
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Математическая физика, компьютерные технологии и математическое моделирование в экономике

**ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ МАЛЫМ КОСМИЧЕСКИМ
АППАРАТОМ МЕТОДОМ ФУРЬЕ-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В
РАМКАХ ПОЛНОЙ МОДЕЛИ**

(магистерская диссертация)

Студент:

Суслов Кирилл Сергеевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Широбоков Максим Геннадьевич,
канд. физ.-мат. наук

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2022

Аннотация

В задачах оптимизации управления космическим аппаратом орбитальное движение зачастую описывается ограниченной задачей двух тел с возмущением. Уравнения этой задачи не имеют аналитического решения в общем виде, из-за чего их необходимо многократно интегрировать численно. Одним из способов анализа эволюции систем уравнений в среднем является метод усреднения. Представляет интерес получение усреднённых уравнений движения, которые имеют точное решение, чтобы использовать его в задачах оптимизации.

В работе представлен процесс усреднения уравнений движения ограниченной задачи двух тел с возмущением при условии, что возмущающее ускорение представимо в виде тригонометрического ряда Фурье по истинной долготе с постоянными коэффициентами. Обнаружено, что уравнения усреднённой системы зависят только от 12 коэффициентов рядов Фурье возмущающего ускорения и имеют точное решение. Проведено сравнение точного решения усреднённой системы с численным решением неусреднённой системы для различных начальных условий и функций возмущения. Также точное решение использовано в решении модельной задачи оптимизации выхода на орбиту.

Полученные результаты можно применить в задаче оптимизации управления движением аппарата с двигателем малой тяги. Так как решение усреднённой системы зависит от нескольких параметров, управление можно параметризовать конечным набором переменных. Таким образом задача оптимизации сводится к задаче нелинейного программирования небольшой размерности.

Оглавление

Обозначения и сокращения	4
Введение	5
1. Уравнения движения	8
2. Метод усреднения	12
3. Представление функции возмущающего ускорения и обоснование метода усреднения	16
4. Усреднённые уравнения движения	23
5. Точное решение усреднённой системы	26
6. Сравнение с неусреднённым движением	29
7. Модельная задача оптимизации управления	34
Заключение	40
Список использованных источников	41

Обозначения и сокращения

μ	гравитационный параметр
p, e_x, e_y, i_x, i_y, L	модифицированные равноденственные элементы орбиты
p	фокальный параметр
L	истинная долгота
a	большая полуось
e	эксцентриситет
i	наклонение
Ω	долгота восходящего узла
ω	аргумент перицентра
f_r	радиальная компонента возмущающего ускорения
f_t	трансверсальная компонента возмущающего ускорения
f_b	бинормальная компонента возмущающего ускорения

Введение

Хорошо известно, что уравнения движения невозмущённой ограниченной задачи двух тел интегрируются в квадратурах [1]. Система уравнений имеет пять независимых первых интегралов. Эволюцию системы можно описать в терминах пяти орбитальных элементов и угловой переменной, явно или неявно зависящей от времени. Орбитальные элементы не зависят от времени, так как являются независимыми интегралами движения, и параметризуют кривую, по которой движется тело. В качестве угловой переменной может выступать истинная, эксцентрическая или средняя аномалия, а также истинная долгота.

На практике на тело помимо центрального ньютонова поля действуют различные возмущения. В роли возмущения могут выступать силы притяжения других тел, ускорения, связанные с несферичностью центрального тела, радиационное давление, давление атмосферы или управляющее ускорение. Наличие возмущающих ускорений как правило приводит к тому, что орбитальные элементы становятся зависимыми от времени, а уравнения движения не имеют точного решения¹. Исследование движения производится как правило численными методами или широко зарекомендовавшими себя приближенными методами, в частности, методами усреднения. В немногих случаях возмущений известны асимптотические и точные решения. Среди подобных результатов отметим асимптотическое решение для случая постоянного касательного [2] ускорения, а также точные решения для случаев постоянного радиального [3] ускорения и постоянного по модулю ускорения вдоль фиксированного вектора в евклидовой системе координат [4].

Точные и приближенные решения дифференциальных уравнений движения космического аппарата позволяют глубоко изучать свойства динами-

¹Здесь и далее в тексте под точным решением понимается решение, представленное явно в виде конечного выражения, содержащего только элементарные функции и операции.

ки, проводить параметрический анализ, а также синтезировать управление. Трудно переоценить помощь приближенных методов в анализе движения аппарата в сложном поле [5] и решении задач оптимального управления [6, 7]. Так, в задачах оптимального перелета с малой тягой между орбитами в случаях большого количества витков нелинейные уравнения принципа максимума Понтрягина чувствительны к начальному приближению сопряженных переменных, но построение управления для усредненных уравнений движения практически нивелирует эту проблему. Также для некоторых случаев функций управляющего ускорения переход к усредненным уравнениям движения позволяет параметризовать влияние управления конечным набором скалярных параметров, что сводит задачу оптимизации к задаче нелинейного программирования небольшой размерности [8, 9].

В задачах оптимального управления интегрирование системы уравнений производится с использованием численных методов, при этом обращение к функции правых частей для сложно устроенного ускорения представляет собой численный расчет определенного интеграла на витке орбиты. Интересуют случаи, когда решение хотя бы усредненной системы представляется в точном виде. Это позволило бы существенно ускорить оптимизацию функции управления и исследовать в явном виде зависимость движения в среднем от параметров управления. Цель данной работы – предложить специальные, но достаточно общие для задач оптимального управления условия, при которых усредненные уравнения движения имеют точное решение.

В работе рассматривается управляющее ускорение, периодическое по угловой переменной, что является естественным приближением в случае, если величина ускорения мала. Также предполагается, что функция управляющего ускорения представима в виде тригонометрического ряда Фурье, что справедливо для большинства физических систем. Сделанные предположения позволяют получить задачу оптимизации, в которой траектория

движения явно зависит от управления, при этом влияние управления на систему характеризуется конечным набором скалярных параметров.

Результаты работы были представлены на устном докладе «Невырожденное Фурье-представление функции управления орбитальным движением космического аппарата для оптимизации перелётов с малой тягой» в рамках 64-й Всероссийской научной конференции Московского физико-технического института (национального исследовательского университета), а также на устном докладе «Точное решение усреднённой возмущённой задачи двух тел» на семинаре отдела №7 «Динамика космических систем» в Институте прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН 24 мая 2022 года.

В первой главе формируется математическая модель движения в центральном ньютоновом поле с возмущением в виде системы дифференциальных уравнений. Во второй главе приводится описание метода усреднения. В третьей главе формулируются условия, накладываемые на возмущающее ускорение. Эти условия позволяют применить метод усреднения и получить систему уравнений, имеющую точное решение. В четвёртой главе рассматривается процесс применения метода усреднения к исходной системе, приводящий к уравнениям, имеющим точное решение. В пятой главе представлен процесс получения точного решения полученной усреднённой системы уравнений. В шестой главе приводится демонстрация результатов сравнения решений усреднённой и исходной систем уравнений для различных начальных орбит и случаев возмущений с целью показать границы применимости метода. В седьмой главе рассмотрена модельная задача оптимизации выхода на целевую орбиту, в решении которой применяется полученное точное решение усреднённой системы уравнений. В последней главе сформулированы полученные результаты и описаны планы дальнейшей работы.

1. Уравнения движения

Рассмотрим движение материальной точки конечной массы, на которую действуют сила притяжения центрального ньютонова поля, а также возмущающее ускорение. В инерциальной системе координат, центр которой совпадает с притягивающим центром, уравнения движения запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f},\end{aligned}\tag{1}$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор материальной точки, \mathbf{v} – вектор её скорости, \mathbf{f} – вектор возмущающего ускорения, μ – гравитационный параметр притягивающего центра, а дифференцирование происходит по времени t и обозначается точкой над переменной. Возмущающее ускорение \mathbf{f} , вообще говоря, является функцией переменных движения и времени, т.е. $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

В небесной механике уравнения движения можно записать в различных переменных. В данной работе в качестве переменных движения будем использовать модифицированные равноденственные элементы орбиты: p, e_x, e_y, i_x, i_y, L . Эти переменные обладают двумя преимуществами. Во-первых, они не вырождаются ни для какого движения. Во-вторых, в случае отсутствия возмущающих ускорений первые пять орбитальных элементов являются интегралами движения и потому не зависят от времени. Они параметризуют траекторию, движение по которой описывается дифференциальным уравнением относительно переменной L . Величину p называют фокальным параметром, а величину L – истинной долготой орбиты. Переход между переменными «координата–скорость» и модифицированными равноденственными элементами можно найти, например, в [10]. Ниже представлена зависимость модифицированных равноденственных элементов

от классических элементов орбиты и истинной аномалии, которые чаще используются в классических работах и имеют геометрический смысл.

$$\begin{aligned}
p &= a(1 - e^2), \quad L = \theta + \omega + j\Omega, \\
e_x &= e \cos(\omega + j\Omega), \quad e_y = e \sin(\omega + j\Omega), \\
i_x &= \left(\operatorname{tg}\frac{i}{2}\right)^j j \cos \Omega, \quad i_y = \left(\operatorname{tg}\frac{i}{2}\right)^j \sin \Omega,
\end{aligned} \tag{2}$$

где a – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклонение, Ω – долгота восходящего узла, ω – аргумент перицентра, θ – истинная аномалия. Также здесь введён ретроградный фактор j , который не входит в правые части уравнений движения, а его выбор осуществляется один раз при преобразовании начальных значений классических элементов орбиты в начальные значения равноденственных элементов: в случае, если $0 \leq i(t_0) \leq \pi/2$, то $j = +1$, а если $\pi/2 < i(t_0) \leq \pi$, $j = -1$.

Разложим возмущающее ускорение \mathbf{f} на компоненты в орбитальной системе координат: $\mathbf{f} = f_r \frac{\mathbf{r}}{r} + f_t \frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}}{|\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}|} + f_b \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}$, где f_r – компонента возмущающего ускорения вдоль радиус-вектора материальной точки, f_t – вдоль трансверсали, и f_b – вдоль бинормали. Система (1) запишется в виде

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2p}{\sigma} \cdot f_t, \\
\dot{e}_x &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin L \cdot f_r + \left(\cos L + \frac{e_x + \cos L}{\sigma} \right) \cdot f_t - \frac{e_y \eta}{\sigma} \cdot f_b \right\}, \\
\dot{e}_y &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\cos L \cdot f_r + \left(\sin L + \frac{e_y + \sin L}{\sigma} \right) \cdot f_t + \frac{e_x \eta}{\sigma} \cdot f_b \right\}, \\
\dot{i}_x &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2\sigma} \cos L \cdot f_b, \\
\dot{i}_y &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2\sigma} \sin L \cdot f_b, \\
\dot{L} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sigma^2}{p} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\eta}{\sigma} \cdot f_b,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\sigma = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L$, $\eta = i_x \sin L - i_y \cos L$.

Обратим внимание на то, что в уравнениях (3) в знаменателе присутствует величина σ , что может приводить к вырождению правых частей. Сформулируем условие, при котором уравнения не будут вырождаться. Выразим σ через классические элементы орбиты:

$$\sigma = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L = 1 + e \cos \theta. \quad (4)$$

Получим, что только в случае ограниченного движения, что эквивалентно выполнению условия $e < 1$, уравнения (3) не вырождаются. Далее будем считать, что всегда $e < 1$.

Для упрощения выражений в правых частях уравнений перейдём от физического времени t к новой независимой переменной τ , связанной с t соотношением

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{p}{\mu}}. \quad (5)$$

Для существования биекции между t и τ необходимо и достаточно, чтобы производная была знакоопределённой. Для этого достаточно, чтобы величина σ была знакоопределена, что, как было показано выше, эквивалентно выполнению условия $e < 1$. Производную по переменной τ будем обозначать штрихом. Уравнения системы (3) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
p' &= 2p \cdot f_t, \\
e'_x &= \sigma \sin L \cdot f_r + (e_x + (1 + \sigma) \cos L) \cdot f_t - e_y \eta \cdot f_b, \\
e'_y &= -\sigma \cos L \cdot f_r + (e_y + (1 + \sigma) \sin L) \cdot f_t + e_x \eta \cdot f_b, \\
i'_x &= \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2} \cos L \cdot f_b, \\
i'_y &= \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2} \sin L \cdot f_b, \\
L' &= \frac{\mu \sigma^3}{p^2} + \eta \cdot f_b.
\end{aligned} \tag{6}$$

Итак, получена система дифференциальных уравнений, исследованию которой посвящена данная работа. Анализ уравнений проводится с помощью метода усреднения, и далее представлено его описание.

2. Метод усреднения

Как уже было сказано ранее, в случае, когда возмущающее ускорение отсутствует, переменные p , e_x , e_y , i_x , i_y не меняются во времени. Если же возмущение достаточно мало, скорость их изменения, пропорциональная величине возмущения, также будет мала. При этом скорость изменения переменной L , вообще говоря, не будет малой величиной, так как в правой части дифференциального уравнения на L в (6) присутствует слагаемое, не зависящее от величины возмущения. В случаях, когда движение системы разделяется на медленное и быстрое, оказывается эффективным такой инструмент теории возмущения, как метод усреднения.

Кратко опишем идею метода усреднения, подробно рассмотренного, например, в статье В. М. Волосова [11]. Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, y, \tau, \varepsilon), \\ y' &= Y(\mathbf{x}, y, \tau, \varepsilon) \equiv Y_0(\mathbf{x}, y, \tau) + \varepsilon Y_1(\mathbf{x}, y, \tau, \varepsilon), \end{aligned} \tag{7}$$

и начальными условиями

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau_0) &= \mathbf{x}_0, \\ y(\tau_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$. Если $\varepsilon = 0$, то система (7) переходит в систему

$$\mathbf{x} = \text{const}, \quad y' = Y_0(\mathbf{x}, y, \tau). \tag{9}$$

Эта система называется порождающей. Обозначим её общее решение как $\varphi(\mathbf{x}, \tau; y_0, \tau_0)$. Заметим, что эта функция также является интегральной кривой системы (7).

Если же ε мало, переменные \mathbf{x} являются медленно меняющимися, так как $\mathbf{x}' \sim \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а переменная y является быстро меняющейся, так как $y' \sim 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Пусть влияние изменения быстрой переменной y на скорость изменения медленных переменных \mathbf{x} можно усреднить на большом промежутке времени, т.е. существует временное среднее правых частей дифференциальных уравнений на \mathbf{x} вдоль интегральных кривых. Иными словами, допустим, что существует предел

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}, y_0, \tau_0, \tau), \tau, 0) d\tau. \quad (10)$$

Обратим внимание на то, что в случае, если функция $\mathbf{X}(\mathbf{x}, y)$ является периодической по y , интеграл в (10) равен интегралу по периоду T_y функции $\mathbf{X}(\mathbf{x}, y)$, и

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = \frac{1}{T_y} \int_0^{T_y} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}, y_0, \tau_0, \tau), \tau, 0) d\tau. \quad (11)$$

Ставится вопрос о близости решения системы (7), которую называют возмущённой, и решения системы

$$\bar{\mathbf{x}}' = \varepsilon \bar{\mathbf{X}}_1(\bar{\mathbf{x}}), \quad (12)$$

которую называют усреднённой системой, при условии, что $\bar{\mathbf{x}}(\tau_0) = \mathbf{x}(\tau_0) = \mathbf{x}_0$. Функция $\bar{\mathbf{X}}_1$, вообще говоря, зависит от переменных \mathbf{x} и начальных значений y_0 и τ_0 , однако можно показать, что этот случай сводится к случаю, когда предельная функция зависит только от \mathbf{x} [11].

Вопрос о близости решений систем (7) и (12) исследовался во многих работах [11–20]. Н.Н. Боголюбовым [12] исследовались так называемые стандартные системы, где в качестве быстрой переменной выступает независимая переменная, что делает эту задачу частным случаем описанной выше. Для такой постановки была сформулирована теорема Боголюбова

об усреднении. В работах Митропольского [13], Понтрягина [14] и других авторов [15–17] рассматривались более общие случаи систем. Система наиболее общего вида была рассмотрена в работах В.М. Волосова [11, 18–20]. В них были сформулированы условия, при которых на интервале времени $\tau - \tau_0 \sim 1/\varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, при достаточно малых ε решения усреднённой системы (12) в общем случае аппроксимируют решения возмущённой системы (7) с точностью ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Эти условия выражены в виде теоремы, приведённой ниже.

Теорема.

Пусть $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $(\mathbf{x}, y, \tau) \in G$, где G – открытая область пространства (\mathbf{x}, y, τ) . Сравниваются решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, y_0, \tau_0, t, \varepsilon)$, $y = y(\mathbf{x}_0, y_0, \tau_0, t, \varepsilon)$ системы (7) и $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \tau_0, t, \varepsilon)$ системы (12) с общей фиксированной начальной точкой $\mathbf{x}_0, y_0, \tau_0 \in G$.

Пусть также:

- 1) \mathbf{X}, Y непрерывны по ε равномерно относительно $\mathbf{x}, y, \tau, \varepsilon$.
- 2) $\mathbf{X}_1 \equiv \mathbf{X}|_{\varepsilon=0}$, $Y_0 \equiv Y|_{\varepsilon=0}$ непрерывны, удовлетворяют по \mathbf{x} условию Липшица; \mathbf{X}_1 – непрерывно дифференцируема по y ; $|\partial \mathbf{X} / \partial y| \leq \text{const} < \infty$.
- 3) Через каждую точку G проходит единственная интегральная кривая системы (9), лежащая в G при $\tau_0 \leq \tau < \infty$, продолжаемая для $\tau \leq \tau_0$ до границы G или до $\tau > -\infty$.
- 4) Функция $\varphi(\mathbf{x}, \tau; y_0, \tau_0)$ непрерывна, непрерывно дифференцируема по y_0, τ_0 ; $|\partial \varphi / \partial y_0|, |\partial \varphi / \partial \tau_0| \leq \text{const} < \infty$; $(\partial \varphi / \partial y_0)^2 + (\partial \varphi / \partial \tau_0)^2 \geq \sigma > 0$.
- 5) В G лежит многообразие M , заданное параметрически: $\mathbf{x} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}), y = b(\boldsymbol{\lambda}), \tau = c(\boldsymbol{\lambda})$ ($\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}\} \in \Lambda$, Λ – открытая область). $\mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}), b(\boldsymbol{\lambda}), c(\boldsymbol{\lambda})$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы; $|\partial \mathbf{a} / \partial \boldsymbol{\lambda}|, |\partial b / \partial \boldsymbol{\lambda}|, |\partial c / \partial \boldsymbol{\lambda}| \leq \text{const} < \infty, \sum_{i=1}^{n+2} A_i^2 \geq \sigma > 0$; A_i – миноры $(n+1)$ -го порядка матрицы $\|\partial \mathbf{a} / \partial \boldsymbol{\lambda}; \partial b / \partial \boldsymbol{\lambda}; \partial c / \partial \boldsymbol{\lambda}\|$.
- 6) Абсолютные величины углов пересечения кривых $\varphi(\mathbf{x}, \tau; y_0, \tau_0)$ с M ограничены снизу положительным числом.

7) В G всякая кривая $\varphi(\mathbf{x}, \tau; y_0, \tau_0)$ пересекает M . Если точка пересечения не единственна, то проекции кривой $\varphi(\mathbf{x}, \tau; y_0, \tau_0)$ и M в пространстве \mathbf{x}, y пересекаются не более одного раза, в окрестности кривой $\partial\mathbf{X}/\partial\tau|_{\varepsilon=0} \equiv \partial Y_0/\partial\tau \equiv 0, |Y_0| \neq 0$.

8) Равномерно относительно $\mathbf{x}_0, y_0, \tau_0 \in G$ существует предел (10). $\bar{\mathbf{X}}_1$ ограничена, удовлетворяет условию Липшица, $|\mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{X}}_1| \leq \text{const} < \infty$; производные от $\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \mathbf{X}_1(\mathbf{x}, \varphi, \tau) d\tau$ по y_0, τ_0 ($0 \leq T < \infty$) равномерно ограничены.

9) Для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ существуют открытые ограниченные подобласти $G_0(\varepsilon) \subseteq G$, содержащие $\mathbf{x}_0, y_0, \tau_0$ вместе с некоторой ρ -окрестностью ($\rho = \text{const} > 0$). Время перехода кривой $\varphi(\mathbf{x}, \tau; y_0, \tau_0)$ от любой точки G_0 до ближайшей по времени точки пересечения с M не превосходит по абсолютной величине K/ε ($K = \text{const} > 0$).

10) Для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ существуют открытые подобласти $G_1(\varepsilon) \subset G_0$, содержащие $\mathbf{x}_0, y_0, \tau_0$; расстояния от точек G_1 до границы G_0 ограничены снизу положительным числом. Введём интервал $[\tau_0, \tau_1(\varepsilon)] : \tau_1 > \tau_0, \tau_1 - \tau_0 \leq K/\varepsilon$; при $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$ решения $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, y_0, \tau_0, \tau, \varepsilon), y(\mathbf{x}_0, y_0, \tau_0, \tau, \varepsilon)$ не выходят из G_1 .

Тогда для любых $K > 0, \delta > 0$ существует такое $\varepsilon_1 > 0$ ($\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$), что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \tau \in [\tau_0, \tau_1(\varepsilon)]$ $\bar{\mathbf{x}}$ не выходит из G и $|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}| \leq \delta$.

Как видно из условий теоремы, правые части системы уравнений (7) должны обладать большим набором неочевидных свойств, наличие которых во многом зависит от функций возмущающих ускорений. В следующей главе предлагаются условия, налагаемые на компоненты возмущающего ускорения, которые позволяют применить метод усреднения к уравнениям движения (15) таким образом, чтобы существовало точное решение усреднённых уравнений движения.

3. Представление функции возмущающего ускорения и обоснование метода усреднения

Исходя из уравнений движения (6) в качестве медленно меняющихся выступают переменные p , e_x , e_y , i_x и i_y , а в качестве быстро меняющейся – переменная L . Для удобства объединим медленные переменные в вектор $\mathbf{I} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y)^T$. В качестве малого параметра естественно взять величину, равную отношению максимального возмущающего ускорения на исследуемом отрезке времени к ускорению силы притяжения центрального ньютонова поля в начальный момент времени.

$$\varepsilon = \frac{\max_{\tau \in [\tau_0, \tau_0 + T_f]} f(\mathbf{I}(\tau), L(\tau), \tau)}{(1 - e(\tau_0))^2 \mu / p^2(\tau_0)}, \quad (13)$$

где T_f - время, на котором необходимо исследовать динамику системы. Величина ε – константа при заданных функциях возмущающего ускорения и начальных условиях системы (6). Вынесем множитель ε из функций f_r, f_t, f_b , перейдя к новым функциям возмущающего ускорения ξ_r, ξ_t, ξ_b по формулам

$$\begin{aligned} f_r(\mathbf{I}(\tau), L(\tau), \tau) &= \varepsilon \cdot \xi_r(\mathbf{I}(\tau), L(\tau), \tau), \\ f_t(\mathbf{I}(\tau), L(\tau), \tau) &= \varepsilon \cdot \xi_t(\mathbf{I}(\tau), L(\tau), \tau), \\ f_b(\mathbf{I}(\tau), L(\tau), \tau) &= \varepsilon \cdot \xi_b(\mathbf{I}(\tau), L(\tau), \tau), \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения движения (6) переписутся в виде

$$\begin{aligned}
p' &= \varepsilon \cdot 2p \cdot \xi_t, \\
e'_x &= \varepsilon \cdot (\sigma \sin L \cdot \xi_r + (e_x + (1 + \sigma) \cos L) \cdot \xi_t - e_y \eta \cdot \xi_b), \\
e'_y &= \varepsilon \cdot (-\sigma \cos L \cdot \xi_r + (e_y + (1 + \sigma) \sin L) \cdot \xi_t + e_x \eta \cdot \xi_b), \\
i'_x &= \varepsilon \cdot \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2} \cos L \cdot \xi_b, \\
i'_y &= \varepsilon \cdot \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2} \sin L \cdot \xi_b, \\
L' &= \frac{\mu \sigma^3}{p^2} + \varepsilon \cdot \eta \cdot \xi_b.
\end{aligned} \tag{15}$$

Теперь, когда в правых частях явно присутствует величина ε , видно, что система (15) может быть представлена в виде (7).

Уравнения движения усреднённой системы получаются путём поиска предела (10). Как было сказано в главе 2, если правые части возмущённой системы являются периодическими функциями быстро меняющейся переменной, предел заведомо существует. В данной работе рассматривается именно этот случай, т.е. функции ξ_r, ξ_t и ξ_b считаются 2π -периодическими по L . Также потребуем, чтобы эти функции совпадали со своими тригонометрическими рядами Фурье :

$$\begin{aligned}
\xi_r(L) &= \alpha_0^r + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^r \cos kL + \beta_k^r \sin kL), \\
\xi_t(L) &= \alpha_0^t + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^t \cos kL + \beta_k^t \sin kL), \\
\xi_b(L) &= \alpha_0^b + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^b \cos kL + \beta_k^b \sin kL),
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0^r &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_r dL, & \alpha_k^r &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_r \cos(kL) dL, & \beta_k^r &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_r \sin(kL) dL, \\
\alpha_0^t &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_t dL, & \alpha_k^t &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_t \cos(kL) dL, & \beta_k^t &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_t \sin(kL) dL, \\
\alpha_0^b &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_b dL, & \alpha_k^b &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_b \cos(kL) dL, & \beta_k^b &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi_b \sin(kL) dL.
\end{aligned}
\tag{17}$$

Периодичность функций возмущающего ускорения относительно истинной долготы является естественным приближением. Если величина возмущающего ускорения мала, траектория движения материальной точки близка к эллиптической на нескольких витках, и тогда функции возмущающего ускорения на этом отрезке времени близки к периодическим.

Вообще говоря, если ξ_r, ξ_t и ξ_b зависят от переменных p, e_x, e_y, i_x и i_y , коэффициенты $\alpha_k^r, \beta_k^r, \alpha_k^t, \beta_k^t, \alpha_k^b$ и β_k^b также зависят от этих переменных. Однако в данной работе предполагается, что компоненты вектора возмущений зависят только от L , и, следовательно, коэффициенты рядов Фурье являются постоянными величинами. Это приближение также является естественным, если величина возмущения мала, так как в этом случае изменения орбитальных элементов на нескольких витках можно считать незначительным.

Определим, всем ли условиям теоремы удовлетворяет система (15), если учесть, что функции возмущающего ускорения ξ_r, ξ_t и ξ_b обладают свойствами, обозначенными выше, и если нет, то какие свойства движения необходимо добавить.

1) \mathbf{X} не зависит от ε , поэтому для этой функции условие выполняется. Для того, чтобы Y удовлетворяла условию, достаточно, чтобы переменные I были ограничены по модулю, а p при этом была ограничена снизу положительной величиной. Иными словами, $G \subset H, H = \{(I, L, eps, t) | 0 < p_{min} \leq p \leq p_{max} < \infty, |e_x| \leq C, |e_y| \leq C, |i_x| \leq C, |i_y| \leq C, C < \infty\}$.

2) $G \subset H$ достаточно для непрерывности \mathbf{X}_1 и Y_0 и «липшицевости» \mathbf{X}_1 по \mathbf{I} . Дополним представимость функций ξ_r, ξ_t и ξ_b в виде тригонометрических рядов Фурье непрерывной дифференцируемостью по L , что обеспечит непрерывную дифференцируемость \mathbf{X}_1 . Затем, ξ_r, ξ_t и ξ_b ограничены и непрерывно дифференцируемы, значит их производные по L ограничены, что гарантирует ограниченность частных производных \mathbf{X} по L .

3) Условие эквивалентно существованию и единственности решения $\varphi(\mathbf{I}, \tau; L_0, \tau_0)$ задачи Коши, описанного системой (9), для любого $(\mathbf{I}, L_0, \tau_0) \in G$, причём это решение должно быть определено для любого $\tau \in (G_\tau \cup [t_0, +\infty))$. Это условие гарантируется ограниченностью на G , непрерывностью по (\mathbf{I}, L, τ) на G и «липшицевостью» на G правой части уравнения, равной функции Y_0 .

4) Для проверки этого условия заметим, что частная производная правой части уравнения, равной Y_0 , по τ равна нулю, а по L непрерывна. Из этого следует, что φ непрерывна и дифференцируема по L_0 и τ_0 . Далее, выпишем решение системы (9) в квадратурах:

$$\int_{L_0}^{\varphi(\mathbf{I}, \tau, L_0, \tau_0)} \frac{d\phi}{\frac{\mu}{p^2}(1 + e_x \cos \phi + e_y \sin \phi)^3} = \tau - \tau_0 \quad (18)$$

Взяв частные производные по L_0 и τ_0 , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial L_0} &= \left(\frac{1 + e_x \cos \varphi + e_y \sin \varphi}{1 + e_x \cos L_0 + e_y \sin L_0} \right)^3, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_0} &= -\frac{\mu}{p^2}(1 + e_x \cos \varphi + e_y \sin \varphi)^3. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как φ непрерывна, функции справа знаков равенства непрерывны, тогда и функции слева непрерывны. Значит, φ непрерывно дифференцируема по

L_0 и τ_0 . Исходя из выражений (2) получаем оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial L_0} \right| &\leq \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^3 < \infty, \\ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_0} \right| &\leq \frac{\mu}{p^2} (1+e)^3 < \infty, \\ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial L_0} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_0} \right|^2 &\geq \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^3 + \frac{\mu}{p^2} (1-e)^3 > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

5) В качестве гладкого $(n+1)$ -мерного многообразия M можно выбрать, например,

$$\begin{aligned} \lambda_i &= I_i, \quad i = 1, \dots, 5, \\ \lambda_6 &= L. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}) &= (\lambda_1, \dots, \lambda_5)^T, \\ b(\boldsymbol{\lambda}) &= \lambda_6, \\ c(\boldsymbol{\lambda}) &= \tau_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Очевидно, функции $\mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda})$, $b(\boldsymbol{\lambda})$, $c(\boldsymbol{\lambda})$ непрерывны и имеют непрерывные, ограниченные по модулю производные. При этом $\sum_{i=1}^{n+2} A_i^2 = 6 > 0$.

6) При заданной параметризации многообразия M тангенс угла между кривой φ и M равен $(\partial \varphi(\mathbf{I}, \tau, L_0, \tau_0) / \partial \tau)^{-1} \big|_{\tau=\tau_0}$. Так как φ есть решение системы (9), то

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{I}, \tau, L_0, \tau_0)}{\partial \tau} \right)^{-1} \bigg|_{\tau=\tau_0} &= Y_0^{-1} \big|_{L=\varphi(\mathbf{I}, \tau_0, L_0, \tau_0)} = \frac{p^2}{\mu(1+e_x \cos \varphi + e_y \sin \varphi)^3} \geq \\ &\geq \frac{p_{min}^2}{\mu(1+e)^3} > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как тангенс угла больше положительной величины, то и сам угол больше положительной величины.

7) Так как интегральная кривая φ определена на G и единственна для любых \mathbf{I} , L_0 , τ_0 , она пересекает M только в одной точке.

8) Функция $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}|_{\varepsilon=0}$ является 2π -периодической по L , при этом решение φ системы (9) является строго монотонно возрастающей функцией τ , определённой для любого $\tau \in (G_\tau \cup [t_0, +\infty))$. Исходя из этих свойств (10) можно заменить на (11), и тогда $\overline{\mathbf{X}}_1(\overline{\mathbf{I}})$ существует и при этом не зависит от \mathbf{I}_0 , L_0 , τ_0 . Получение явного выражения для функции $\overline{\mathbf{X}}_1(\overline{\mathbf{I}})$ представлено в главе 2, где показано, что она является ограниченной и гладкой функцией на G . Так как $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}|_{\varepsilon=0}$ также ограничена на G , $|\mathbf{X}_1 - \overline{\mathbf{X}}_1| \leq \text{const} < \infty$. Далее, взяв частную производную по \mathbf{I}_0 , получим

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \mathbf{X}_1(\mathbf{x}, \varphi, \tau) d\tau}{\partial \tau_0} = \\ &= \mathbf{X}_1(\mathbf{I}, \varphi(\mathbf{I}, \tau_0 + T, L_0, \tau_0), \tau_0 + T) \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{I}, \tau, L_0, \tau_0)}{\partial \tau_0} \Big|_{\tau=\tau_0+T} \right) - \\ &- \mathbf{X}_1(\mathbf{I}, \varphi(\mathbf{I}, \tau_0, L_0, \tau_0), \tau_0) \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{I}, \tau, L_0, \tau_0)}{\partial \tau_0} \Big|_{\tau=\tau_0} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Функции \mathbf{X}_1 , $\partial\varphi/\partial\tau_0$ ограничены, значит и искомая частная производная ограничена. Для оценки частной производной по L_0 заменим интегрирование по τ на интегрирование по L , что справедливо в силу строгой монотонности L по τ .

$$\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \mathbf{X}_1(\mathbf{x}, \varphi, \tau) d\tau = \int_{L_0}^{\varphi(\mathbf{I}, \tau_0+T, L_0, \tau_0)} \mathbf{X}_1(\mathbf{x}, L) (L'(\mathbf{I}, L))^{-1} dL \quad (25)$$

Также здесь учтён тот факт, что \mathbf{X}_1 не зависит от τ в силу уравнений (15).

Взяв частную производную по L_0 , получим

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \int_{L_0}^{\varphi(\mathbf{I}, \tau_0+T, L_0, \tau_0)} \mathbf{X}_1(\mathbf{x}, L) (L'(\mathbf{I}, L))^{-1} dL}{\partial L_0} = \\
&= \frac{\mathbf{X}_1(\mathbf{I}, \varphi(\mathbf{I}, \tau_0+T, L_0, \tau_0), \tau_0+T)}{L'(\mathbf{I}, \varphi(\mathbf{I}, \tau_0+T, L_0, \tau_0))} \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{I}, \tau, L_0, \tau_0)}{\partial L_0} \Big|_{\tau=\tau_0+T} \right) - \\
&- \frac{\mathbf{X}_1(\mathbf{I}, \varphi(\mathbf{I}, \tau_0, L_0, \tau_0), \tau_0)}{L'(\mathbf{I}, L_0)}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Функции \mathbf{X}_1 , L' , $\partial\varphi/\partial L_0$ ограничены, а L' при этом отделена от нуля положительной величиной, значит и искомая частная производная ограничена.

9) В качестве подобласти $G_0(\varepsilon)$ выберем множество $\{(\mathbf{I}, L, \tau) \in G : |\tau - \tau_0| < \frac{K}{\varepsilon}, |L - L_0| < \frac{\mu(1+e_{max})^3 K}{p_{min}^2 \varepsilon}\}$. Из определения следует, что $G_0(\varepsilon) \subseteq G$. При этом $G_0(\varepsilon)$ является открытой областью, поэтому существует ρ -окрестность точки $(\mathbf{I}_0, L_0, \tau_0)$, где $\rho = \text{const} > 0$.

10) Так как $G_0(\varepsilon)$ содержит в себе $U_\rho(\mathbf{I}_0, L_0, \tau_0)$, $\rho = \text{const} > 0$, в качестве $G_1(\varepsilon)$ можно выбрать $U_{\rho/2}(\mathbf{I}_0, L_0, \tau_0)$. Тогда расстояние от точек $G_1(\varepsilon)$ до границы $G_0(\varepsilon)$ будет не меньше $\rho/2 = \text{const} > 0$. Пусть

$$\tau_1 = \tau_0 + \min \left\{ \frac{K}{\varepsilon}, \frac{\rho}{2} \left(1 + \max_{G_1(\varepsilon)}(dL/d\tau)^2 + \sum_{i=1}^5 \max_{G_1(\varepsilon)}(dI_i/d\tau)^2 \right)^{-1/2} \right\} \tag{27}$$

Так как производные в (15) ограничены, для любого $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$ $\tau_1 \leq K/\varepsilon$ верно и решения $(\mathbf{I}(\mathbf{I}_0, L_0, \tau_0; \tau, \varepsilon), L(\mathbf{I}_0, L_0, \tau_0; \tau, \varepsilon))$ лежат в $G_1(\varepsilon)$.

Итак, для выполнения условий теоремы достаточно, чтобы на исследуемом отрезке времени траектория движения была ограничена, а компоненты возмущающего ускорения были непрерывно дифференцируемыми 2π -периодическими функциями переменной L , представимыми в виде своих тригонометрических рядов Фурье, причём коэффициенты этих рядов являлись постоянными во времени величинами. Теперь, когда все условия теоремы удовлетворены, можно приступить к усреднению системы (15).

4. Усреднённые уравнения движения

Введём усреднённые переменные \bar{p} , \bar{e}_x , \bar{e}_y , \bar{i}_x , \bar{i}_y и проведём усреднение системы (15) по быстро меняющейся переменной L . Так как правые части уравнений являются 2π -периодическими функциями по быстрой переменной L , (11) справедливо и:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p'(\bar{p}, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{i}_x, \bar{i}_y, L) dL, \\
 \bar{e}_x' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e'_x(\bar{p}, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{i}_x, \bar{i}_y, L) dL, \\
 \bar{e}_y' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e'_y(\bar{p}, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{i}_x, \bar{i}_y, L) dL, \\
 \bar{i}_x' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i'_x(\bar{p}, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{i}_x, \bar{i}_y, L) dL, \\
 \bar{i}_y' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i'_y(\bar{p}, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{i}_x, \bar{i}_y, L) dL.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Учитывая представление функции возмущающего ускорения в виде рядов Фурье (16) и (17), получаем

$$\bar{p}' = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\bar{p}\xi_t(L) dL = \varepsilon \cdot 2\bar{p}\alpha_0^t, \tag{29}$$

$$\bar{i}_x' = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_b \frac{1 + \bar{i}_x^{-2} + \bar{i}_y^{-2}}{2} \cos L dL = \varepsilon \cdot \frac{1 + \bar{i}_x^{-2} + \bar{i}_y^{-2}}{2} \frac{\alpha_1^b}{2}, \tag{30}$$

$$\bar{i}_y' = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_b \frac{1 + \bar{i}_x^{-2} + \bar{i}_y^{-2}}{2} \sin L dL = \varepsilon \cdot \frac{1 + \bar{i}_x^{-2} + \bar{i}_y^{-2}}{2} \frac{\beta_1^b}{2}. \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\bar{e}_x' &= \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \xi_r(L) \sigma(L) \sin L + \xi_t(L) (\bar{e}_x + (1 + \sigma(L)) \cos L) - \xi_b(L) \bar{e}_y \eta(L) \} dL = \\
&= \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_r(L) \left(\sin L + \frac{1}{2} \bar{e}_x \sin 2L + \bar{e}_y \sin^2 L \right) dL + \\
&+ \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_t(L) \left(2 \cos L + \bar{e}_x \cos^2 L + \frac{1}{2} \bar{e}_y \sin 2L + \bar{e}_x \right) dL - \\
&- \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_b(L) (\bar{e}_y (\bar{i}_x \sin L - \bar{i}_y \cos L)) dL = \\
&= \varepsilon \left(\bar{e}_x \frac{6\alpha_0^t + \alpha_2^t + \beta_2^r}{4} + \bar{e}_y \frac{\beta_2^t - \alpha_2^r + 2\alpha_0^r - 2(\bar{i}_x \beta_1^b - \bar{i}_y \alpha_1^b)}{4} + \frac{\beta_1^r}{2} + \alpha_1^t \right), \tag{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{e}_y' &= \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \xi_t(L) (\bar{e}_y + (1 + \sigma(L)) \sin L) - \xi_r(L) \sigma(L) \cos L + \xi_b(L) \bar{e}_x \eta(L) \} dL = \\
&= -\varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_r(L) \left(\cos L + \bar{e}_x \cos^2 L + \frac{1}{2} \bar{e}_y \sin 2L \right) dl + \\
&+ \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_t(L) \left(2 \sin L + \frac{1}{2} \bar{e}_x \sin 2L + \bar{e}_y \sin^2 L + \bar{e}_y \right) dL + \\
&+ \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_b(L) (\bar{e}_x (\bar{i}_x \sin L - \bar{i}_y \cos L)) dL = \\
&= \varepsilon \left(\bar{e}_x \frac{\beta_2^t - \alpha_2^r - 2\alpha_0^r + 2(\bar{i}_x \beta_1^b - \bar{i}_y \alpha_1^b)}{4} + \bar{e}_y \frac{6\alpha_0^t - \alpha_2^t - \beta_2^r}{4} - \frac{\alpha_1^r}{2} + \beta_1^t \right), \tag{33}
\end{aligned}$$

Выражения (29) – (31) образуют уравнения движения усреднённой системы:

$$\begin{aligned}
\bar{p}' &= \varepsilon \cdot 2\bar{p}\alpha_0^t, \\
\bar{e}_x' &= \varepsilon \cdot \left(\bar{e}_x \frac{6\alpha_0^t + \alpha_2^t + \beta_2^r}{4} + \bar{e}_y \frac{\beta_2^t - \alpha_2^r + 2\alpha_0^r - 2(\bar{i}_x\beta_1^b - \bar{i}_y\alpha_1^b)}{4} + \frac{\beta_1^r}{2} + \alpha_1^t \right), \\
\bar{e}_y' &= \varepsilon \cdot \left(\bar{e}_x \frac{\beta_2^t - \alpha_2^r - 2\alpha_0^r + 2(\bar{i}_x\beta_1^b - \bar{i}_y\alpha_1^b)}{4} + \bar{e}_y \frac{6\alpha_0^t - \alpha_2^t - \beta_2^r}{4} - \frac{\alpha_1^r}{2} + \beta_1^t \right), \\
\bar{i}_x' &= \varepsilon \cdot \frac{1 + \bar{i}_x^{-2} + \bar{i}_y^{-2}}{2} \frac{\alpha_1^b}{2}, \\
\bar{i}_y' &= \varepsilon \cdot \frac{1 + \bar{i}_x^{-2} + \bar{i}_y^{-2}}{2} \frac{\beta_1^b}{2}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Итак, мы получили систему дифференциальных уравнений, которая аппроксимирует систему (15) с точностью ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ при выполнении вышеупомянутых условий. Анализ этой системы позволит получить информацию о динамике системы (15) в среднем на некотором отрезке времени. Усреднённая система (34) является более простой по сравнению с системой (15), так как в ней отсутствует зависимость от истинной долготы L , а уравнения разделяются на независимые системы. В следующей главе проводится анализ и поиск точного решения этой системы.

5. Точное решение усреднённой системы

Приступим к выводу точного решения системы (34). Начнём с уравнения (29), которое имеет тривиальное решение:

$$\bar{p}(\tau) = \bar{p}(\tau_0) \exp(2\varepsilon\alpha_0^t(\tau - \tau_0)). \quad (35)$$

Теперь рассмотрим уравнения (30) и (31). Для начала введём величину

$$k = \beta_1^b \bar{i}_x - \alpha_1^b \bar{i}_y. \quad (36)$$

Если коэффициенты α_1^b и β_1^b ненулевые, то

$$\beta_1^b \bar{i}_x' - \alpha_1^b \bar{i}_y' = 0. \quad (37)$$

Таким образом, мы получаем, что $k = \beta_1^b \bar{i}_x - \alpha_1^b \bar{i}_y$ имеет постоянное значение. Тогда \bar{i}_x может быть выражено через \bar{i}_y и k , а \bar{i}_y – через \bar{i}_x и k . Получившиеся уравнения будут независимы и будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{i}_x' &= \frac{\varepsilon\alpha_1^b}{4} \left(1 + \bar{i}_x^2 + \left(\frac{\beta_1^b \bar{i}_x - k}{\alpha_1^b} \right)^2 \right), \\ \bar{i}_y' &= \frac{\varepsilon\beta_1^b}{4} \left(1 + \bar{i}_x^2 + \left(\frac{\alpha_1^b \bar{i}_x + k}{\beta_1^b} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Решения этих уравнений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{i}_x(\tau) &= \frac{1}{(\alpha_1^b)^2 + (\beta_1^b)^2} \left(\alpha_1^b \rho \operatorname{tg} \left(\gamma + \frac{\varepsilon\rho}{4}(\tau - \tau_0) \right) + \beta_1^b k \right), \\ \bar{i}_y(\tau) &= \frac{1}{(\alpha_1^b)^2 + (\beta_1^b)^2} \left(\beta_1^b \rho \operatorname{tg} \left(\gamma + \frac{\varepsilon\rho}{4}(\tau - \tau_0) \right) - \alpha_1^b k \right), \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha_1^b \bar{i}_x(\tau_0) + \beta_1^b \bar{i}_y(\tau_0)}{\rho}\right), \quad \rho = \sqrt{(\alpha_1^b)^2 + (\beta_1^b)^2 + k^2}. \quad (40)$$

Теперь заметим, что в случае, если коэффициенты α_1^b и β_1^b равны нулю, получаем

$$\begin{aligned} \bar{i}_x(\tau) &= \bar{i}_x(\tau_0) = \operatorname{const}, \quad \alpha_1^b = 0, \\ \bar{i}_y(\tau) &= \bar{i}_y(\tau_0) = \operatorname{const}, \quad \beta_1^b = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

и тогда $k = 0$. В конце рассмотрим случай, когда один из коэффициентов равен нулю, а второй ненулевой. Пусть $\alpha_1^b \neq 0, \beta_1^b = 0$. Тогда $\bar{i}_y(\tau) = \bar{i}_y(\tau_0)$, а уравнение на \bar{i}_x примет вид

$$\bar{i}_x' = \varepsilon \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2(\tau_0)}{2} \frac{\alpha_1^b}{2}. \quad (42)$$

Решение уравнений (30), (31) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{i}_x(\tau) &= \operatorname{tg}\left(\gamma + \frac{\varepsilon\rho}{4}(\tau - \tau_0)\right) \sqrt{1 + (\bar{i}_y(\tau_0))^2}, \\ \bar{i}_y(\tau) &= \bar{i}_y(\tau_0). \end{aligned} \quad (43)$$

Случай $\alpha_1^b = 0, \beta_1^b \neq 0$ очевидно приводит к схожему решению. Заметим, что решение (43) является частным случаем решения (39) при $\alpha_1^b \neq 0, \beta_1^b = 0$. Также получается, что для любых значений α_1^b и β_1^b величина k постоянна во времени, что критично для решения второго и третьего уравнений системы (34). Также это означает, что k – первый интеграл системы (34).

Перейдём к решению уравнений (32), (33). Запишем их в более удобном виде

$$\mathbf{e}' = \varepsilon M \mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{m}, \quad (44)$$

где

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \overline{e_x} \\ \overline{e_y} \end{pmatrix}, \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \alpha_1^t + \frac{\beta_1^r}{2} \\ \beta_1^t - \frac{\alpha_1^r}{2} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} a + b & c + d \\ c - d & a - b \end{pmatrix},$$

$$a = \frac{3\alpha_0^t}{2}, b = \frac{\alpha_2^t + \beta_2^r}{4}, c = \frac{\beta_2^t - \alpha_2^r}{4}, d = \frac{\alpha_0^r - k}{2}.$$

Решение системы (44) имеет вид

$$\mathbf{e}(\tau) = e^{\varepsilon M \tau} (\mathbf{e}(\tau_0) + M^{-1} \mathbf{m}) - M^{-1} \mathbf{m}. \quad (45)$$

Переход от матричной экспоненты к гиперболическим функциям приводит представленное выше решение к виду

$$\mathbf{e}(\tau) = -M^{-1} \mathbf{m} + e^{\varepsilon a (\tau - \tau_0)} (\mathbf{e}(\tau_0) + M^{-1} \mathbf{m}) \operatorname{ch}(\varepsilon (\tau - \tau_0) \sqrt{b^2 + c^2 - d^2}) +$$

$$+ (M - aE) e^{a(\tau - \tau_0)} (\mathbf{e}(\tau_0) + M^{-1} \mathbf{m}) \frac{\operatorname{sh}(\varepsilon (\tau - \tau_0) \sqrt{b^2 + c^2 - d^2})}{\sqrt{b^2 + c^2 - d^2}} \quad (46)$$

Итак, выражения (35), (39), (41), (46) образуют точное решение системы (34). Это решение позволяет явно выписать значения равноденственных элементов орбиты для любого момента времени при заданных коэффициентах Фурье компонент возмущающего ускорения. Как было сказано в предыдущей главе, выражения (35), (39), (41), (46) образуют точное решение системы (34) аппроксимируют неусреднённую систему с точностью ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следующая глава предлагает несколько примеров сравнения точного решения усреднённой задачи с численным решением неусреднённой задачи.

6. Сравнение с неусреднённым движением

В этой главе приведено несколько примеров сравнения точного решения (35), (39), (41), (46) усреднённой системы (34) с численным решением неусреднённой системы (15). Цель данной главы – продемонстрировать поведение решения усреднённой задачи в различных случаях начальных условий и функций возмущающих ускорений.

Для начала рассмотрим возмущение, в разложении которого ненулевыми являются только слагаемые, влияющие на усреднённые уравнения движения (34). Значения коэффициентов $\alpha_0^r, \alpha_1^r, \beta_1^r, \alpha_2^r, \beta_2^r, \alpha_0^t, \alpha_1^t, \beta_1^t, \alpha_2^t, \beta_2^t, \alpha_1^b, \beta_1^b$ выбраны случайно в промежутке от -1 до 1 . На рис. 1 показана зависимость компонент управляющего ускорения от τ .

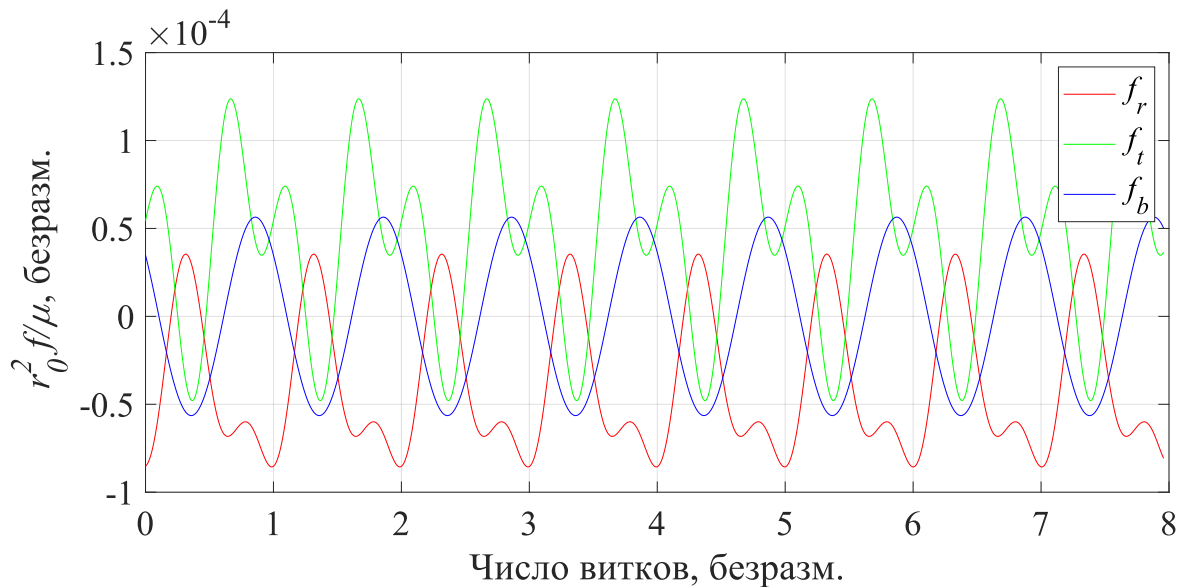


Рисунок 1 – Компоненты управляющего ускорения со случайным спектром с случае, когда ненулевыми являются только 12 коэффициентов Фурье.

На рис. 2 представлены траектории в случае, если компоненты управляющего ускорения имеют вид, представленный на рис. 1, при начальных условиях $p(\tau_0) = 0.99$, $e_x(\tau_0) = 0.0054$, $e_y(\tau_0) = 0.0084$, $i_x(\tau_0) = 0.03$, $i_y(\tau_0) = 0.04$, $L(\tau_0) = 1.785$. Одна траектория получена численным интегрированием неусреднённых уравнений движения ((15)) методом Рунге–Кутты,

другая является точным решением (35), (39), (41), (46) усреднённых уравнений движения. Как можно заметить, траектории близки друг к другу на отрезке времени в несколько витков. При увеличении отрезка времени разность точного решения усреднённой задачи и численного решения неусреднённой задачи по некоторым переменным начинает превышать амплитуду осцилляций.

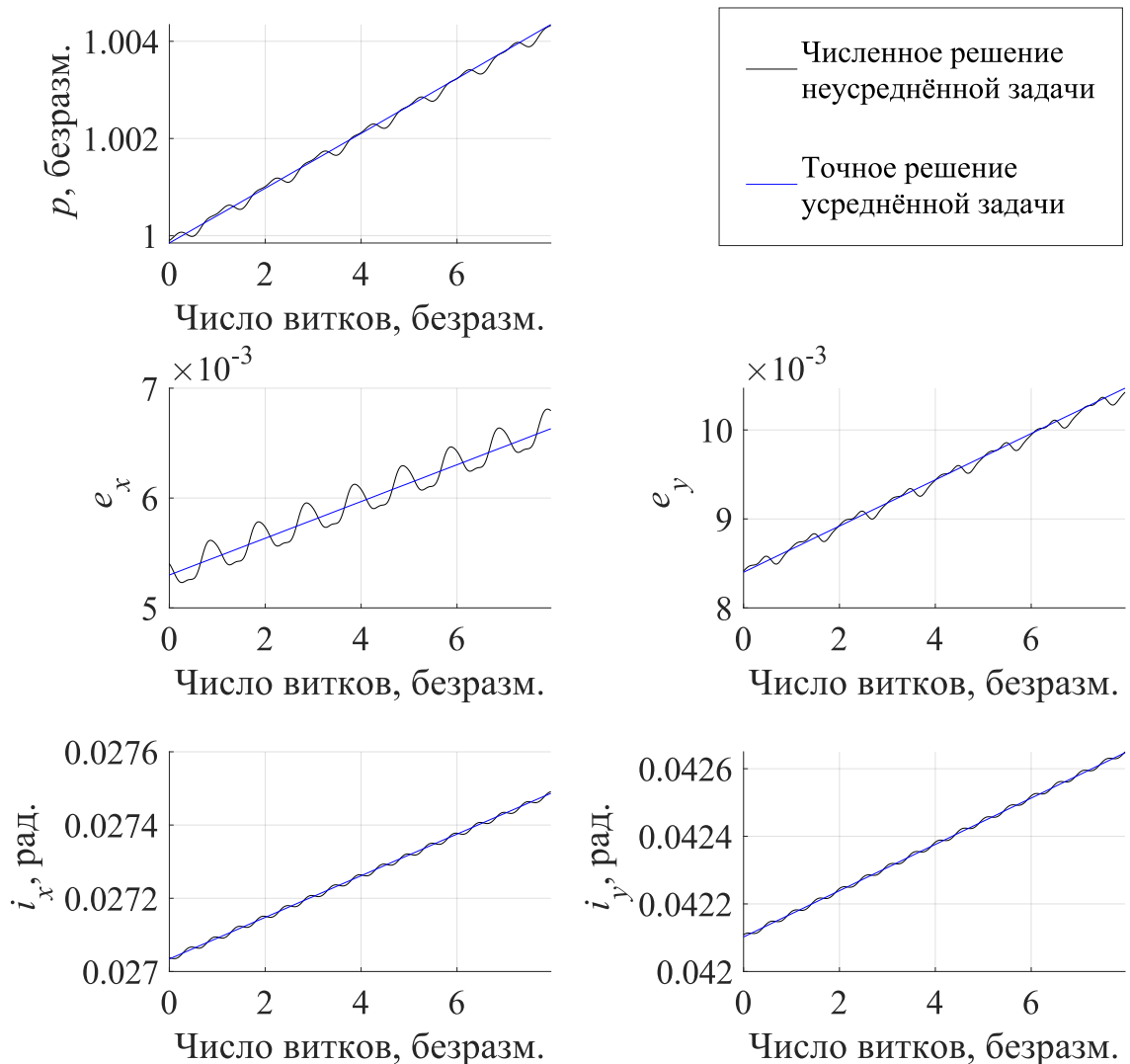


Рисунок 2 – Точное решение усреднённой и численное решение неусреднённой систем уравнений с случае, когда ненулевыми являются только 12 коэффициентов Фурье, спектр возмущения случайный, $p(\tau_0) = 0.99$, $e_x(\tau_0) = 0.0054$, $e_y(\tau_0) = 0.0084$, $i_x(\tau_0) = 0.027$, $i_y(\tau_0) = 0.042$, $L(\tau_0) = 1.785$.

Теперь рассмотрим поведение траекторий для случая высокоэллиптической начальной орбиты (рис. 2). Как можно заметить, скорость, с которой траектории расходятся, увеличилась при увеличении эксцентриситета стартовой орбиты, однако они остаются близки на отрезке времени в один или два витка. Связь близости решений с величиной эксцентриситета требует дальнейшего исследования.

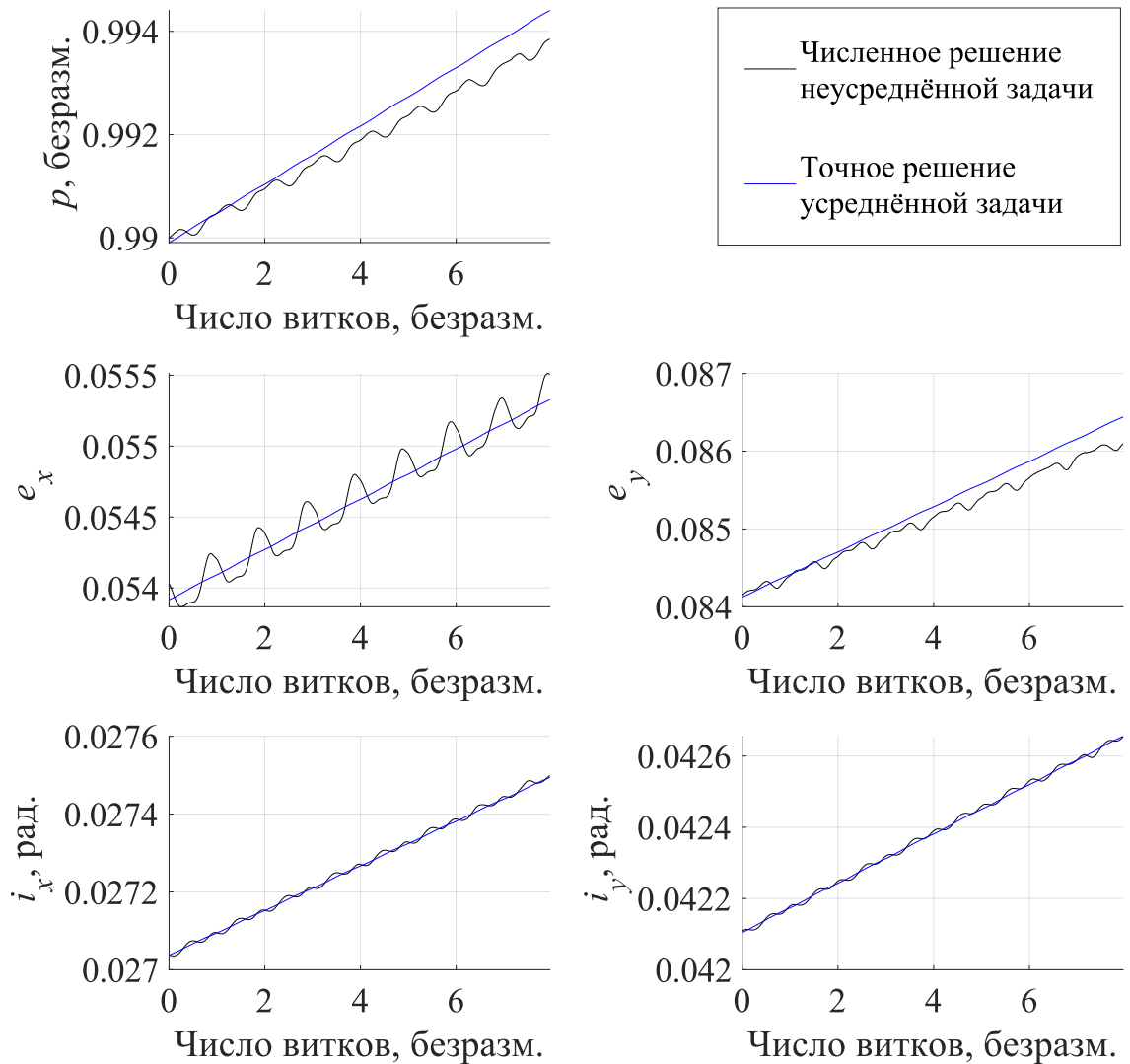


Рисунок 3 – Точное решение усреднённой и численное решение неусреднённой систем уравнений с случае, когда ненулевыми являются только 12 коэффициентов Фурье, спектр возмущения случайный, $p(\tau_0) = 0.99$, $e_x(\tau_0) = 0.054$, $e_y(\tau_0) = 0.084$, $i_x(\tau_0) = 0.027$, $i_y(\tau_0) = 0.042$, $L(\tau_0) = 1.785$.

Также рассмотрен случай, когда спектр управляющего ускорения представлен не только 12 коэффициентами, влияющими на уравнения (34). Будем считать, что коэффициенты Фурье компонент возмущающего ускорения не равны нулю вплоть до пятого порядка. Значения коэффициентов выбраны случайно в промежутке от -1 до 1 . На рис. 4 сравниваются бинормальная компонента такого ускорения и равная ей функция, в которой все коэффициенты Фурье, не влияющие на уравнения (34), приравнены к нулю.

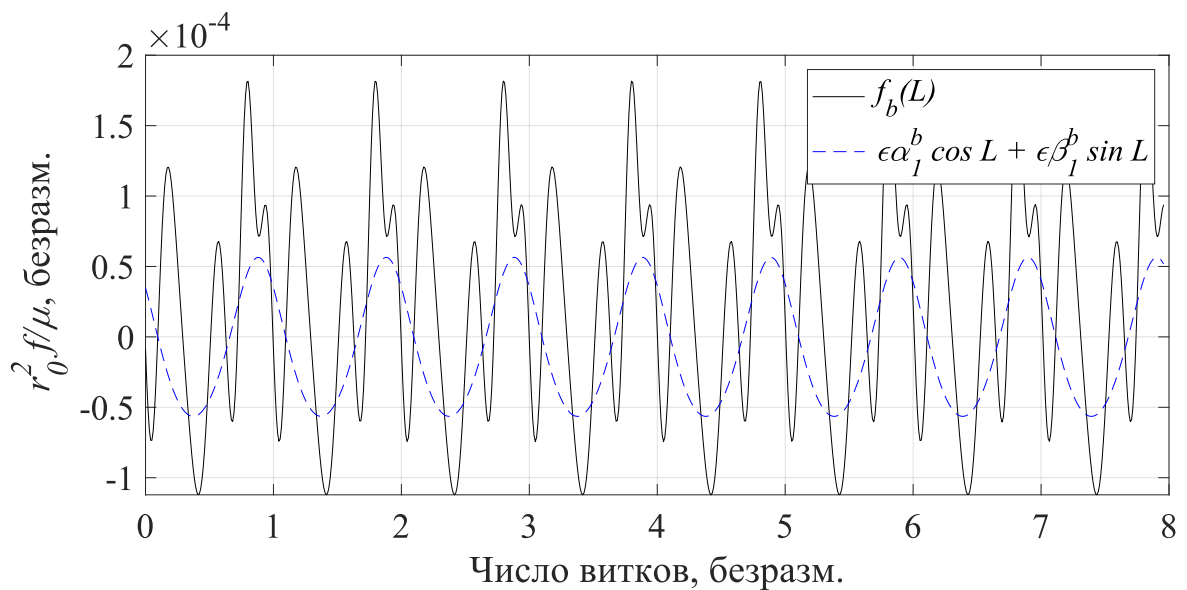


Рисунок 4 – Бинормальная компонента управляющего ускорения со случайным спектром с случае, когда ненулевыми являются коэффициенты Фурье до пятого порядка.

Траектории, полученные в результате приложения вышеописанного возмущения, представлены на рис. 5. Как и в случае, когда ненулевыми являются только двенадцать коэффициентов Фурье, траектории показывают общую вековую динамику на нескольких витках. Можно предположить, что наличие осцилляций высших порядков мало влияет на движение в среднем, если амплитуды этих добавочных осцилляций являются величинами того же порядка. Также важно то обстоятельство, что постоянное ускорение вдоль бинормали, характеризуемое ненулевым коэффициентом α_0^b , не влияет на вековое изменение орбитальных элементов.

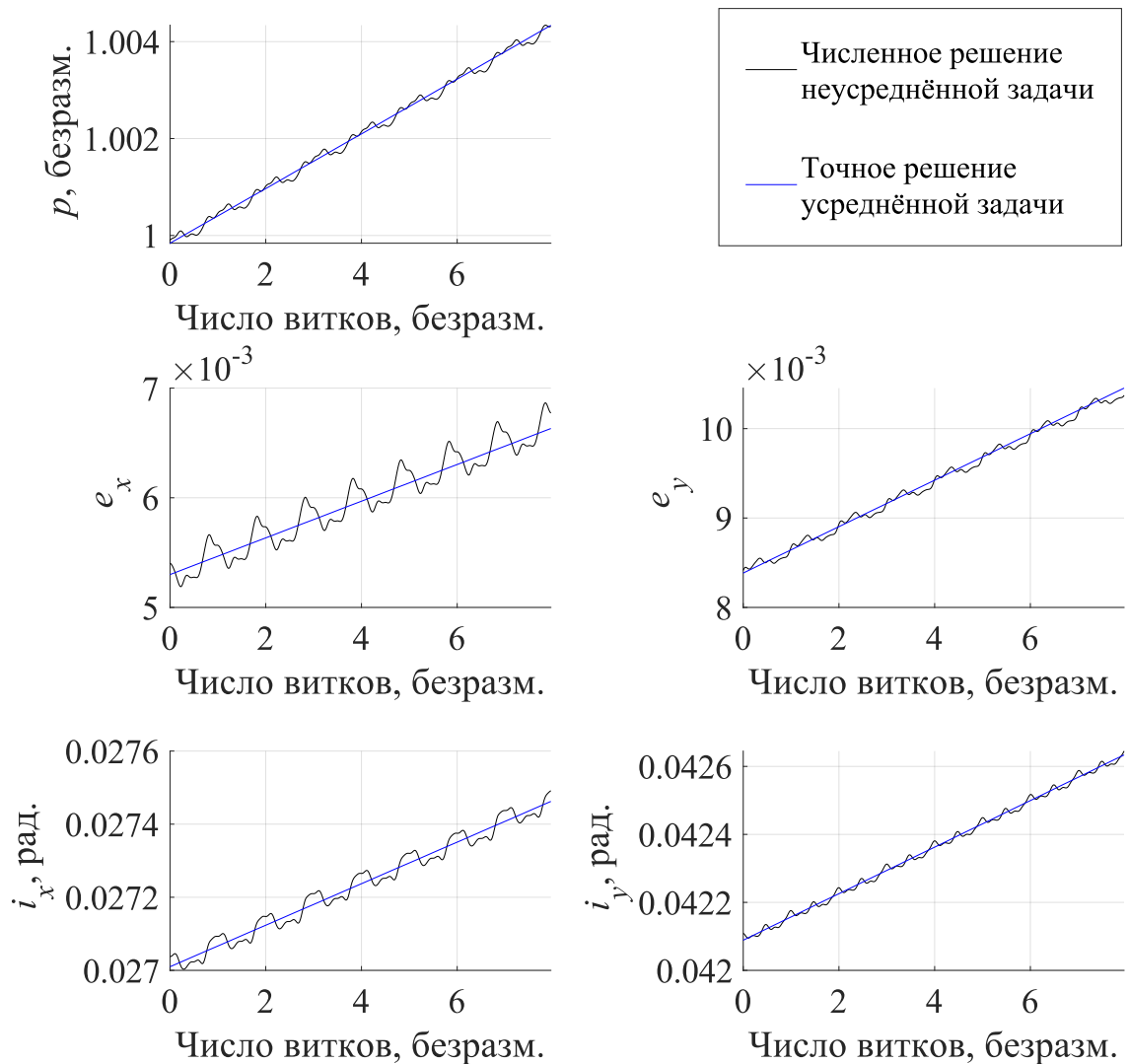


Рисунок 5 – Точное решение усреднённой и численное решение неусреднённой систем уравнений с случае, когда ненулевыми являются коэффициенты Фурье до пятого порядка, спектр возмущения случайный, $p(\tau_0) = 0.99$, $e_x(\tau_0) = 0.0054$, $e_y(\tau_0) = 0.0084$, $i_x(\tau_0) = 0.027$, $i_y(\tau_0) = 0.042$, $L(\tau_0) = 1.785$.

Представленные примеры показывают, что усреднённая и неусреднённая системы демонстрируют близкую вековую динамику. Представляет интерес использовать это свойство в прикладных задачах. В следующей главе рассмотрена модельная задача оптимизации управления, где наличие точного решения усреднённой системы позволяет найти хорошее начальное приближение оптимального управляющего ускорения.

7. Модельная задача оптимизации управления

В этой главе точное решение усреднённых уравнений движения используется в решении модельной задачи оптимизации управления орбитальным движением космического аппарата. Обратим внимание на тот факт, что усреднённые уравнения движения (34) содержат не все коэффициенты Фурье возмущающего ускорения, а только двенадцать: константы $\alpha_0^r, \alpha_1^r, \beta_1^r, \alpha_2^r, \beta_2^r$ характеризуют влияние радиального ускорения, $\alpha_0^t, \alpha_1^t, \beta_1^t, \alpha_2^t, \beta_2^t$ – влияние трансверсального ускорения и α_1^b, β_1^b – бинормального ускорения. Это может помочь в решении задач поиска оптимального управления орбитальным движением космического аппарата. Пусть в качестве возмущения выступает управляющее ускорение, параметризованное своим спектром. Тогда тот факт, что на уравнения влияет конечный набор коэффициентов Фурье, позволяет параметризовать функцию управления двенадцатью параметрами.

Рассмотрим задачу перелёта между двумя кеплеровыми орбитами

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{I}}_0 &= [\bar{p}(\tau_0), \bar{e}_x(\tau_0), \bar{e}_y(\tau_0), \bar{i}_x(\tau_0), \bar{i}_y(\tau_0)]^T, \\ \bar{\mathbf{I}}_f &= [\bar{p}(\tau_f), \bar{e}_x(\tau_f), \bar{e}_y(\tau_f), \bar{i}_x(\tau_f), \bar{i}_y(\tau_f)]^T\end{aligned}\tag{47}$$

за конечное время $\tau_f - \tau_0$. Зависимость $\bar{\mathbf{I}}$ от τ описывается уравнениями (35), (39), (41), (46). Пусть функция управления определяется двенадцатью коэффициентами рядов Фурье компонент управляющего ускорения. Остальные коэффициенты рядов (16), (17) будем считать равными нулю, так как они не влияют на (34). Тогда

$$\begin{aligned}
\xi_r(L) &= \alpha_0^r + \alpha_1^r \cos L + \beta_1^r \sin L + \alpha_2^r \cos 2L + \beta_2^r \sin 2L, \\
\xi_t(L) &= \alpha_0^t + \alpha_1^t \cos L + \beta_1^t \sin L + \alpha_2^t \cos 2L + \beta_2^t \sin 2L, \\
\xi_b(L) &= \alpha_1^b \cos L + \beta_1^b \sin L,
\end{aligned} \tag{48}$$

В качестве оптимизируемого функционала возьмём

$$\begin{aligned}
J(\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}^2(L) dL = \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi_r^2(L) + \xi_t^2(L) + \xi_b^2(L)) dL = \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2} (\boldsymbol{\alpha}^2 + (\alpha_0^r)^2 + (\alpha_0^t)^2),
\end{aligned} \tag{49}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_0^r, \alpha_1^r, \beta_1^r, \alpha_2^r, \beta_2^r, \alpha_0^t, \alpha_1^t, \beta_1^t, \alpha_2^t, \beta_2^t, \alpha_1^b, \beta_1^b]^T$ – вектор коэффициентов, параметризующий управление. Данный функционал имеет следующий физический смысл: в случае идеально регулируемой тяги его минимум совпадает с минимумом затраченной энергии на одном витке перелётной траектории. Такое приближение тяги двигателей является, вообще говоря, нефизичным, так как подразумевает потенциально бесконечное управляющее ускорение, однако это позволяет использовать квадратичный функционал $J(\boldsymbol{\alpha})$.

Итак, рассмотрим задачу минимизации функционала $J(\boldsymbol{\alpha}) \rightarrow \min$ при наличии ограничений типа равенства, описываемых уравнениями (35), (39), (41), (46) относительно $\boldsymbol{\alpha}$. В качестве начального приближения берётся $\boldsymbol{\alpha} = 0$. Данная задача решалась средствами пакета прикладных программ MATLAB R2018b, а именно с помощью функции `fmincon`, реализующей решение задачи оптимизации функционала с различными ограничениями методом внутренней точки. Параметры стартовой и целевой орбит и соответствующие им значения равноденственных элементов орбит указаны в табл. 1 и 2. Перелёт выполняется за время, равное двадцати периодам стартовой орбиты.

Таблица 1 – Классические элементы начальной и целевой орбит.

τ , безразм. ед.	a , безразм. ед.	e	i , рад.	Ω , рад.	ω , рад.
0	1	0.03	0.8	0	0
$20 \cdot 2\pi$	1.2	0.01	0.6	$\pi - 0.1$	0

Таблица 2 – Равноденственные элементы начальной и целевой орбит.

τ , безразм. ед.	p , безразм. ед.	e_x	e_y	i_x , рад.	i_y , рад.
0	0.9991	0.03	0	0.423	0
$20 \cdot 2\pi$	1.1999	-0.01	0.001	-0.308	0.031

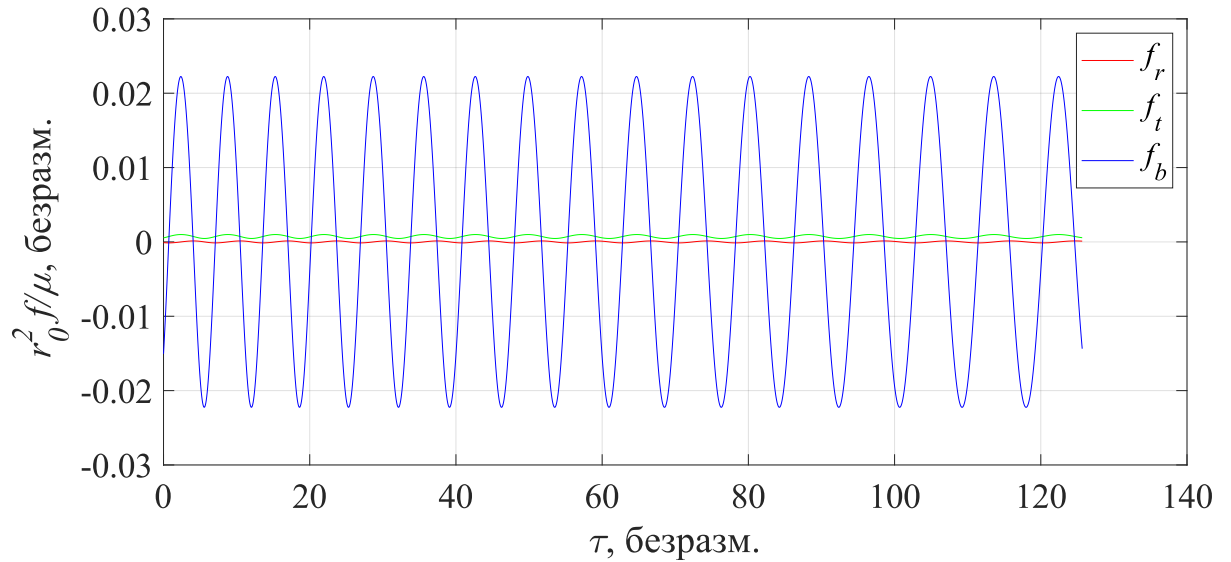


Рисунок 6 – Зависимость оптимального управляющего ускорения в усреднённой задаче от τ .

Таблица 3 – Коэффициенты рядов Фурье оптимального управляющего ускорения в усреднённой задаче.

α_0^r	$4.47 \cdot 10^{-3}$	α_0^t	29.1		
α_1^r	$-8.35 \cdot 10^{-2}$	α_1^t	-10.5	α_1^b	-889
β_1^r	-5.27	β_1^t	$1.68 \cdot 10^{-1}$	β_1^b	37.6
α_2^r	$4.88 \cdot 10^{-5}$	α_2^t	$-2.81 \cdot 10^{-2}$		
β_2^r	$-2.81 \cdot 10^{-2}$	β_2^t	$-4.86 \cdot 10^{-5}$		

Результаты представлены на рис. 6 – 9. На рис. 6 представлены зависимости от времени компонент управляющего ускорения, являющегося

решением задачи оптимизации. Полученные значения коэффициентов Фурье представлены в табл. 3. Траектория перелёта представлена на рис. 7 и 8.

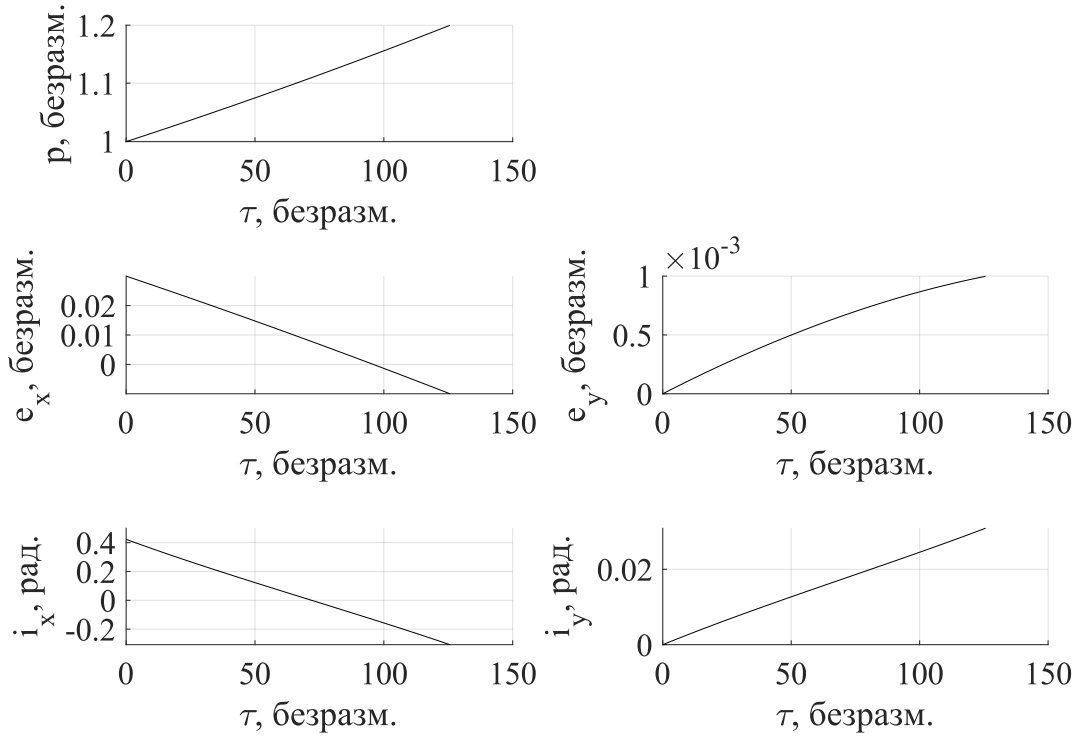


Рисунок 7 – Траектория оптимального перелёта в усреднённой задаче: графики изменения равноденственных элементов.

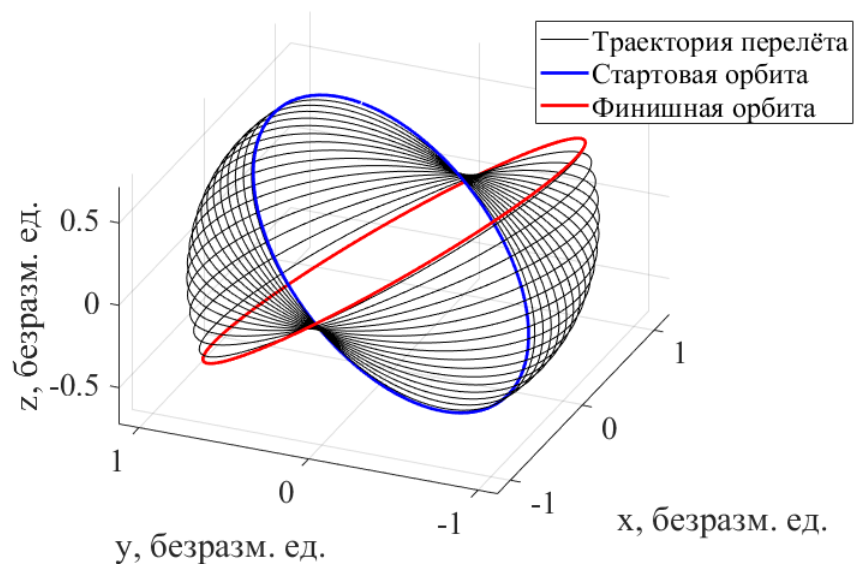


Рисунок 8 – Траектория оптимального перелёта в усреднённой задаче: пространственная картина.

Так как решение усреднённой задачи лишь аппроксимируют среднее движение аппарата, при идентичном управляющем ускорении неусреднённое движение будет отличаться от движения, описываемого уравнениями (35), (39), (41), (46). На рис. 9 приведено сравнение траекторий, полученных двумя способами. Первая траектория получена из уравнений (35), (39), (41), (46). Вторая траектория получена численным интегрированием неусреднённых уравнений движения (15). В обоих случаях коэффициенты Фурье функции управляющего ускорения берутся из решения задачи оптимизации.

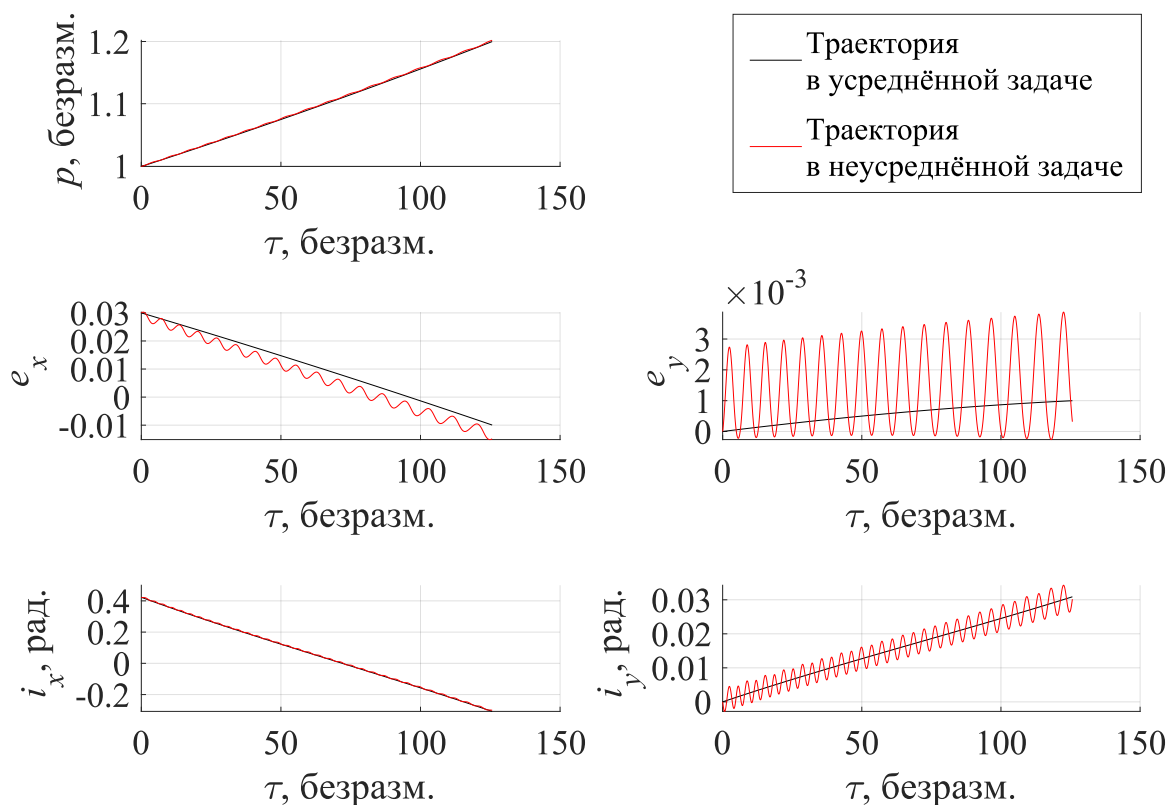


Рисунок 9 – Траектории в усреднённой и неусреднённой задачах при оптимальном управляющем ускорении.

Как можно видеть, в неусреднённой задаче аппарат не выходит на целевую орбиту в необходимый момент времени. Значит, необходимо скорректировать вектор α . Для этого решается аналогичная задача оптимизации, но в качестве ограничений вместо уравнений (35), (39), (41), (46) берётся

положение аппарата, полученное численным интегрированием уравнений движения (15). В качестве начального приближения берутся коэффициенты Фурье α , полученные решением задачи оптимизации в усреднённой задаче. Результаты коррекции управления представлены на рис. 10. Видно, что траектория изменилась незначительно, но при этом так, чтобы аппарат выходил на целевую орбиту в необходимый момент времени. Вектор коэффициентов α также изменился незначительно, что говорит о близости начального приближения, полученного в усреднённой задаче, к оптимальному управлению в неусреднённой задаче.

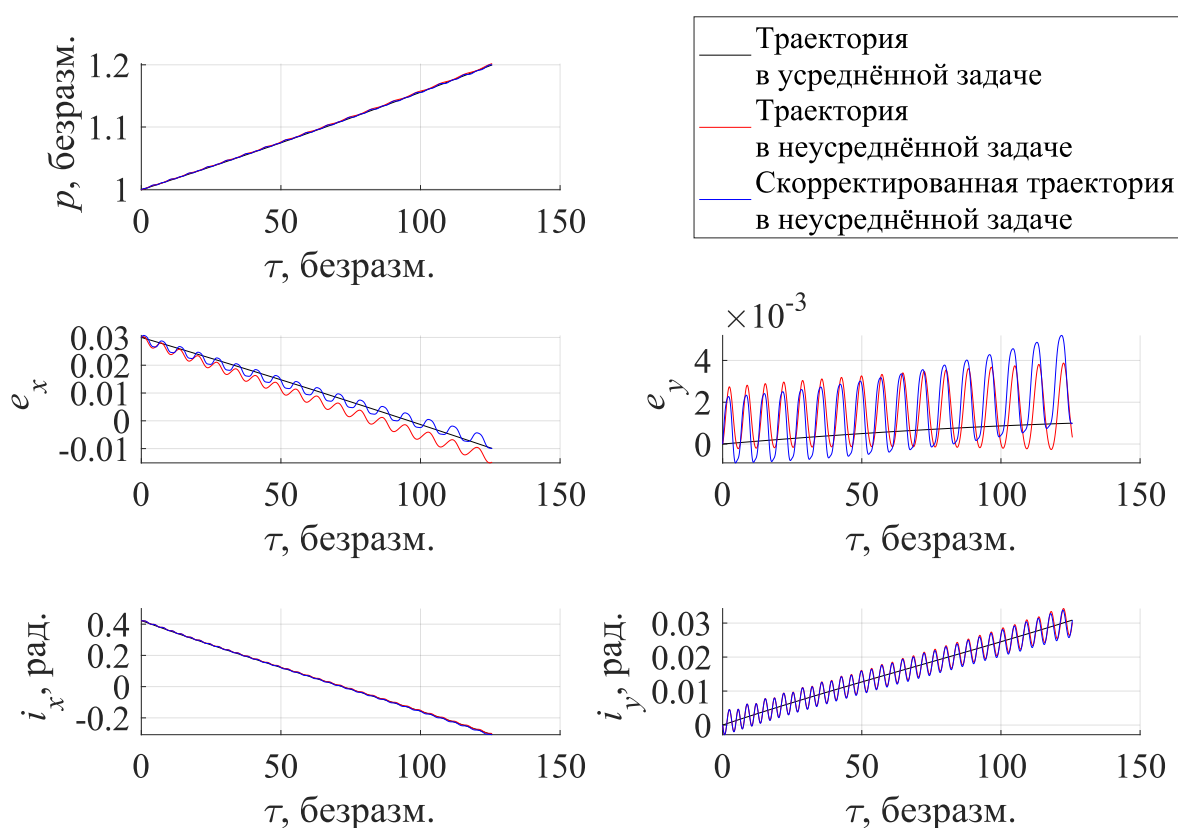


Рисунок 10 – Сравнение траекторий в неусреднённой задаче в случаях не скорректированного и скорректированного оптимальных управляющих ускорений.

Заключение

В ходе работы была получена усреднённая система дифференциальных уравнений ограниченной задачи двух тел с управлением для частного, но весьма общего случая управляющего ускорения. Доказано, что решение полученной усреднённой системы аппроксимирует решение исходной системы на промежутке времени, обратно пропорциональном амплитуде возмущения. Решение усреднённой системы получено явно в виде элементарных функций. Обнаружено, что воздействие управляющего ускорения на решение усреднённой системы определяется конечным набором параметров. Полученное решение было использовано для решения модельной задачи оптимизации управления при переходе между двумя кеплеровыми орбитами.

Планируется дальнейшее исследование усреднённой системы в двух направлениях. Во-первых, представляет интерес исследование свойств усреднённой системы уравнений и её точного решения. Во-вторых, необходимо развить использование полученных результатов в задачах оптимального управления.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Охоцимский, Д.Е., Сихарулидзе, Ю.Г. *Основы механики космического полёта*, Москва: Наука, 1990. 33 с.
- [2] Охоцимский, Д.Е. *Исследование движения в центральном поле сил под действием постоянного касательного ускорения*, Космические исследования, 1964, т. 2, №6, С. 817–842.
- [3] Izzo, D., Biscani, F. *Explicit Solution to the Constant Radial Acceleration Problem*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, Vol. 38, No. 4, pp. 733–739.
- [4] Zuiani, F., Vasile, M. *Extended analytical formulas for the perturbed Keplerian motion under a constant control acceleration*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2015, Vol. 121, No. 3, pp. 275–300.
- [5] Hu, W.D., Scheeres, D.J. *Averaging analyses for spacecraft orbital motions around asteroids*. Acta Mechanica Sinica, 2014, Vol. 30, pp. 294–300.
- [6] Петухов, В.Г. *Оптимизация траекторий и эволюция движения космических аппаратов с двигательными установками малой тяги*, диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук, Московский государственный авиационный институт (технический университет), 1996.
- [7] Ширококов, М.Г. *Баллистико-навигационные аспекты миссий малых космических аппаратов к Луне и точкам либрации*, диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук, ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017.

- [8] Hudson, J.S., Scheeres, D.J. *Reduction of Low-Thrust Continuous Controls for Trajectory Dynamics*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, Vol. 32, No. 3, pp. 780–787.
- [9] Hudson, J.S., Scheeres, D.J. *Orbital Targeting Using Reduced Eccentric Anomaly Low-Thrust Coefficients*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2011, Vol. 34 No. 3, pp. 820–831.
- [10] Иванов, Д.С., Трофимов, С.П., Ширококов, М.Г. *Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов*, под общ. ред. Овчинникова М.Ю. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016, 118 с.
- [11] Волосов, В.М. *Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений*, Успехи математических наук, 1962, т. 17, № 6(108), С. 3–126.
- [12] Боголюбов, Н.Н., Митропольский, Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1957.
- [13] Митропольский, Ю.А. *Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах*, Киев: Издательство Академии Наук Украинской ССР, 1955.
- [14] Понтрягин, Л.С., Родыгин, Л.В. *Периодические решения одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных*, Доклад Академии Наук СССР, 1960, т. 132, № 3, С. 537–540.
- [15] Боголюбов, Н.Н., Зубарев, Д.Н. *Метод асимптотического приближения для систем с быстро вращающейся фазой и его*

применение к движению заряженных частиц в магнитном поле,
Украинский математический журнал, 1955, № 7.

- [16] Задирака, К.В. *Исследование решений системы нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при некоторых производных,* Украинский математический журнал, 1958, № 2.
- [17] Kyner, W.T. *Small periodic perturbations of an autonomous system of vector equations,* Annals of Mathematics Studies, 1956, No. 41, pp. 111–124.
- [18] Волосов, В.М. *О методе усреднения,* Доклад Академии Наук, 1961, т. 137, № 1, С. 21–24.
- [19] Волосов, В.М. *О высших приближениях при усреднении,* Доклад Академии Наук, 1961, т. 137, № 5, С. 1022–1025.
- [20] Волосов, В.М. *Метод усреднения и некоторые задачи теории нелинейных колебаний,* диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук, Институт математики Академии Наук Украинской ССР, Киев, 1961.