШХ) в случае, когда оценка точности происходит по относительному расстоянию между спутниками
- На достаточно больших размерах относительных орбит целесообразно использовать уравнения движения в криволинейных координатах в случае, когда оценка точности происходит по относительному расстоянию между спутниками

Дальнейшая работа

- Написание магистерской диссертации
- Рассмотрение опорной орбиты, полученной из осредненных элементов орбиты главного спутника
- Аналитический вывод опорной орбиты, минимизирующей ошибку
- Оценка точности по характеристикам относительной орбиты, а не по относительному расстоянию

Константы для уравнений Швайгхарта-Седвика

$$s=\frac{3J_2R_e^2}{8r_{ref}^2}\left(1+3\cos 2i_{ref}\right),$$

$$c=\sqrt{1+s},$$

$$n=\sqrt{\frac{\mu}{r_{ref}^3}},$$

$$k=nc+\frac{3nJ_2R_e^2}{2r_{ref}^2}\cos^2 i_{ref},$$

$$i_{sat1}=\frac{\triangle\dot{z}_0}{kr_{ref}}+i_{sat2},$$

$$\triangle\Omega_0=\frac{\triangle z_0}{r_{ref}\sin i_{ref}},$$

$$\gamma_0=\cot^{-1}\left[\frac{\cot i_{sat2}\sin i_{sat1}-\cos i_{sat1}\cos\triangle\Omega_0}{\sin\triangle\Omega_0}\right],$$

$$\Phi_0=\cos^{-1}\left[\cos i_{sat1}\cos i_{sat2}+\sin i_{sat1}\sin i_{sat2}\cos\triangle\Omega_0\right],$$

$$\dot{\Omega}_{sat1}=-\frac{3nJ_2R_e^2}{2r_{ref}^2}\cos i_{sat1},$$

$$\dot{\Omega}_{sat2}=-\frac{3nJ_2R_e^2}{2r_{ref}^2}\cos i_{sat2},$$

$$q=nc-(\cos\gamma_0\sin\gamma_0\cot\triangle\Omega_0-\sin^2\gamma_0\cos i_{sat1})(\dot{\Omega}_{sat1}-\dot{\Omega}_{sat2})-\dot{\Omega}_{sat1}\cos i_{sat1},$$

$$l=-r_{ref}\frac{\sin i_{sat1}\sin i_{sat2}\sin\triangle\Omega_0}{\sin\Phi_0}(\dot{\Omega}_{sat1}-\dot{\Omega}_{sat2}),$$

$$m\sin\varphi=\triangle z_0,$$

$$l\sin\varphi+qm\cos\varphi=\triangle\dot{z}_0.$$