

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени магистра
по направлению 03.04.01 «Прикладные математика и физика»,
магистерская программа «Управление динамическими системами»

**Исследование устойчивости двух
окололунных орбит и сравнение затрат
топлива на их поддержание**

Выполнил:

студент группы 372

Целоусова Анастасия Александровна

Научный руководитель:

к.ф.-м.н.

Широбоков Максим Геннадьевич

Москва, 2019

Аннотация

Почти круговые околополярные орбиты вокруг Луны высотой 10 тыс. км в настоящее время рассматриваются как один из вариантов размещения перспективной обитаемой окололунной станции-платформы «Lunar Orbital Platform-Gateway». Цель работы заключается в исследовании устойчивости и определении затрат на поддержание и необходимой частоты коррекций данных орбит, а также в сравнении полученных результатов с известными результатами для почти прямолинейной гало-орбиты L_2 9:2 — основного кандидата на размещение окололунной станции.

Устойчивость и эволюционные свойства высоких круговых орбит анализируются с использованием аналитического решения двукратно осредненных уравнений движения. На основании полученных свойств реализуется алгоритм поддержания рассматриваемых орбит. Номинальные параметры орбиты подбираются так, чтобы увеличить время ее существования. Приводятся оценки средних затрат характеристической скорости за год на поддержание орбиты с заданными параметрами для различной периодичности коррекций. Все расчеты выполняются в эфемеридной модели JPL DE430, которая учитывает центральные гравитационные поля Луны и Земли. В процессе поддержания орбит моделируются навигационные ошибки измерений и ошибки исполнения маневров. Полученные результаты сравниваются с результатами для почти прямолинейной гало-орбиты L_2 9:2.

Оглавление

Введение	4
1. Исследование устойчивости орбит	9
1.1. Постановка задачи	9
1.2. Приближенная модель движения	9
1.3. Общие сведения теории возмущений	13
1.4. Двукратно осредненные уравнения движения	15
1.5. Устойчивость NRHO-орбит	24
2. Поддержание орбит	31
2.1. Высокоточная модель движения аппарата	31
2.2. Постановка задачи	32
2.3. Время существования орбиты	33
2.4. Алгоритм поддержания высоких круговых орбит	39
2.5. Алгоритм поддержания NRHO-орбит	48
Заключение	53
Список использованных источников	55

Введение

После завершения пилотируемой лунной миссии «Аполлон-17» в декабре 1972 года до настоящего момента ни один пилотируемый корабль не выводился за пределы низких околоземных орбит. Международная группа по координации исследований космического пространства (International Space Exploration Coordination Group, ISECG) [1], основанная в 2007 году и включающая в себя пятнадцать крупнейших международных космических агентств, нацелена на начало новой эры исследования человеком Солнечной системы. Участники ISECG совместно разрабатывают «Global Exploration Roadmap (GER)» — стратегию по освоению космического пространства. Начиная с 2013 года, основное внимание GER сфокусировано на важности исследования Луны и освоения окололунного пространства для осуществления перспективных пилотируемых миссий к планетам Солнечной системы и астероидам [2–4].

В настоящий момент крупнейшие мировые космические агентства (NASA, Роскосмос, ESA, JAXA и CSA) совместно участвуют в разработке проекта, в рамках которого планируется создание обитаемой окололунной станции-платформы «Lunar Orbital Platform-Gateway (LOP-G)» [5–9], предназначенной для изучения Луны и дальнего космоса. Проектируемая станция будет использоваться в качестве стартовой платформы для будущих пилотируемых и роботизированных лунных миссий, а также в качестве промежуточного пункта для первого пилотируемого полета к Марсу.

Чтобы обеспечить возможность долгосрочного существования обитаемой станции в окололунном пространстве, прежде всего необходимо выбрать подходящую устойчивую рабочую орбиту в окрестности Луны с низкими затратами топлива на поддержание. Основными кандидатами на место размещения окололунной станции сейчас являются почти прямолинейные гало-орбиты (Near Rectilinear Halo Orbits, NRHO) — это класс периодических

орбит, принадлежащих семейству гало-орбит вблизи точек либрации L_1/L_2 системы трех тел Земля–Луна и, условно говоря, обладающих небольшим перицентральной расстоянием до меньшего притягивающего тела (менее 20 тыс. км). В системе Земля–Луна эти орбиты были независимо открыты в 1970-х годах советским ученым М.Л. Лидовым [10] и американскими учеными J. Breakwell и J. Brown [11]. Особенность движения космического аппарата (КА) по таким орбитам заключается в том, что плоскость орбиты всегда практически перпендикулярна линии Земля–Луна. Период одного витка составляет около 7 суток. Данные орбиты обладают хорошими условиями освещенности и радиовидимости [12] и, несмотря на то, что они являются орбитально неустойчивыми, при правильно рассчитанных и частых коррекциях (1-2 за виток) могут поддерживаться при относительно низких затратах топлива [13–16]. Условия видимости любого участка на Луне с NRHO примерно стационарны. Среди южных гало-орбит этого семейства есть орбиты, апоселений которых расположен над южным полюсом Луны, что удобно для установления радиосвязи с будущими лунными базами [17]. В частности, на настоящий момент южная резонансная NRHO L_2 9:2 выбрана NASA в качестве номинальной орбиты для LOP-G (рис. 1). Отношение 9:2 означает, что КА на такой орбите совершает девять витков за два синодических периода Луны.

В качестве альтернативного варианта размещения окололунной станции в отечественных исследованиях также предлагаются высокие круговые полярные орбиты вокруг Луны [18]. На предложенных орбитах все точки лунной поверхности наблюдаются с некоторой периодичностью, чаще всего траектория КА проходит над околополярными областями. Условия освещенности и радиовидимости данных орбит хуже, чем для NRHO, однако лучше, чем для более низких окололунных орбит. Также на высоких орбитах не возникает проблема гравитационных аномалий масконов — концентраций массы под лунной поверхностью, вызывающих положительные гравита-

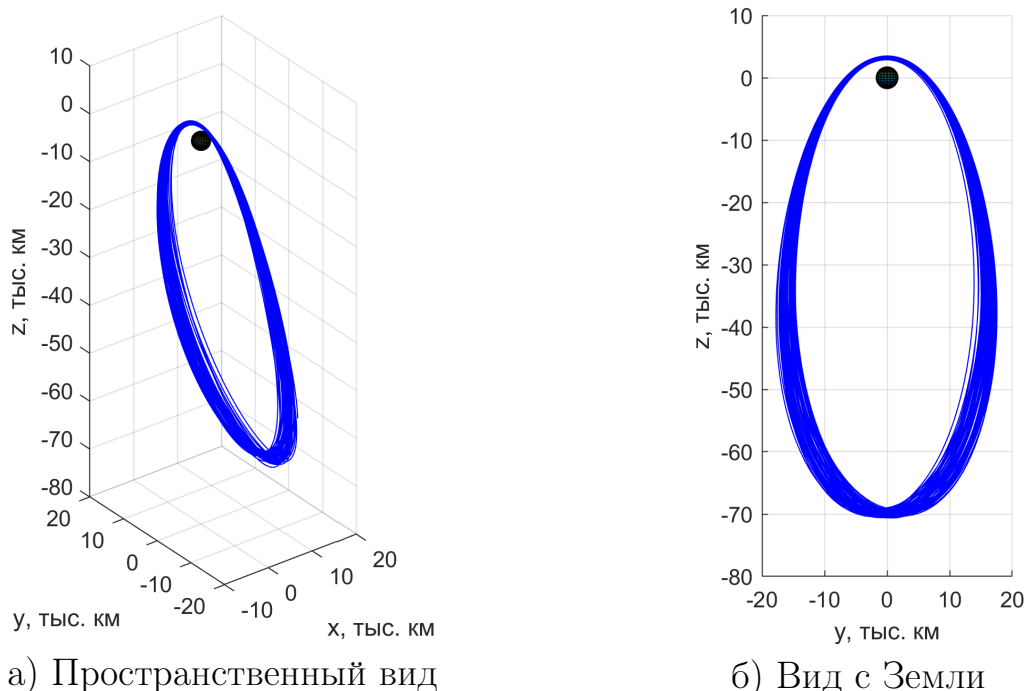


Рисунок 1 – Южная NRHO-орбита L_2 9:2, черный кружок соответствует Луне. Орбита изображена в стандартной для задачи трех тел вращающейся системе координат.

ционные аномалии. Кроме того, эти орбиты доступны для относительно недорогих быстрых перелетов с низких околоземных орбит. Затраты на быстрые двухимпульсные перелеты на высокие круговые околополярные орбиты меньше, чем для NRHO [19].

Высокие окололунные орбиты можно рассматривать в рамках возмущенной задачи двух тел. Как известно, орбиты задачи двух тел — кеплеровы эллипсы — являются орбитально устойчивыми: при достаточно малом отклонении от начальной орбиты траектория остается близка к ней. Однако в окололунном пространстве отсутствуют области, в которых можно ограничиться лишь учетом центрального гравитационного поля Луны для исследования орбитальной динамики. Из рис. 2 видно, что главным источником возмущений для орбит высотой более 8 тыс. км является гравитационное поле Земли. Хотя это возмущение является потенциальным и не меняет в среднем (за виток КА по орбите) значение большой полуоси орбиты, оно вызывает дрейф других орбитальных элементов. Для практических

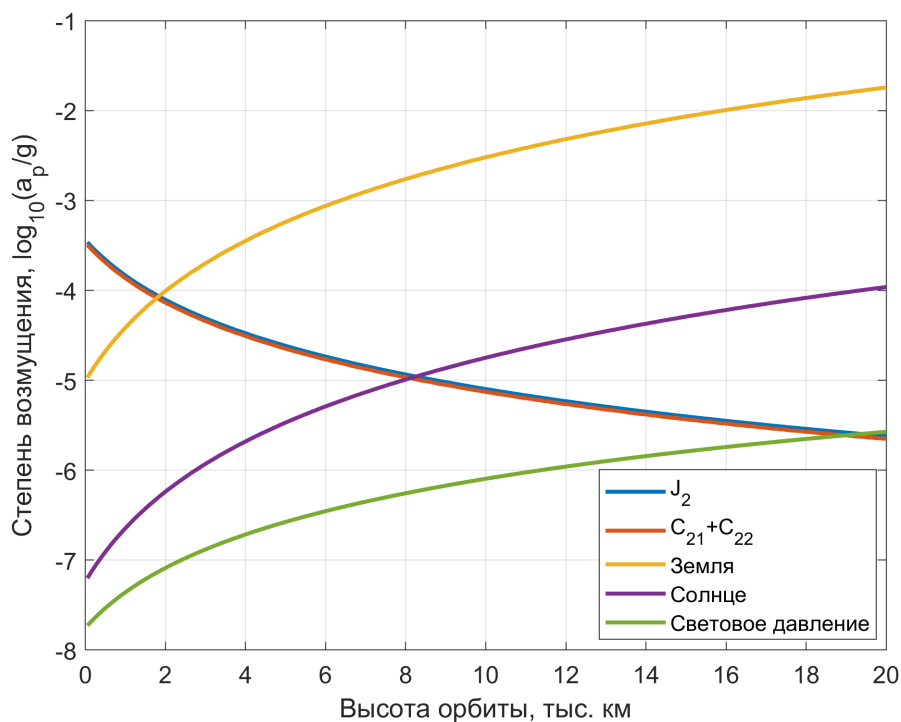


Рисунок 2 – Порядок отношения величины ускорения, вызванного источником возмущения, к гравитационному ускорению от центрального поля Луны для полярных круговых орбит различной высоты.

приложений устойчивыми считаются так называемые *замороженные орбиты* (frozen orbits) — это орбиты, у которых эксцентриситет, аргумент перигея и наклонение в среднем не меняются. Высокие круговые орбиты вокруг Луны с большим наклоном не являются устойчивыми в этом смысле. Из-за наличия возмущений от третьего тела — Земли — возникает эффект Лидова — Козаи [20, 21]. Данный эффект проявляется в том, что со временем среднее значение эксцентриситета и косинуса наклона на таких орбитах начинает возрастать. Рост эксцентриситета приводит в конце концов к столкновению КА с лунной поверхностью. В связи с этим высокие околополярные орбиты вокруг Луны нужно поддерживать. Вопрос частоты коррекций и требуемых затрат на поддержание необходимо исследовать для орбиты конкретной высоты.

Цель данной работы заключается в исследовании затрат на поддержание и необходимой частоты коррекций круговой полярной орбиты высотой

10 тыс. км (период примерно 1.33 дня) в эфемеридной модели движения и сравнении полученных результатов с известными результатами для почти прямолинейной южной гало-орбиты L_2 9:2 — основного кандидата на размещение окололунной станции.

Глава 1 диссертации посвящена вопросам устойчивости рассматриваемых орбит. В ней содержатся общие теоретические сведения теории возмущений, анализ устойчивости полярной круговой орбиты высотой 10 тыс. км и сведения об орбитальной устойчивости почти прямолинейной южной гало-орбиты L_2 9:2. Методы теории возмущений позволяют получить приближенное осредненное решение, которое дает представление о вековой эволюции высоких круговых полярных орбит, на основании чего строится стратегия их поддержания. В главе 2 оцениваются затраты характеристической скорости, необходимые для поддержания полярной круговой орбиты вокруг Луны высотой 10 тыс. км в эфемеридной модели движения в течение года. Подробно описывается алгоритм поддержания данной орбиты, и приводятся результаты реализации предложенного алгоритма с учетом навигационных ошибок измерений и ошибок исполнения маневра. Там же оцениваются среднегодовые затраты на поддержание данной орбиты в зависимости от частоты исполнения коррекций. В конце второй главы полученные результаты сравниваются с затратами на поддержание NRHO L_2 9:2. В заключении приводятся выводы данной работы.

1. Исследование устойчивости орбит

1.1. Постановка задачи

Целью данной главы является анализ устойчивости высокой орбиты вокруг Луны со следующими параметрами:

- большая полуось $a = 11738$ км (высота 10 тыс. км),
- наклонение $i = 90^\circ$ относительно лунного экватора,
- эксцентриситет $e = 0$.

Необходимо исследовать устойчивость орбиты с данными характеристиками в смысле изменения средних орбитальных элементов со временем на основании аналитического решения двукратно осредненных уравнений движения, полученных в рамках классических методов теории возмущений. Устойчивыми или замороженными будем считать орбиты, у которых отсутствует вековой дрейф эксцентриситета, наклонения и аргумента перицентра.

1.2. Приближенная модель движения

Для анализа устойчивости орбиты с заданными параметрами необходимо понять, как меняются средние орбитальные элементы со временем. Изменение орбитальных элементов зависит от возмущающих сил на орбите. На рис. 3 изображена степень возмущения от планет, лунных гармоник, Солнца и светового давления на круговых полярных орбитах вокруг Луны высотой 10 тыс. км. Степень возмущения определяется как порядок отношения величины ускорения, вызванного источником, к гравитационному ускорению от центрального поля Луны. Из рисунка видно, что основным источником возмущений является центральное гравитационное поле Земли. Степень возмущения от него более чем на два порядка превосходит возмущение от других источников, поэтому для исследования устойчивости

рассматриваемой орбиты ограничимся учетом центральных гравитационных полей Луны и Земли.

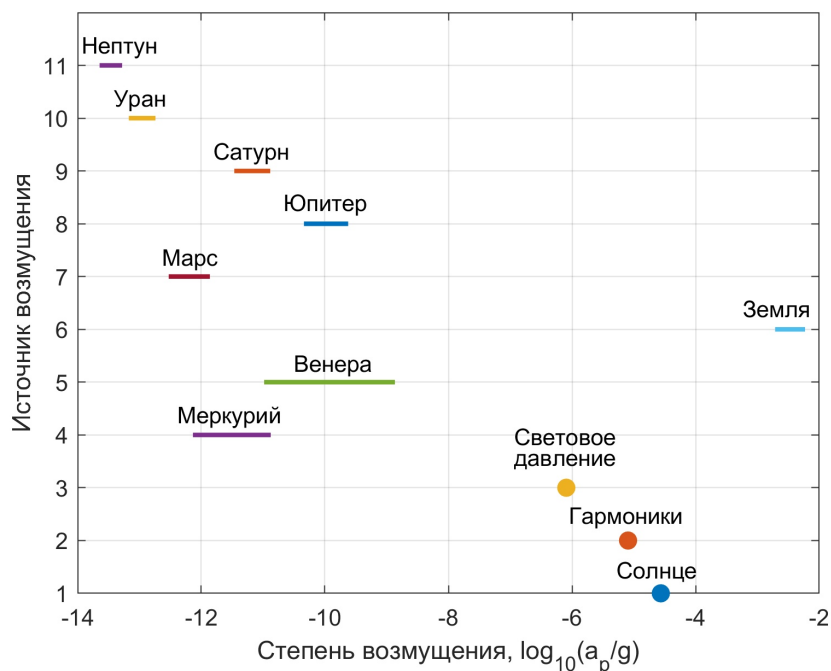


Рисунок 3 – Порядок отношения величины ускорения, вызванного источником возмущения, к гравитационному ускорению от центрального поля Луны для полярных круговых орбит высотой 10 тыс. км.

В первом приближении можно считать, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите и плоскость лунного экватора совпадает с ее орбитальной плоскостью. Рассмотрим вращающуюся прямоугольную декартову систему координат $OXYZ$ с центром в Луне, такую, что плоскость OXY совпадает с орбитальной плоскостью Луны, ось OX направлена на Землю, ось OZ сонаправлена с вектором орбитальной угловой скорости Луны вокруг Земли, оси OX , OY , OZ образуют правую тройку. Гамильтониан уравнений движения космического аппарата, на который действуют центральные гравитационные поля Луны и Земли, в такой системе координат имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_C + \mathcal{H}_{3b}, \quad (1)$$

где слагаемое \mathcal{H}_K соответствует гамильтониану задачи двух тел, \mathcal{H}_C —

возникающей во вращающейся системе координат силе Кориолиса, \mathcal{H}_{3b} — потенциалу гравитационного поля Земли. Слагаемые в формуле (1) имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_K &= -\frac{\mu}{2a}, \\ \mathcal{H}_C &= -n_E H, \\ \mathcal{H}_{3b} &= \frac{kn_E^2}{2}(r^2 - 3r_x^2),\end{aligned}$$

где μ — гравитационный параметр Луны; a — большая полуось орбиты КА; $n_E = \sqrt{(\mu_E + \mu)/a_E^3}$ — орбитальная скорость вращения Земли вокруг Луны, μ_E — гравитационный параметр Земли, a_E — расстояние от Земли до Луны; H — Z -компонента орбитального углового момента КА; $k = \frac{\mu_E}{\mu_E + \mu}$, r — модуль радиус-вектора КА, r_x — проекция радиус-вектора КА на ось OX .

В качестве канонических переменных удобно выбрать элементы Делоне $\{L, G, H, l, g, h\}$ — переменные действие-угол в задаче двух тел, которые связаны с классическими орбитальными элементами формулами

$$\begin{aligned}L &= \sqrt{\mu a}, & l &= M, \\ G &= L\sqrt{1 - e^2}, & g &= \omega, \\ H &= G \cos i, & h &= \Omega - n_M t,\end{aligned}\tag{2}$$

где M — средняя аномалия, ω — аргумент перигентра, Ω — долгота восходящего узла (относительно оси OX), e и i — эксцентриситет и наклонение орбиты, соответственно; n_M — угловая скорость вращения Луны: $n_M = n_E$ из-за спин-орбитального резонанса. Переменные L, G, H являются обобщенными импульсами, а переменные l, g, h — обобщенными координатами. При

этом уравнения движения КА имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l}, & \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g}, & \frac{dH}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h}, \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L}, & \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G}, & \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для орбиты высотой 10 тыс. км отношение $\varepsilon = \frac{n_E}{n}$, где $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ — среднее движение КА, можно рассматривать в качестве малого параметра. Тогда гамильтониан можно переписать в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{H}_2,$$

где $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_K$, $\varepsilon \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_C$, $\frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{3b}$.

Угловые переменные l и h являются быстрыми переменными, период l составляет менее двух дней, что соответствует коротко-периодическим вариациям переменных действия, а период h во вращающейся системе координат равен орбитальному периоду Луны, то есть примерно одному месяцу, что соответствует средне-периодическим вариациям. Период еще одной угловой переменной g составляет несколько лет. Чтобы найти эволюцию средних элементов орбиты, то есть получить приближенное решение системы (3), которое не содержит коротко-периодических и средне-периодических вариаций, нужно исключить зависимость гамильтониана от быстрых переменных l и h до порядка ε^2 , иными словами, нужно осреднить по ним данный гамильтониан. Общепринятыми методами поиска приближенных решений задач, в которых присутствует малый параметр, являются методы теории возмущений.

1.3. Общие сведения теории возмущений

Аналитические методы теории возмущений широко используются для получения приближенных орбит естественных небесных тел и искусственных спутников. Основным подходом теории возмущений является упрощение уравнений возмущенной задачи путем замены переменных. В 1969 году А. Дегрит разработал общий алгоритм нахождения замены переменных для гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра [22]. Идея предложенного алгоритма заключается в поиске преобразования Ли, в результате которого гамильтониан имеет упрощенный вид или удовлетворяет каким-то необходимым свойствам.

Преобразование Ли — это каноническое преобразование $\varphi : (\mathbf{y}, \mathbf{Y}) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{X})$ канонических переменных гамильтоновой системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{X}},$$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}},$$

гамильтониан которой представляет собой степенной ряд по малому параметру ε

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathcal{H}_n^0(\mathbf{x}, \mathbf{X}), \quad (4)$$

к системе с новым гамильтонианом

$$\mathcal{H}'(\mathbf{y}, \mathbf{Y}; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathcal{H}_n^0(\mathbf{y}, \mathbf{Y}). \quad (5)$$

Согласно алгоритму Дегрит, такое преобразование можно построить последовательно с помощью рекурсивных вычислений. При этом вводится массив элементов \mathcal{H}_j^i , $i, j = 0, 1, \dots$, из которых \mathcal{H}_j^0 те же, что в формуле (4), а \mathcal{H}_0^i те же, что в формуле (5). Остальные элементы являются вспомога-

тельными и служат для упрощения описания алгоритма. Рекуррентная формула имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}_j^i = \mathcal{H}_{j+1}^{i-1} + \sum_{k=0}^j C_j^k \{\mathcal{H}_{j-k}^{i-1}; W_{k+1}\}, \quad (6)$$

где $i \geq 1, j \geq 0, C_j^k = \frac{j!}{k!(j-k)!}$, $\{-; -\}$ — скобки Пуассона; коэффициенты W_{k+1} определяют производящую функцию преобразования, которая ищется в виде степенного ряда

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{X}).$$

Производящая функция определяется почленно из уравнения (6), в предположении, что новый гамильтониан \mathcal{H}' удовлетворяет некоторым заранее заданным условиям или требованиям. Таким образом, производящая функция ищется путем решения уравнения в частных производных, которое можно переписать в виде так называемого *гомологического уравнения*

$$\{W_n; \mathcal{H}_0^0\} = \mathcal{Q}_n - \mathcal{H}_0^n, \quad (7)$$

где \mathcal{Q}_n содержит уже известные члены уравнения (6) для предыдущих порядков, а \mathcal{H}_0^n , как часть нового гамильтониана, удовлетворяет заданным условиям. Скобки Пуассона $\{-; \mathcal{H}_0^0\}$ называются производной Ли относительно \mathcal{H}_0^0 .

После нахождения производящей функции формулы замены переменных могут быть выписаны в явном виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_W^n(\mathbf{y})$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_W^n(\mathbf{Y}),$$

обратная замена имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_{(-W)}^n(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_{(-W)}^n(\mathbf{X}),$$

где $L_W = \{-; W\}$, $L_{(-W)} = \{-; -W\}$.

1.4. Двукратно осредненные уравнения движения

Уравнения движения КА, возмущаемого третьим телом, из которых исключена зависимость от средней аномалии и долготы восходящего узла, называют двукратно осредненными уравнениями. Впервые они были получены в 1961 году советским ученым М.Л. Лидовым [20] и в 1962 году американским ученым Y. Kozai [21] для описания движения искусственных спутников и астероидов в возмущенной задаче двух тел при наличии возмущения от третьего тела, движущегося по круговой орбите вокруг центрального. В зависимости от высоты орбиты КА можно рассматривать разные модели возмущений. Для достаточно низких орбит помимо возмущений от третьего тела также следует учитывать несферичность гравитационного поля центрального тела. Так, в работах [23, 24] для низких орбит также учитываются возмущения от гармоник J_2, C_{22} , в работах [25–27] дополнительно к ним принимается в расчет гармоника J_3 , в статье [28] рассматривается модель, учитывающая J_2 и J_7 . Обобщенные уравнения движения в случае, когда орбита возмущающего тела отлична от круговой и ее плоскость некомпланарна экваториальной плоскости центрального тела, приведены в работе [24]. Обзор моделей возмущенного движения, используемых для анализа орбитальной динамики искусственных спутников Луны, можно найти

в [23]. Проведем далее вывод хорошо известных двукратно осредненных уравнений движения с использованием теории Deprit.

На первом этапе поиска приближенного решения системы (3) нужно получить гамильтониан, который не зависит от истинной аномалии. В терминах обозначений, введенных в формуле (4), исходный гамильтониан системы имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{H}_2 \equiv \mathcal{H}_0^0 + \varepsilon \mathcal{H}_1^0 + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{H}_2^0, \quad (8)$$

а новый гамильтониан (5) после преобразования Ли не должен зависеть от истинной аномалии. Обозначим его $\bar{\mathcal{H}}$:

$$\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}_0 + \varepsilon \bar{\mathcal{H}}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{\mathcal{H}}_2 \equiv \mathcal{H}_0^0 + \varepsilon \mathcal{H}_1^0 + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{H}_2^0. \quad (9)$$

Для определения производящей функции преобразования по формуле (7) потребуется вычисление производной Ли относительно гамильтониана \mathcal{H}_0 , который в данном случае имеет вид

$$\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}_0^0 \equiv \bar{\mathcal{H}}_0 = -\frac{\mu^2}{2L^2},$$

поэтому производная Ли представляет собой дифференциальный оператор

$$\{-; \mathcal{H}_0^0\} = n \frac{\partial}{\partial l}, \quad n = \frac{\mu^2}{L^3}.$$

Следовательно уравнение (7) принимает вид

$$n \frac{\partial W_n^l}{\partial l} = \mathcal{Q}_n - \mathcal{H}_0^n. \quad (10)$$

Чтобы в новом гамильтониане члены до n -ого порядка не содержали истин-

ную аномалию, на каждом шаге $\bar{\mathcal{H}}_n \equiv \mathcal{H}_0^n$ можно выбирать в виде

$$\bar{\mathcal{H}}_n \equiv \mathcal{H}_0^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{Q}_n dl, \quad (11)$$

тогда для производящей функции имеем

$$W_n^l = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} (\mathcal{Q}_n - \mathcal{H}_0^n) dl. \quad (12)$$

После применения формул (11) и (12) до порядка $n = 2$ включительно будет найден гамильтониан $\bar{\mathcal{H}}$ (см. формулу (9)) и производящая функция $W^l = W_1^l + \varepsilon W_2^l$, которая осуществляет данное преобразование Ли. Уравнения Гамильтона будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}}{dt} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{l}} = 0, \quad \frac{d\bar{G}}{dt} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{g}}, \quad \frac{d\bar{H}}{dt} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{h}}, \\ \frac{d\bar{l}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{L}}, \quad \frac{d\bar{g}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{G}}, \quad \frac{d\bar{h}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{H}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где верхняя черта обозначает осреднение по истинной аномалии.

Далее нужно осреднить полученный гамильтониан по переменной \bar{h} . В терминах формулы (8) имеем

$$\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}_0 + \varepsilon \bar{\mathcal{H}}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{\mathcal{H}}_2 \equiv \mathcal{H}_0^0 + \varepsilon \mathcal{H}_1^0 + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{H}_2^0, \quad (14)$$

и искомый двукратно осредненный гамильтониан $\bar{\bar{\mathcal{H}}}$ можно записать в следующем виде:

$$\bar{\bar{\mathcal{H}}} = \bar{\bar{\mathcal{H}}}_0 + \varepsilon \bar{\bar{\mathcal{H}}}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{\bar{\mathcal{H}}}_2 \equiv \mathcal{H}_0^0 + \varepsilon \mathcal{H}_1^0 + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{H}_2^0. \quad (15)$$

В гамильтониане $\bar{\bar{\mathcal{H}}}$ нет зависимости от истинной аномалии \bar{l} , поэтому \bar{L}

будет являться первым интегралом и $\bar{\mathcal{H}}_0 = -\frac{\mu^2}{2\bar{L}^2} = \text{const}$, следовательно можно отбросить это слагаемое и, заменив $\bar{\mathcal{H}}_1 = \varepsilon\bar{\mathcal{H}}_1$, $\bar{\mathcal{H}}_2 = \frac{\varepsilon}{2}\bar{\mathcal{H}}_2$, переписать выражения (14) и (15) в виде

$$\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}_1 + \varepsilon\bar{\mathcal{H}}_2 \equiv \mathcal{H}_0^0 + \varepsilon\mathcal{H}_1^0,$$

и

$$\bar{\bar{\mathcal{H}}} = \bar{\bar{\mathcal{H}}}_1 + \varepsilon\bar{\bar{\mathcal{H}}}_2 \equiv \mathcal{H}_0^0 + \varepsilon\mathcal{H}_0^1,$$

где

$$\bar{\mathcal{H}}_0 \equiv \mathcal{H}_0^0 \equiv \bar{\bar{\mathcal{H}}}_0 = -n_E\bar{H},$$

тогда производная Ли представляет собой дифференциальный оператор

$$\{-; \mathcal{H}_0^0\} = n_E \frac{\partial}{\partial \bar{h}}.$$

Из гомологического уравнения в результате получаем двукратно осредненный гамильтониан $\bar{\bar{\mathcal{H}}}$ и производящую функцию W^h :

$$\bar{\bar{\mathcal{H}}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\mathcal{H}} d\bar{h}, \quad W^h = \frac{1}{n_E} \int_0^{2\pi} (\bar{\bar{\mathcal{H}}} - \bar{\mathcal{H}}) d\bar{h}.$$

После осреднения по средней аномалии и долготе восходящего узла гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathcal{H}}} = & -\frac{\mu^2}{2\bar{L}^2} - n_E\bar{H} - \\ & - \frac{kn_E^2\bar{L}^4}{16\mu^2} \left[\left(5 - 3\frac{\bar{G}^2}{\bar{L}^2} \right) \left(-1 + 3\frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right) + 15 \left(1 - \frac{\bar{G}^2}{\bar{L}^2} \right) \left(1 - \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right) \cos 2\bar{g} \right], \end{aligned}$$

где двойная верхняя черта обозначает двукратно осредненные элементы, также называемые средними. Тогда из уравнений Гамильтона (16) для

средних элементов

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}}{dt} &= 0, & \frac{d\bar{G}}{dt} &= -\frac{\partial\bar{\mathcal{H}}}{\partial\bar{g}}, & \frac{d\bar{H}}{dt} &= 0, \\ \frac{d\bar{l}}{dt} &= \frac{\partial\bar{\mathcal{H}}}{\partial\bar{L}}, & \frac{d\bar{g}}{dt} &= \frac{\partial\bar{\mathcal{H}}}{\partial\bar{G}}, & \frac{d\bar{h}}{dt} &= \frac{\partial\bar{\mathcal{H}}}{\partial\bar{H}} \end{aligned} \quad (16)$$

можно получить двукратно осредненные уравнения движения

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\bar{L}} &= 0, \\ \dot{\bar{G}} &= -\frac{15kn_E^2\bar{L}^4}{8\mu^2} \left(1 - \frac{\bar{G}^2}{\bar{L}^2}\right) \left(1 - \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2}\right) \sin 2\bar{g}, \\ \dot{\bar{H}} &= 0, \\ \dot{\bar{l}} &= \frac{kn_E^2}{8\mu^2\bar{G}^2\bar{L}^4} \left[15\bar{L}^5 (\bar{G}^2 - \bar{H}^2) (\bar{G}^2 - 2\bar{L}^2) \cos 2\bar{g} - 3\bar{G}^4\bar{L}^5 + \right. \\ &\quad \left. + 9\bar{G}^2\bar{H}^2\bar{L}^5 + 10\bar{G}^2\bar{L}^7 - 30\bar{H}^2\bar{L}^7 \right] + \frac{\mu^2}{\bar{L}^3}, \\ \dot{\bar{g}} &= \frac{3kn_E^2}{8\bar{G}^3\mu^2} \left[5\bar{L}^2 \cos 2\bar{g} (\bar{G}^4 - \bar{H}^2\bar{L}^2) - \bar{G}^4\bar{L}^2 + 5\bar{H}^2\bar{L}^4 \right], \\ \dot{\bar{h}} &= -n_E - \frac{3kn_E^2\bar{H}^2}{8\mu^2\bar{G}^2} \left[5(\bar{G}^2 - \bar{L}^2) \cos 2\bar{g} - 3\bar{G}^2 + 5\bar{G}^2 \right], \end{aligned} \right. \quad (17)$$

где точка над символом обозначает операцию дифференцирования по времени. Альтернативный вывод уравнений (17) с использованием метода возмущений Пуанкаре-Цейпеля выполнен в работе [23].

Зная производящие функции W^l и W^h , можно найти формулы перехода от средних элементов к оскулирующим. Согласно статье [27], приближенные формулы замены канонических координат до порядка ε^2 для

достаточно малых \bar{h} и \bar{l} имеют вид

$$\begin{aligned}
L &= \bar{L} [1 + (3/4)\varepsilon^2 \cos 2\bar{g}], \\
G &= \bar{G} + (3/4)\bar{L}\varepsilon^2 \cos 2\bar{g}, \\
H &= \bar{H} - (3/8)\varepsilon\bar{L} \left(1 - \left(\bar{H}/\bar{L}\right)^2\right), \\
l &= 2(\varepsilon^2/\bar{e}) - 3\varepsilon^2 \sin 2\bar{g}, \\
g &= \bar{g} - \varepsilon \left[2(\varepsilon/\bar{e}) + (15/8) \left(\bar{H}/\bar{L}\right) - (153/128)\varepsilon\right] \sin 2\bar{g}, \\
h &= 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

В уравнениях для средней аномалии и аргумента перицентра средний эксцентриситет \bar{e} стоит в знаменателе. Для орбит с чрезвычайно малым значением эксцентриситета вместо набора элементов $\{L, G, H, l, g, h\}$ можно использовать набор невырожденных в этом случае переменных $\{F, C, S, L, H, h\}$, где $F = l + g$, $C = e \cos g$, $S = e \sin g$. Тогда к выражениям для L, H, h из (18) нужно добавить

$$\begin{aligned}
F &= \bar{F} - (21\varepsilon^2/8) \sin 2\bar{g}, \\
C &= \bar{C} + (\varepsilon^2/4) [7 \cos \bar{g} + \cos 3\bar{g}], \\
S &= \bar{S} - (\varepsilon^2/4) [11 \cos \bar{g} - \cos 3\bar{g}].
\end{aligned} \tag{19}$$

Подробный вывод упрощенных формул (18) и (19) можно найти в работе [27]. В работе [26] также можно найти формулы перехода от средних элементов к оскулирующим в линейном приближении. Полные формулы перехода для орбит с ненулевым эксцентриситетом приведены в статье [23].

Используя формулы (2), можно также переписать полученные уравнения движения в переменных Делоне (17) в терминах классических орби-

тальных элементов $\{\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}, \bar{\Omega}, \bar{\omega}, \bar{M}\}$ в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}} = 0, \\ \dot{\bar{e}} = \frac{15kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{8\mu^{1/2}} \bar{e} \sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin^2 \bar{i} \sin 2\bar{\omega}, \\ \dot{\bar{i}} = -\frac{15kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{16\mu^{1/2}} \frac{\bar{e}^2}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}} \sin 2\bar{i} \sin 2\bar{\omega}, \\ \dot{\bar{\Omega}} = \frac{3kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{8\mu^{1/2} \sqrt{1 - \bar{e}^2}} (5\bar{e}^2 \cos 2\bar{n}_E - 3\bar{e}^2 - 2) \cos \bar{i}, \\ \dot{\bar{\omega}} = \frac{3kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{8\mu^{1/2} \sqrt{1 - \bar{e}^2}} \left[(5 \cos^2 \bar{i} - 1 + \bar{e}^2) + 5 (1 - \bar{e}^2 - \cos^2 \bar{i}) \cos 2\bar{\omega} \right], \\ \dot{\bar{M}} = \frac{\mu^{1/2}}{\bar{a}^{3/2}} - \frac{kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{8\mu^{1/2}} \left[(3\bar{e}^2 + 7) (3 \cos^2 \bar{i} - 1) + 15 (1 + \bar{e}^2) \sin^2 \bar{i} \cos 2\bar{\omega} \right]. \end{cases} \quad (20)$$

Видно, что правые части полученных двукратно осредненных уравнений зависят только эксцентриситета \bar{e} , наклона \bar{i} и аргумента перицентра $\bar{\omega}$. Кроме того, среднее значение большой полуоси \bar{a} не меняется со временем. Таким образом система (20) является системой дифференциальных уравнений третьего порядка. К тому же у нее имеются первые интегралы:

$$C_1 = (1 - \bar{e}^2) \cos^2 \bar{i}, \quad (21)$$

$$C_2 = \bar{e}^2 \left(\frac{2}{5} - \sin^2 \bar{i} \sin^2 \bar{\omega} \right), \quad (22)$$

с помощью которых порядок системы можно понизить до первого. Следовательно, данная система полностью интегрируема в квадратурах.

При $\bar{i} = 90^\circ$ из третьего уравнения (20) следует, что $\dot{\bar{i}} = 0$, поэтому для полярных орбит решение системы (20) фактически сводится к решению системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно \bar{e} и $\bar{\omega}$. Если перейти к новым переменным — компонентам вектора эксцентриситета

$\bar{e}_x = \bar{e} \cos \bar{\omega}$, $\bar{e}_y = \bar{e} \sin \bar{\omega}$, то уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_x = \frac{9kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{4\mu^{1/2}} \bar{e}_y \sqrt{1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2}, \\ \dot{\bar{e}}_y = \frac{3kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{2\mu^{1/2}} \bar{e}_x \sqrt{1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2}, \end{cases}$$

что равносильно

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_x = 6B \bar{e}_y \sqrt{1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2}, \\ \dot{\bar{e}}_y = 4B \bar{e}_x \sqrt{1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2}, \end{cases} \quad (23)$$

при $B = \frac{3kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{8\mu^{1/2}} = 4.76 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$.

Круговым орбитам соответствует нулевое положение равновесия данной системы $\bar{e}_x = 0$, $\bar{e}_y = 0$. Линеаризуем систему в окрестности этого положения равновесия, чтобы определить его тип. Матрица A линеаризованной системы

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{e}}_x \\ \dot{\bar{e}}_y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{e}_x \\ \bar{e}_y \end{pmatrix} \quad (24)$$

в окрестности нулевого положения равновесия будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4B \\ 6B & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы являются вещественными $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{24}B = \pm 2.33 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$. Следовательно, положение равновесия $\bar{e}_x = 0$, $\bar{e}_y = 0$ является гиперболическим. Характеристическое время системы (24) (время, за которое эксцентриситет меняется в $e \approx 2.718$ раз) составляет $1/\lambda_1 = 4.29 \cdot 10^7 \text{ с}$, то есть примерно 50 дней.

При $\bar{i} = 90^\circ$, $\bar{e} = 0$ первые интегралы (21) и (22) тождественно равны нулю: $C_1 = C_2 = 0$. Из уравнения (22) следует, что такие значения первые интегралы принимают также на траекториях с аргументом перицентра $\bar{\omega} = -\arcsin \sqrt{(2/5)} + 2\pi = 320.77^\circ$ или $\bar{\omega} = \arcsin \sqrt{(2/5)} = 39.23^\circ$ и

произвольным значением эксцентриситета. Эти решения соответствуют устойчивому и неустойчивому инвариантным многообразиям положения равновесия $\bar{e} = 0$. Фазовый портрет системы (23) при фиксированном значении $C_1 = 0$ ($\bar{i} = 90^\circ$) и различных значениях C_2 изображен на рис. 4.

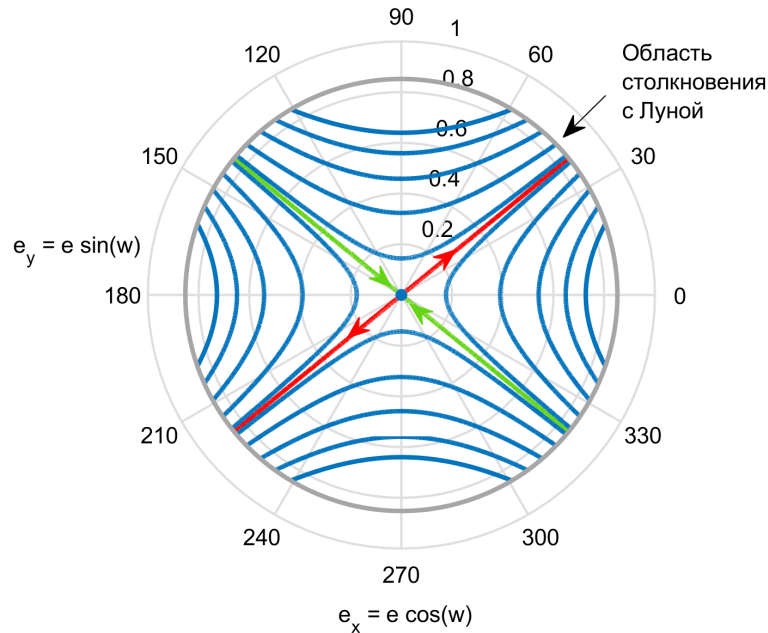


Рисунок 4 – Фазовый портрет двукратно осредненной системы уравнений для орбит с наклонением $\bar{i} = 90^\circ$.

Зеленым цветом обозначено устойчивое многообразие, красным — неустойчивое. Движение вдоль устойчивого многообразия происходит к положению равновесия, вдоль неустойчивого — от него. Направление движения вдоль траекторий с отличными от нуля значениями C_2 (голубые кривые) согласовано с направлением движения вдоль многообразий. Из рисунка 4 видно, что при небольших отклонениях от гиперболического положения равновесия эксцентриситет высоких круговых полярных орбит в некоторый момент начнет неограниченно расти в направлении неустойчивого многообразия, что в конечном итоге приведет к столкновению КА с Луной. Критическое, то есть приводящее к столкновению с лунной поверхностью, значение эксцентриситета для орбит высотой 10 тыс. км равно 0.852. Следовательно

рассматриваемые высокие почти круговые полярные орбиты не являются замороженными, их необходимо корректировать с некоторой периодичностью. На основании полученных эволюционных свойств высоких круговых полярных орбит строится стратегия их поддержания. Вопросам частоты коррекций и требуемых годовых затрат на поддержание данных орбит в полной эфемеридной модели движения посвящена вторая глава.

1.5. Устойчивость NRHO-орбит

Как уже было сказано, почти прямолинейные гало-орбиты — это подсемейство в семействе гало-орбит, пространственных периодических решений в круговой ограниченной задаче трех тел (КОЗТТ). Рассмотрим более подробно модель КОЗТТ. В этой модели два притягивающих тела, массой m_1 и m_2 , $m_1 \geq m_2$, движутся по круговым орбитам вокруг центра масс системы. Если притягивающими телами являются Земля и Луна, то такая система трех тел называется системой Земля–Луна. Третье тело, то есть КА, имеет пренебрежительно малую массу. Уравнения движения задачи трех тел стандартно записывают во вращающейся прямоугольной декартовой системе координат $O'xyz$ с началом в центре масс системы Земля–Луна, такой, что $O'x$ соединяет массы m_1 , m_2 и направлена в сторону m_2 , ось $O'z$ сонаправлена с вектором угловой скорости орбитального движения m_2 вокруг m_1 , а ось $O'y$ дополняет их до правой тройки.

Для упрощения уравнений движения задачи трех тел удобно также ввести безразмерную систему единиц, в которой массы притягивающих тел m_1 и m_2 равны соответственно $1 - \mu'$ и μ' , где $\mu' = m_2 / (m_1 + m_2) = 1.2150668 \cdot 10^{-2}$ в системе Земля–Луна; угловая скорость вращающейся системы координат равна единице; расстояние между m_1 и m_2 также равно единице. Тогда во вращающейся системе координат $O'xyz$ тела m_1 и m_2 имеют фиксированные положения в точках $[-\mu'; 0; 0]$ и $[1 - \mu'; 0; 0]$ и уравнения движения

КОЗТТ имеют простой вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z},\end{aligned}\tag{25}$$

где

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu'}{r_1} + \frac{\mu'}{r_2}$$

называется обобщенным потенциалом, r_1 и r_2 — расстояния от КА до Земли и Луны, $r_1 = \sqrt{(x + \mu')^2 + y^2 + z^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu')^2 + y^2 + z^2}$. Данная система уравнений обладает первым интегралом

$$C_J(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 2U(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

который называется интегралом Якоби.

Система уравнений (25) имеет пять положений равновесия, все они находятся в плоскости Oxy и называются точками либрации. Обычно их обозначают символами L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 . Точки L_1, L_2, L_3 находятся на оси $O'x$ и называются коллинеарными точками либрации. Точки L_4, L_5 расположены в вершинах равносторонних треугольников с общим основанием $m_1 - m_2$. Они называются треугольными точками либрации.

Вблизи коллинеарных точек либрации существуют десятки семейств периодических орбит. Полную их классификацию можно найти в работе [29]. Одними из самых известных являются северные и южные гало-орбиты. Это однопараметрические семейства, где в качестве параметра можно выбрать амплитуду движения A_z вдоль оси $O'z$. Пространственный вид семейства южных гало-орбит в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 изображен на рис. 5. Северные и южные гало-орбиты отщепляются от еще одного известного однопараметрического семейства плоских орбит Ляпунова при

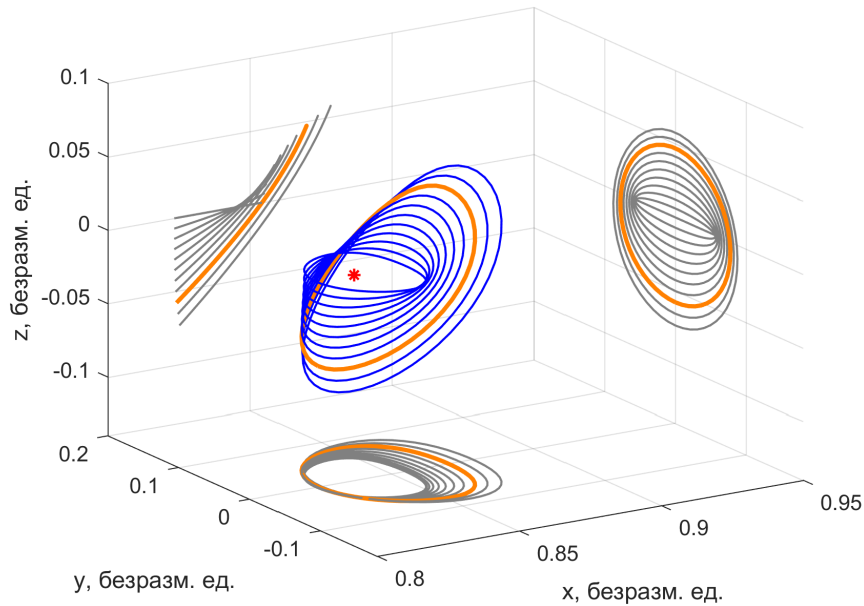


Рисунок 5 – Пространственный вид южного семейства гало-орбит вокруг L_1 в стандартной для задачи трех тел вращающейся системе координат.

определенном значении интеграла Якоби. На рисунке 6 изображен вид сбоку (в плоскости $O'xz$) на семейство северных гало-орбит вблизи коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 , красным цветом изображены порождающие их плоские орбиты Ляпунова. Семейства южных гало-орбит симметричны семействам северных гало-орбит относительно плоскости $O'xy$. Гало-орбиты с перигальным расстоянием не больше 20 тыс. км в системе Земля–Луна называют почти прямолинейными гало-орбитами (Near rectilinear halo orbits, NRHO). Термин возник в связи с тем, что в проекции на плоскость $O'xz$ гало-орбиты с низким перигальным расстоянием образуют дугу, близкую к отрезку прямой.

Одним из наиболее распространенных методов для построения гало-орбит, да и вообще периодических орбит вблизи коллинеарных точек либрации, является аналитический метод теории возмущений — метод Линштедта–Пуанкаре, в котором орбиты представляются в виде рядов по степеням амплитуд орбит. Описание метода и подробности его применения для построения периодических орбит можно найти в монографии [30]. Существуют

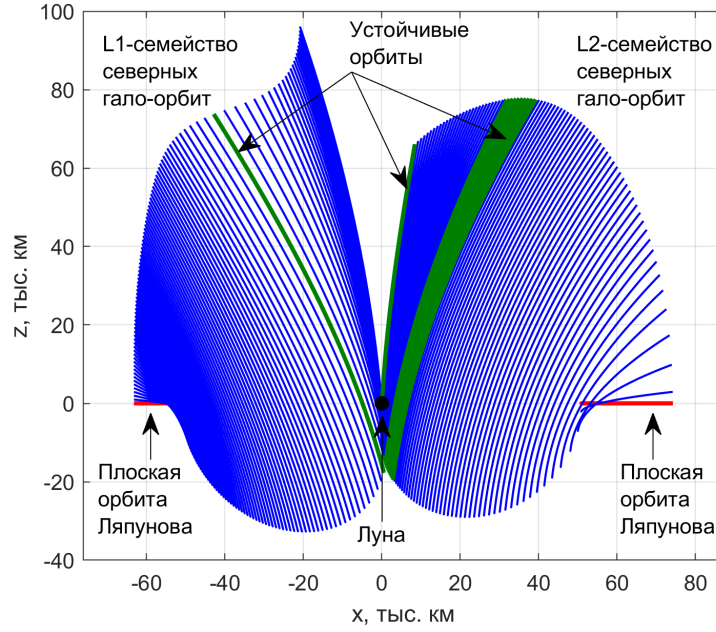


Рисунок 6 – Семейство северных гало-орбит вблизи коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 .

также численные методы построения гало-орбит, основанные на использовании методов параллельной пристрелки, методов продолжения по параметру и др. Обзор существующих методов можно найти в работе [31].

Перейдем к рассмотрению вопросов устойчивости периодических решений вблизи коллинеарных точек либрации. Систему уравнений (25) также можно переписать в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) \quad (26)$$

с нелинейной правой частью $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \partial U/\partial x + 2\dot{y}, \partial U/\partial y - 2\dot{x}, \partial U/\partial z]$ и фазовым вектором переменных $\boldsymbol{\xi}(t) = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$. Периодическое решение $\boldsymbol{\xi}_0(t), t \geq t_0$ нелинейной системы уравнений вида (26) называется орбитально устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что при

$$\|\boldsymbol{\xi}(t_0) - \boldsymbol{\xi}_0(t_0)\| < \delta$$

выполняется неравенство $\rho(\boldsymbol{\xi}(t), \Gamma) = \inf_{\boldsymbol{\xi}_0 \in \Gamma} \|\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\xi}_0\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$, где $\Gamma = \{\boldsymbol{\xi}_0 : \boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\xi}_0(t), t \geq t_0\}$. Если к тому же $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\boldsymbol{\xi}(t), \Gamma) = 0$, то решение асимптотически орбитально устойчиво. Для установления орбитальной устойчивости периодической орбиты используется теория Флоке.

Пусть $\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\xi}_{nom}(t)$ — номинальная фазовая кривая, соответствующая периодическому решению с периодом T , устойчивость которого исследуется. Отклонения фазового вектора $\delta\boldsymbol{\xi}(t) = [\delta\mathbf{r}, \delta\mathbf{v}]$ от номинальной фазовой кривой в разные моменты времени связаны между собой с помощью переходной матрицы линеаризованной относительно $\boldsymbol{\xi}_{nom}(t)$ системы:

$$\delta\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0) \delta\boldsymbol{\xi}(t_0), \quad (27)$$

матрица $\mathbf{M} = \boldsymbol{\Phi}(T)$ называется *матрицей монодромии*. Матрицу монодромии можно найти численным интегрированием системы

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_{nom}(t)} \boldsymbol{\Phi}(t)$$

на временном промежутке $[0, T]$ с начальным условием

$$\boldsymbol{\Phi}(0) = \mathbf{E}_{6 \times 6}.$$

Здесь $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})$ — правая часть нелинейной системы (26). Для определения устойчивости периодической орбиты необходимо вычислить собственные числа матрицы монодромии, которые называются мультипликаторами Флоке. Один из них всегда тождественно равен единице. Если все остальные мультипликаторы по модулю строго меньше единицы, то орбита является асимптотически устойчивой. Если хотя бы один из них по модулю превосходит единицу, то орбита является неустойчивой. Если же часть мультипликаторов лежит на единичной окружности комплексной плоско-

сти, а остальные — внутри нее, то в этом случае судить об устойчивости периодического решения по анализу лианеризованной системы нельзя, требуется также учитывать нелинейные члены правых частей уравнений (26). Такая ситуация называется критической, а соответствующее периодическое решение устойчивым в линейном приближении.

На рисунке 7 приведены значения десятичных логарифмов от максимального из модулей мультипликаторов Флоке для гало-орбит вокруг L_2 в зависимости от их периода. Зеленым цветом обозначено соответствующее

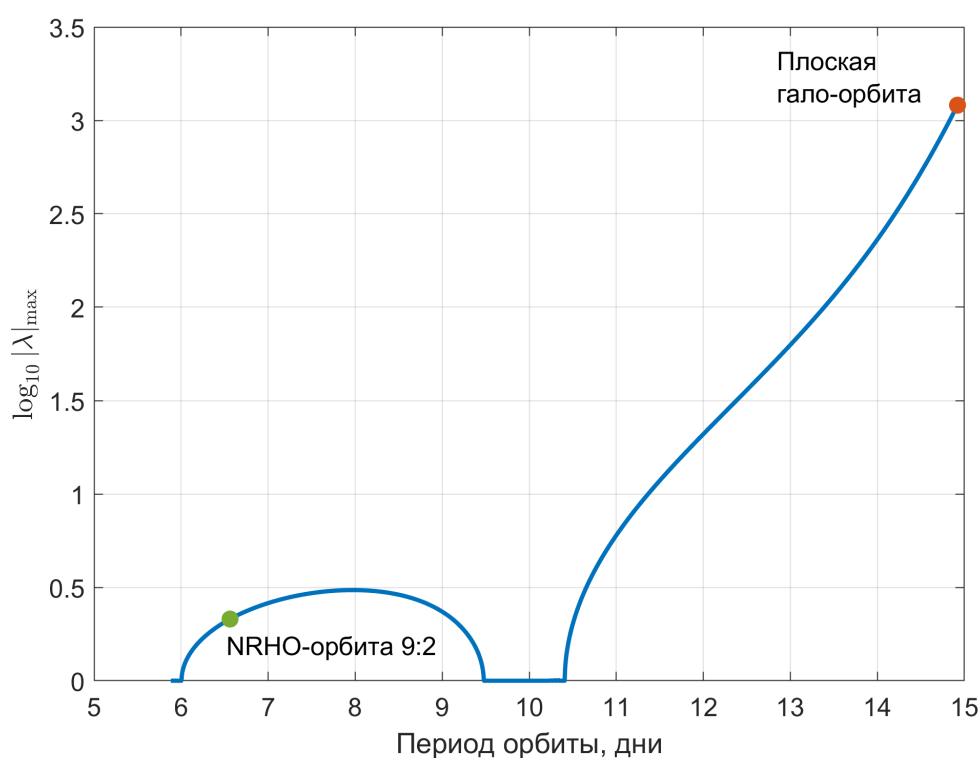


Рисунок 7 – Зависимость логарифма максимального из модулей мультипликаторов Флоке от периода орбиты для гало-орбит вокруг L_2 .

значение для основного кандидата на размещение окололунной станции — южной NRHO-орбиты L_2 9:2. Можно сделать вывод, что за исключением двух критических участков (соответствуют нулевому значению логарифма), NRHO-орбиты из L_2 -семейства неустойчивы. Один критический участок также присутствует для гало-орбит L_1 -семейства (см. рис. 6). Соответственно, почти прямолинейные гало-орбиты также необходимо корректировать

с некоторой периодичностью. Как уже было отмечено, годовые затраты на поддержание и частота коррекций являются определяющими факторами при выборе места размещения окололунной станции, их исследованию посвящена следующая глава.

2. Поддержание орбит

2.1. Высокоточная модель движения аппарата

Для точного моделирования движения небесных тел Солнечной системы используется эфемеридная модель движения. Основной системой координат эфемеридной модели движения является Международная небесная система координат (International Celestial Reference System, ICRS). Это инерциальная система координат, начало которой расположено в барицентре Солнечной системы, а положение осей фиксировано в пространстве относительно сотен внегалактических радиоисточников (квazarов), координаты которых определяются на основе радиоинтерферометрических наблюдений. Ее оси максимально близки к осям экваториальной системы эпохи J2000.0 (полдень 1 января 2000 года Земного времени), фундаментальной плоскостью которой является экваториальная плоскость Земли, ось абсцисс при этом направлена в точку весеннего равноденствия, ось аппликат сонаправлена с осью вращения Земли вокруг своей оси, ось ординат образует с ними правую тройку. Если начало отсчета поместить не в барицентр Солнечной системы, а в центр масс Луны, то такая система отсчета будет называться Селеноцентрической небесной системой координат (Selenocentric Celestial Reference System, SCRS).

Уравнения движения КА в системе SCRS с учетом притяжения некоторых $i = \overline{1, N}$ тел Солнечной системы и силы светового давления в общем виде можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}_m - \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} \right) + \mathbf{a}_{SRP}, \end{cases}$$

где \mathbf{r} и \mathbf{v} - радиус-вектор и скорость КА, \mathbf{g}_m — ускорение гравитационного

поля Луны; μ_i — гравитационный параметр i -ого тела Солнечной системы, \mathbf{r}_i — его радиус-вектор; \mathbf{a}_{SRP} — ускорение силы светового давления. Если в модели учитываются только центральные гравитационные поля Луны и Земли, то уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \mu_E \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_E}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_E|^3} + \frac{\mathbf{r}_E}{|\mathbf{r}_E|^3} \right), \end{cases} \quad (28)$$

где μ — гравитационный параметр Луны, μ_E — гравитационный параметр Земли, \mathbf{r}_E — радиус-вектор Земли.

Ориентация главных осей инерции Луны относительно осей SCRS задается углами Эйлера, которые также входят в состав эфемеридной информации. Для задания положения КА относительно поверхности Луны используется селеноцентрическая прямоугольная декартова система координат MER (Mean-Earth/Mean-Rotation) $Ox'y'z'$, фундаментальная плоскость $Ox'y'$ которой ортогональна усредненному направлению лунной оси вращения (ось Oz'), причем ось Ox' в среднем ориентирована на Землю.

2.2. Постановка задачи

В данной главе оцениваются годовые затраты характеристической скорости на поддержание окололунной орбиты со следующими параметрами:

- большая полуось $a = 11738$ км,
- наклонение $i = 90^\circ$ (система MER),
- долгота восходящего узла (система MER) в точке выхода на орбиту равна 0,
- эксцентриситет орбиты в точке выхода на орбиту равен 0.01.

Аргумент перицентра ω в точке выхода на орбиту выбирается оптимальным в смысле увеличения времени существования орбиты. Считается, что на

космический аппарат при движении по орбите действуют центральные гравитационные поля Луны и Земли. Для определения фазовых векторов Луны и Земли и ориентации главных осей инерции Луны относительно инерциальной системы SCRS используются эфемериды DE430. Подробное описание этой эфемеридной модели представлено в статье [32], а также на сайте [33]. Формулы перехода от главных осей инерции Луны к осям системы координат MER для данной модели можно также найти в [32]. Датой выхода КА на орбиту принимается 1 января 2028 года.

Рассматривается два сценария моделирования навигационных ошибок и ошибок исполнения маневра (см. табл. 1) для алгоритма двухимпульсной коррекции, определяется оптимальная периодичность коррекций.

Таблица 1 – Параметры моделей навигационных ошибок и ошибок исполнения корректирующих импульсов в задачах поддержания круговой полярной орбиты высотой 10 тыс. км и NRHO L_2 9:2. Для ошибок приведены 3σ -значения.

	Первый сценарий	Второй сценарий
Ошибка по положению, км	1	10
Ошибка по скорости, см/с	1	10
Относительная ошибка по величине импульса, %	1	3
Ошибка по направлению импульса, градусов	3	3
Минимально возможная величина импульса, мм/с	1.5	1.5

Полученные результаты сравниваются с затратами на поддержание почти прямолинейной гало-орбиты L_2 9:2.

2.3. Время существования орбиты

Как было показано выше, высокие круговые околополярные орбиты не являются устойчивыми. От выбора оскулирующих элементов в начальный момент времени зависит эволюция орбиты в дальнейшем. Произвольные

начальные данные для компонент вектора эксцентриситета e_x, e_y в рамках двукратно осредненной модели могут оказаться вблизи неустойчивого многообразия (красная прямая на рис. 4), что приведет к росту среднего значения эксцентриситета и быстрому разрушению орбиты. Если же выбрать начальные данные вблизи устойчивого многообразия (зеленая прямая на рис. 4), то сначала эксцентриситет будет уменьшаться, затем окажется в окрестности положения равновесия и лишь затем будет возрастать вдоль неустойчивого многообразия. Идея выбора начальных элементов орбиты вблизи устойчивого многообразия для высоких почти круговых орбит с большим наклоном с целью увеличения времени их существования была предложена в работах [26, 27]. При этом, чтобы в среднем двигаться вдоль устойчивого многообразия в полной неосредненной модели движения, необходимо выбрать начальные значения оскулирующих элементов так, они соответствовали устойчивому многообразию двукратно осредненной модели. Для этого, например, можно воспользоваться формулами замены переменных (18) или (19), полученными из преобразования Ли [27].

Рассмотрим как влияет выбор начальных оскулирующих элементов орбиты на время ее существования на численном примере. На рис. 8–10 продемонстрирована эволюция эксцентриситета высоких круговых полярных орбит при интегрировании уравнений движения (28) с различными начальными данными из табл. 2. Формулы перехода от орбитальных элементов к декартовым переменным \mathbf{r} и \mathbf{v} можно найти в монографии [34].

Таблица 2 – Начальные значения оскулирующих элементов орбиты (система MER). Дата начала движения 01.01.2028.

	a (км)	e	i °	Ω °	w °	M °
Сценарий № 1	11738	0.01	90	0	0	0
Сценарий № 2	11738	0.01	90	0	320.77	0
Сценарий № 3	11745	0.01	90.95	0	342.75	338.22

Рисунку 8 соответствуют произвольные начальные данные оскулирующего аргумента перицентра (первая строка табл. 2). В этом случае среднее значение эксцентриситета почти сразу начинает возрастать и утраивается приблизительно за 100 дней. Для рис. 9 начальное значение оскулирующего аргумента перицентра равно среднему значению на устойчивом многообразии двукратно осредненной модели движения (вторая строка табл. 2). Видно, что при этом среднее значение эксцентриситета сначала убывает и лишь потом начинает расти, достигая своего первоначального значения примерно через 60 дней. Если же трансформировать средние значения элементов орбиты, соответствующие устойчивому многообразию двукратно осредненной модели движения, по формулам (18) и взять полученные значения оскулирующих элементов в качестве начальных (третья строка табл. 2), то это время увеличится более, чем в два раза, а минимальное среднее значение эксцентриситета станет ближе к нулю (рис. 10). При

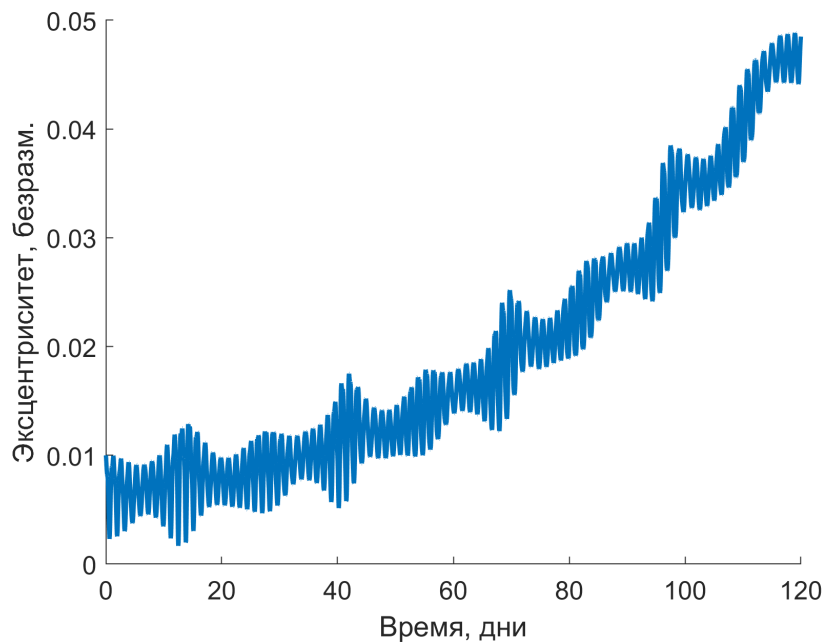


Рисунок 8 – Эволюция эксцентриситета орбиты при произвольно выбранных начальных данных.

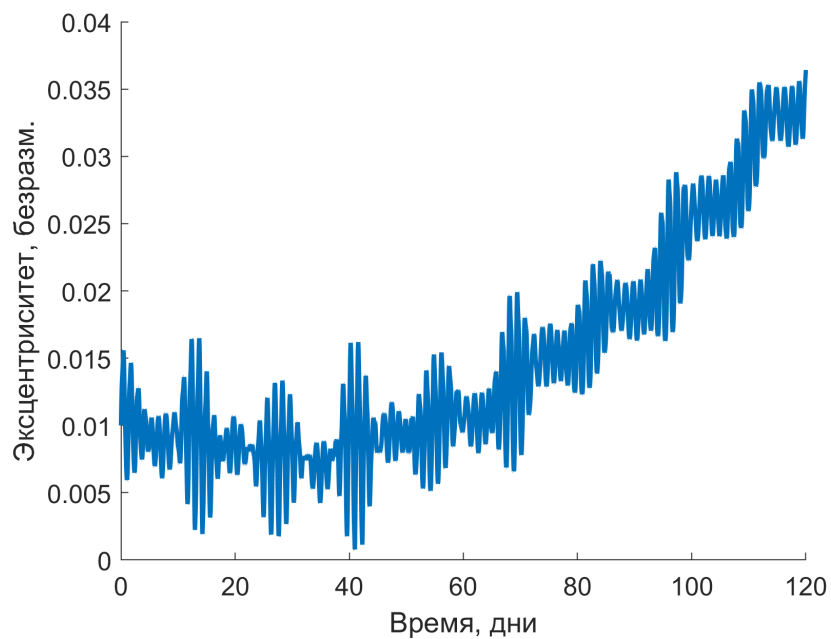


Рисунок 9 – Эволюция эксцентриситета орбиты, когда в качестве начальных значений оскулирующих элементов взяты средние элементы орбиты на устойчивом многообразии двукратно осредненной модели движения.

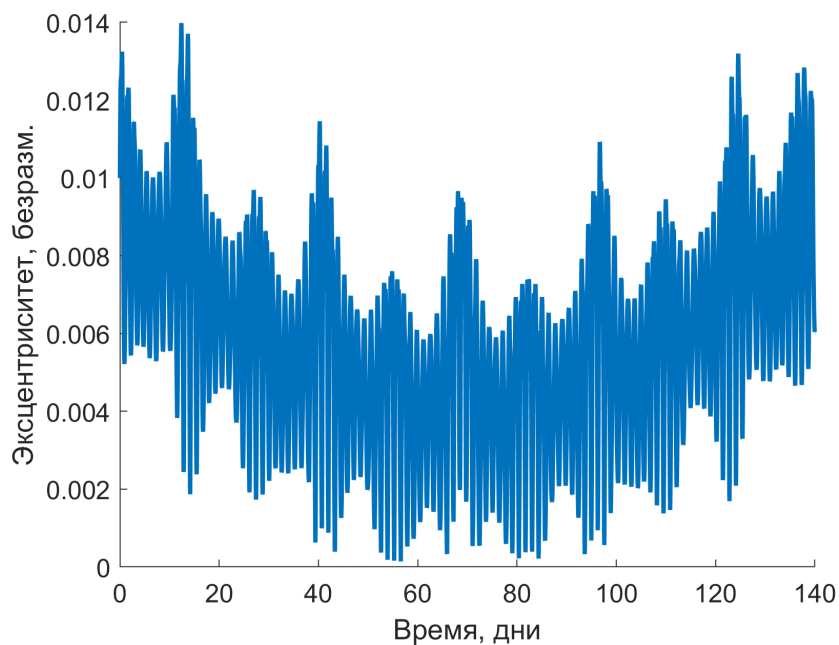


Рисунок 10 – Эволюция эксцентриситета орбиты, когда начальные значения оскулирующих элементов соответствуют устойчивому многообразию двукратно осредненной модели движения.

этом, как видно из рис. 11, изменение оскулирующих элементов e_x, e_y в

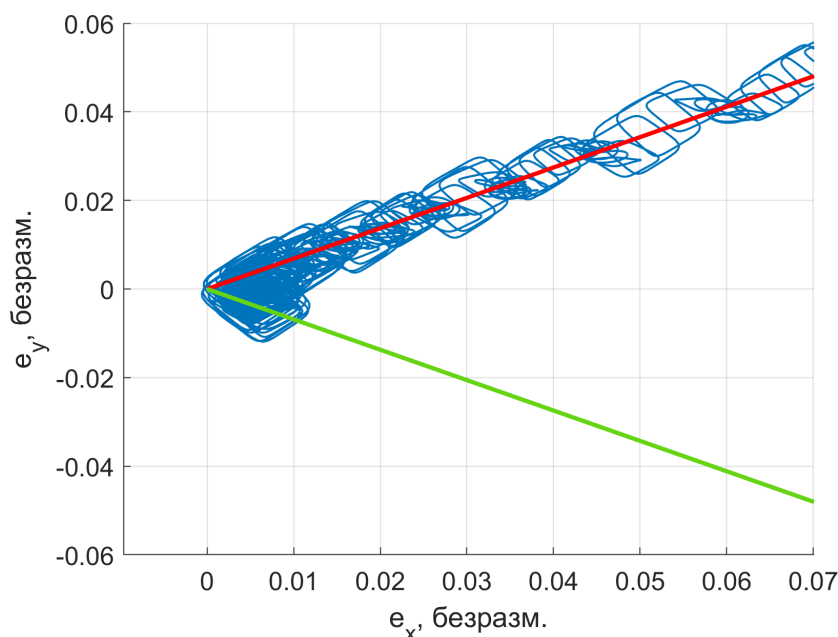


Рисунок 11 – Эволюция оскулирующих компонент вектора эксцентриситета e_x, e_y при выборе начальных данных вблизи устойчивого многообразия двукратно осредненной модели.

среднем происходит вдоль устойчивого, а затем неустойчивого многообразий двукратно осредненной системы. Такой подход к выбору начальных орбитальных элементов увеличивает время существования орбиты. Графики зависимости большой полуоси, эксцентриситета и наклона от времени на годовом интервале, соответствующие последнему сценарию, изображены на рис. 12–13. Из рисунков можно сделать вывод, что за год среднее значение большой полуоси не меняется, в то время как эксцентриситет практически достигает критического значения, при котором КА сталкивается с Луной. Среднее значение наклона относительно лунной поверхности (система координат MER) за год увеличивается примерно на 1 градус.

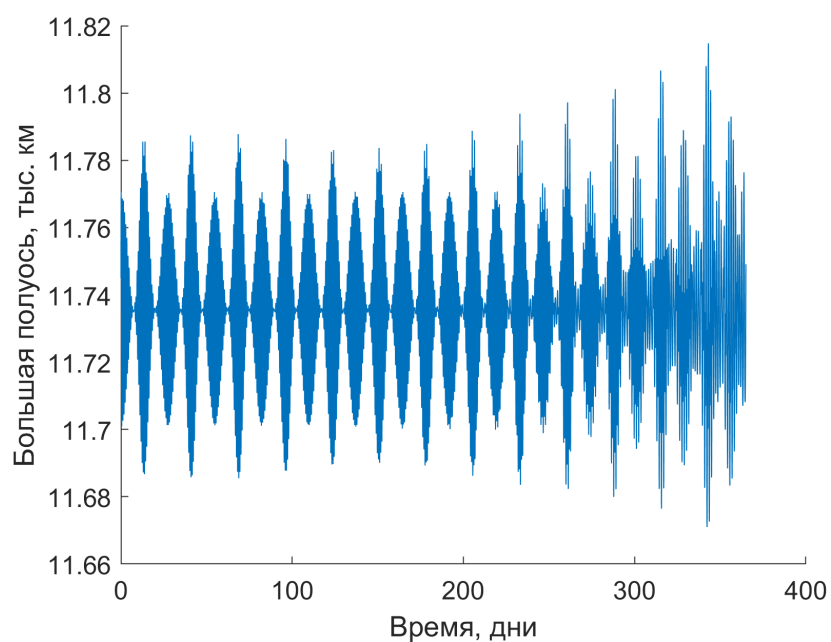


Рисунок 12 – Зависимость большой полуоси от времени для высокой круговой околополярной орбиты на годовом интервале времени.

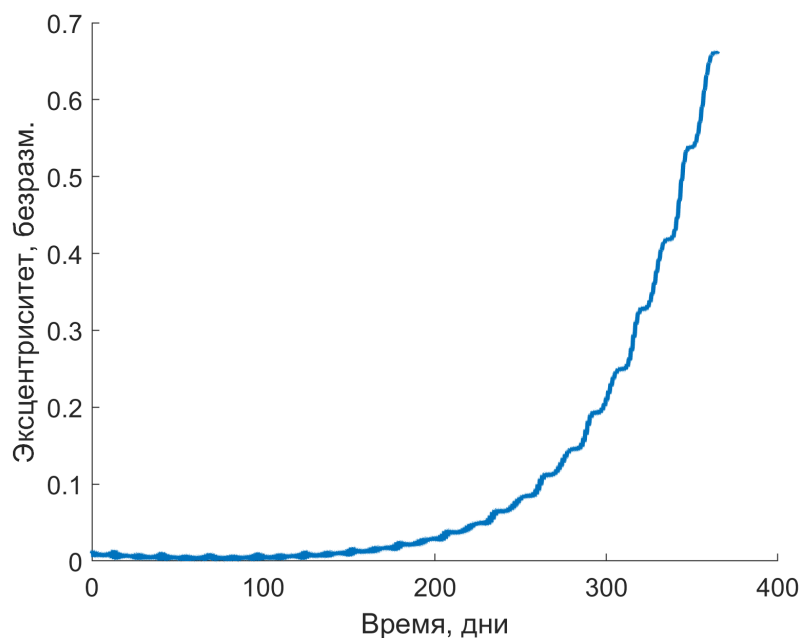


Рисунок 13 – Зависимость эксцентриситета от времени для высокой круговой околополярной орбиты на годовом интервале времени.

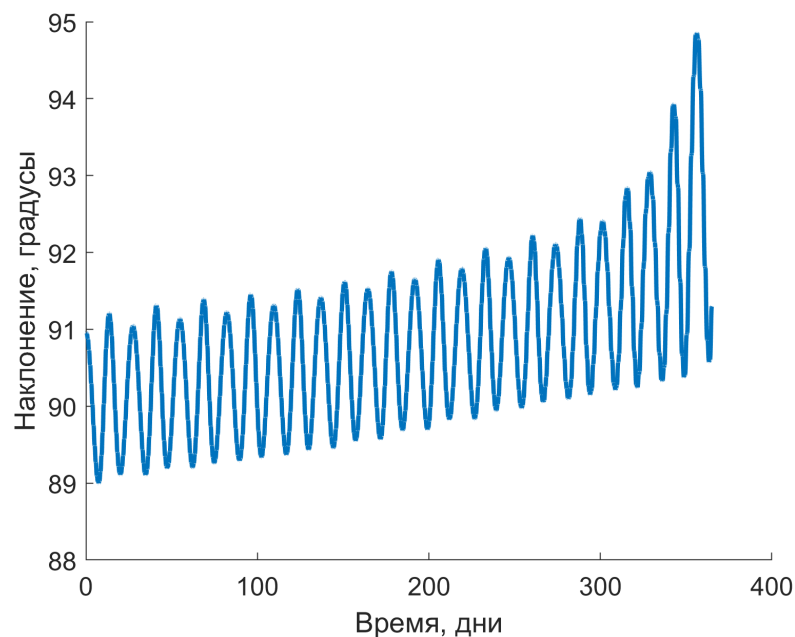


Рисунок 14 – Зависимость наклона от времени в системе MER для высокой круговой околополярной орбиты на годовом интервале времени.

2.4. Алгоритм поддержания высоких круговых орбит

В данной работе предлагается алгоритм поддержания высокой круговой околополярной орбиты вокруг Луны, основанный на использовании устойчивых и неустойчивых многообразий. Основная его идея заключается в следующем:

- в начальный момент времени средние элементы проектируемой орбиты выбираются на устойчивом многообразии в окрестности $e = 0$,
- по формулам (18) вычисляются соответствующие начальные данные для оскулирующих элементов орбиты; полученные значения оскулирующих элементов считаются номинальными,
- с некоторой периодичностью, кратной периоду изменения ДВУ, в системе координат MER, осуществляется оптимальная в плане затрат топлива двухимпульсная коррекция: после подачи второго импульса происходит нацеливание на номинальные оскулирующие элементы в лунной системе координат (MER),

- импульсы одной коррекции выдаются в пределах одного витка КА по орбите,
- если найденные импульсы меньше минимально допустимого значения, то они пропускаются.

Рассмотрим более подробно вопрос периодичности коррекций. Наибольшие затраты характеристической скорости требуются в случае коррекции наклона и долготы восходящего узла, так как при этом меняется положение плоскости орбиты в пространстве. Период изменения ДВУ в системе MER равен сидерическому периоду Луны и составляет 27.322 дня (см. рис. 15). За это время Луна совершает полный оборот вокруг Земли относи-

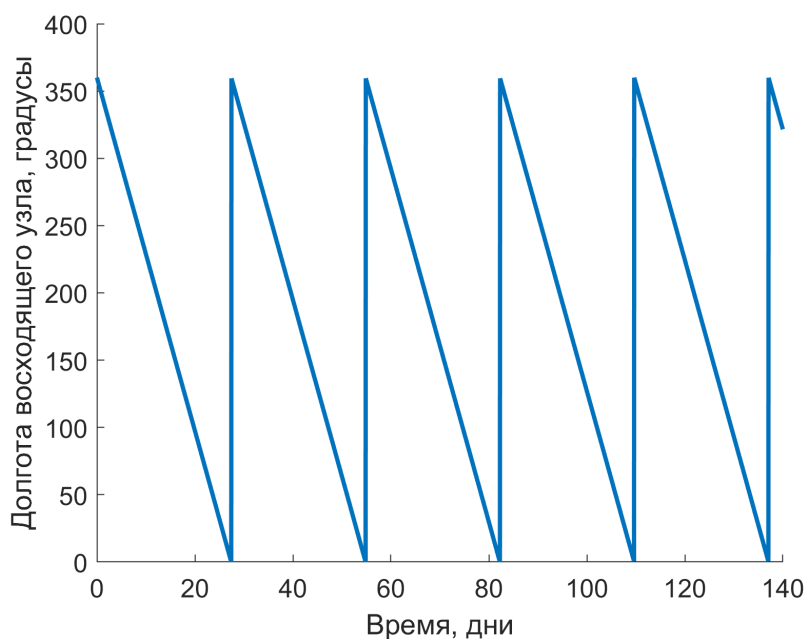


Рисунок 15 – Зависимость долготы восходящего узла от времени в системе MER для высокой круговой околополярной орбиты.

тельно неподвижных звезд. Период колебаний наклона примерно в два раза меньше (рис. 14). Это связано с тем, что в действительности плоскость орбиты Луны не совпадает с плоскостью лунного экватора, и дважды за лунный месяц Земля пересекает плоскость лунного экватора, возмущая орбиту КА. Таким образом, затраты топлива будут минимальны, если совершать коррекцию орбиты с периодичностью, кратной сидерическому периоду

Луны. Тогда ДВУ будет приблизительно равно начальному значению и его не нужно корректировать. Наклонение также будет вблизи первоначального значения (см. рис. 14), что потребует относительно небольших затрат на его коррекцию.

Задача поддержания высоких круговых орбит вокруг Луны в такой постановке сводится к решению задачи нелинейного программирования (Nonlinear Programming Problem, NLP).

Действительно, пусть τ — момент времени относительно начала движения, вблизи которого осуществляется двухимпульсная коррекция. В данном случае τ кратно периоду ДВУ. Период орбиты обозначим за T . Пусть импульсы $\Delta \mathbf{v}_1$ и $\Delta \mathbf{v}_2$ осуществляются в моменты времени t_1 и t_2 , причем $t_2 \geq t_1$ и $t_1, t_2 \in [\tau - T/2; \tau + T/2]$, то есть времена исполнения коррекций варьируются в пределах одного витка КА по орбите. Данные ограничения можно переписать в виде ограничений типа неравенства

$$\begin{aligned} \tau - T/2 + t_1 &\leq 0, \\ t_2 &\geq t_1, \\ t_2 - \tau - T/2 &\leq 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Кроме того необходимо, чтобы в момент времени t_2 после подачи второго импульса орбитальные элементы были равны номинальным оскулирующим элементам, откуда возникают следующие ограничения типа равенства:

$$\begin{aligned} e_x(t_2) &= e_{x_0}, \\ e_y(t_2) &= e_{y_0}, \\ a(t_2) &= a_0, \\ M(t_2) &= M_0, \\ i(t_2) &= i_0, \end{aligned} \tag{30}$$

где $e_{x_0}, e_{y_0}, a_0, M_0, i_0$ — номинальные значения орбитальных элементов. При этом так как τ кратно периоду ДВУ в системе МЕР, то, как показали вычисления, значение $\Omega(t_2)$ будет близким к Ω_0 .

Минимизация затрат топлива равносильна минимизации затрат характеристической скорости, поэтому, чтобы найти оптимальную двухимпульсную коррекцию, необходимо оптимизировать следующий функционал:

$$J(\Delta v_1, \Delta v_2) = \Delta v_1 + \Delta v_2 \longrightarrow \min, \quad (31)$$

где $\Delta v_i = |\Delta \mathbf{v}_i| = \sqrt{\Delta v_{iR}^2 + \Delta v_{iT}^2 + \Delta v_{iW}^2}$, $i = \overline{1, 2}$; индексы R, T и W обозначают радиальную, трансверсальную и бинормальную компоненты импульса. Переменными оптимизации при этом являются моменты времени t_1, t_2 , и радиальные, трансверсальные и бинормальные компоненты импульсов $\Delta \mathbf{v}_1$ и $\Delta \mathbf{v}_2$.

Таким образом, для нахождения оптимальной двухимпульсной коррекции на витке от $\tau - T/2$ до $\tau + T/2$ необходимо решить задачу нелинейного программирования с функционалом (31), ограничениями типа равенства (30) и ограничениями типа неравенства (29). С учетом навигационных ошибок и ошибок исполнения маневра алгоритм поддержания высокой круговой полярной орбиты можно сформулировать следующим образом:

1. В начальный момент времени t_0 КА выведен в номинальную точку орбиты \mathbf{x}_0 .
2. Пусть двухимпульсная коррекция должна быть выполнена вблизи момента времени τ . Уравнения движения (28) численно интегрируются из точки \mathbf{x}_0 на интервале времени от t_0 до τ . В окрестности полученной точки ищутся импульсы $\Delta \mathbf{v}_1$ и $\Delta \mathbf{v}_2$ и времена их подачи t_1 и t_2 , минимизирующие функционал (31) и удовлетворяющие ограничениям (30) и (29).
3. Далее идет этап моделирования ошибок измерения и ошибок испол-

нения маневров. К фазовому вектору КА в момент времени $\tau - T$ (незадолго до выполнения коррекции) прибавляется случайный вектор навигационных ошибок. Уравнения движения интегрируются из этой точки на интервале времени от $\tau - T$ до момента подачи первого импульса t_1 . Если рассчитанная величина импульса оказалась меньше минимально допустимого значения, то импульс $\Delta \mathbf{v}_1$ пропускается. В противном случае моделируется ошибка исполнения импульса по величине и направлению.

4. Полученный из процедуры оптимизации на втором шаге импульс коррекции $\Delta \mathbf{v}_1$ подается с учетом смоделированной ошибки исполнения. Затем траектория численно интегрируется от t_1 до момента подачи второго импульса t_2 . Импульс $\Delta \mathbf{v}_2$ пропускается, если его величина меньше минимально допустимого значения. Иначе моделируются ошибки исполнения импульса $\Delta \mathbf{v}_2$ по величине и направлению.
5. Импульс $\Delta \mathbf{v}_2$ подается с учетом смоделированной ошибки исполнения. Фазовый вектор КА, полученный после коррекций, считается новым начальным фазовым вектором \mathbf{x}_0 . В качестве t_0 принимается t_2 , $\tau = \tau + \Delta\tau$, где $\Delta\tau$ — периодичность коррекций. После этого алгоритм возвращается к шагу 2.

Дальнейшие результаты решения оптимизационных задач поиска импульсов коррекции и времен их подачи получены в среде MATLAB с помощью функции **fmincon** с алгоритмом *interior-point*, реализующим метод внутренней точки. Навигационные ошибки и ошибки исполнения импульсов по величине моделируются как нормальный случайный вектор с нулевыми средними и установленными среднеквадратичными отклонениями. Ошибка по направлению считается нормально распределенной в некотором конусе.

В табл. 3 приведена зависимость средних затрат характеристической скорости в год от периодичности коррекций для 300 испытаний метода Монте-Карло с параметрами из первого сценария модели навигационных

ошибок измерения и ошибок исполнения маневров табл. 1. Датой выхода КА на орбиту считается 01.01.2028, начальные данные соответствуют третьей строке табл. 2. Как видно из табл. 3, минимальные средние затраты характеристической скорости соответствуют периодичности коррекций 81.966 дней и составляют 20.547 ± 1.785 м/с/год. При этом за год необходимо совершить четыре коррекции. Более подробно выборка из 300 испытаний метода Монте-Карло для данной периодичности коррекций приведена на рис. 16 и 17. На рис. 18 и 19 также приведены графики зависимости эксцентриситета и наклона орбиты от времени для данной схемы коррекций. Видно, что при данной схеме поддержания средние значения эксцентриситета и наклона при движении по круговой полярной орбите высотой 10 тыс. км не меняются в течение года. Смена цвета на рисунках соответствует моментам применения импульса, различные цвета соответствуют различным пассивным участкам движения КА.

Таблица 3 – Оценки затрат характеристической скорости на поддержание круговой полярной орбиты высотой 10 тыс. км в зависимости от периодичности коррекций в 300 испытаниях Монте-Карло для первого сценария ошибок моделирования.

Периодичность коррекций, дни	Средние затраты характеристической скорости, м/с/год	Среднеквадратичное отклонение затрат характеристической скорости, м/с/год
54.644	25.088	3.656
81.966	20.547	1.785
109.288	22.190	3.941
136.610	23.923	3.480
163.932	30.528	5.648

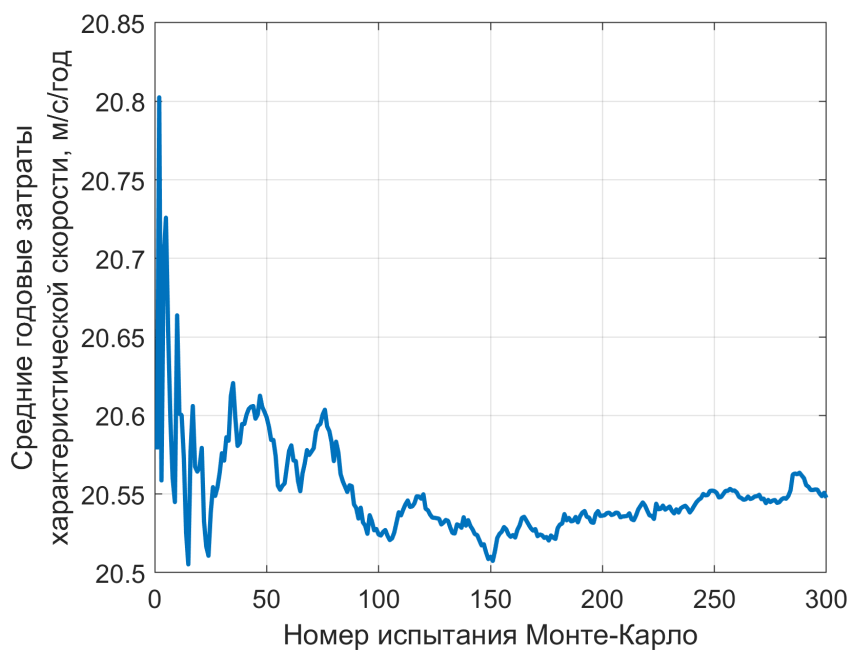


Рисунок 16 – Эволюция средних годовых затрат характеристической скорости на поддержание круговой полярной орбиты высотой 10 тыс. км в ходе проведения 300 испытаний Монте-Карло (первый сценарий ошибок).

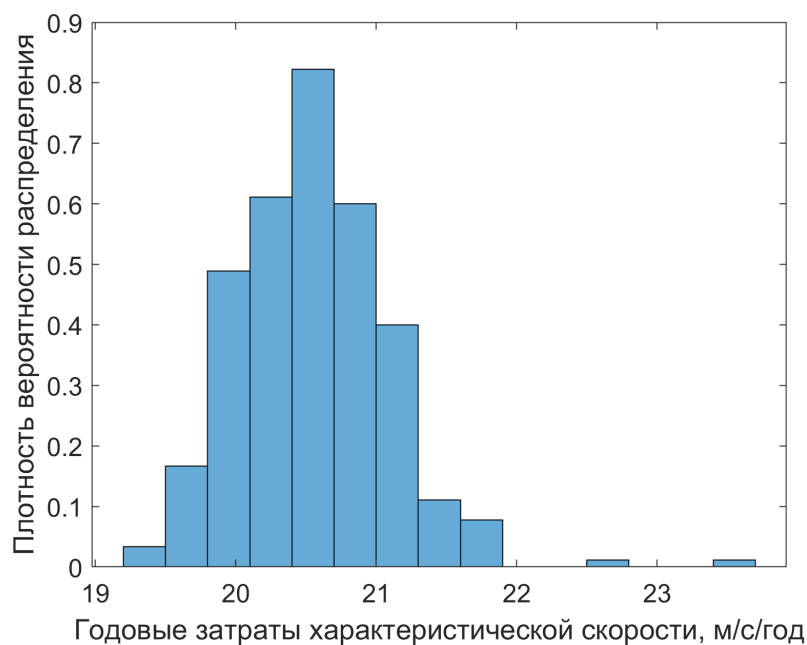


Рисунок 17 – Распределение годовых затрат характеристической скорости на поддержание круговой полярной орбиты высотой 10 тыс. км в ходе проведения 300 испытаний Монте-Карло (первый сценарий ошибок).

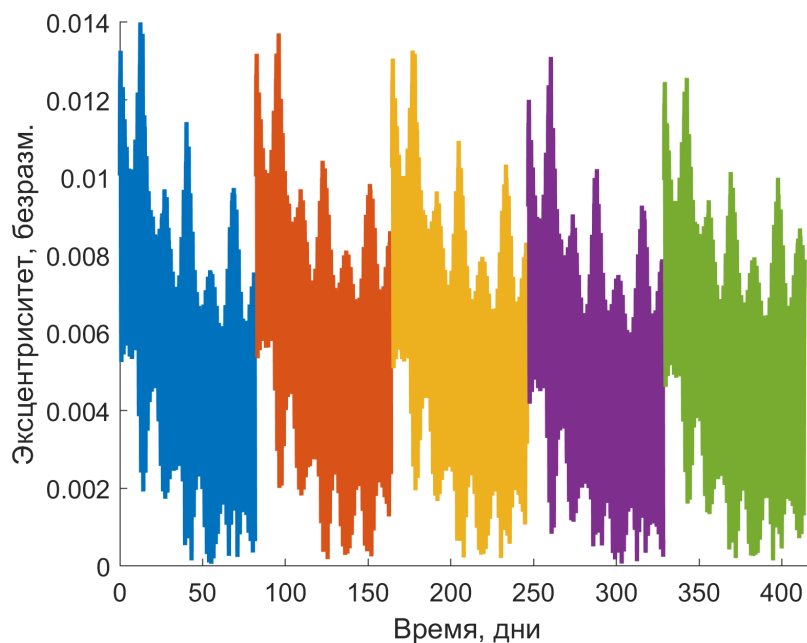


Рисунок 18 – Характерная зависимость эксцентриситета от времени при поддержании полярной круговой орбиты высотой 10 тыс. км. (первый сценарий ошибок).

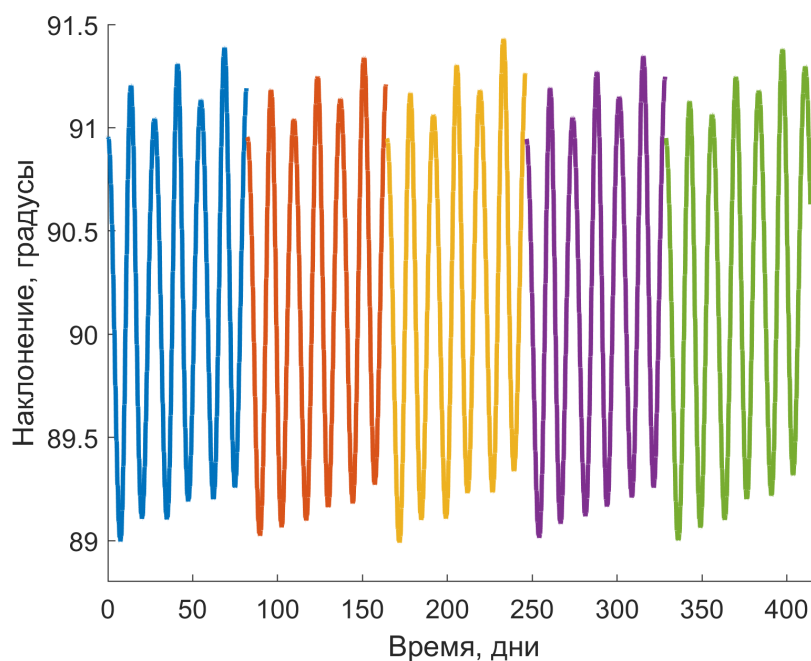


Рисунок 19 – Характерная зависимость наклонения от времени при поддержании полярной круговой орбиты высотой 10 тыс. км. (первый сценарий ошибок).

Графики средних затрат характеристической скорости за год и плотности вероятности ее распределения для данной схемы коррекций с периодичностью 81.966 дней, соответствующие второму сценарию ошибок табл. 1, приведены на рис. 20 и 21, соответственно. Среднее значение характеристической скорости в этом случае составило 27.921 ± 9.116 м/с/год. Это примерно на 8 м/с/год больше, чем для первого сценария табл. 1. Однако, среднеквадратичное отклонение достаточно большое и, как видно из рис. 21, в некоторых случаях затраты характеристической скорости возрастают более, чем в два раза.

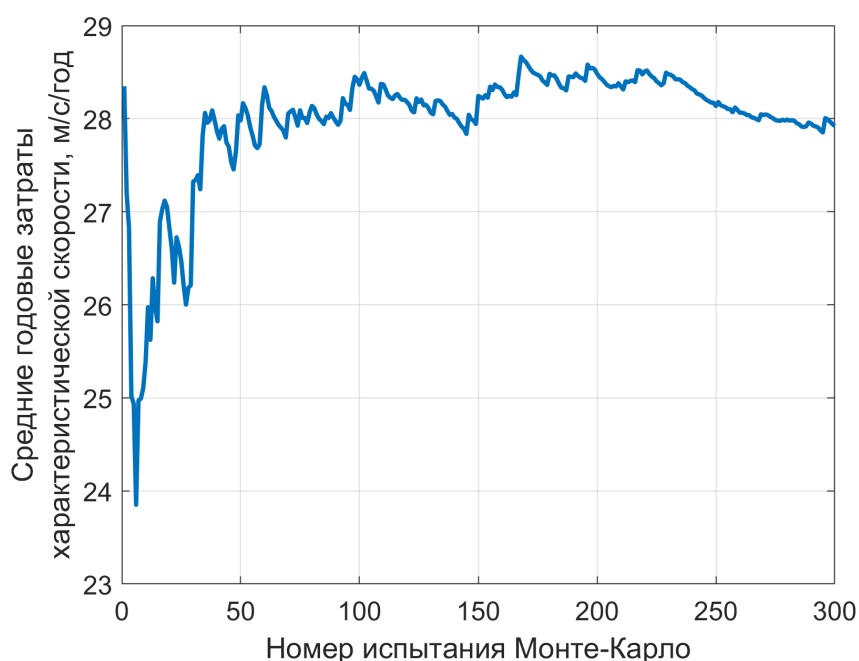


Рисунок 20 – Эволюция средних годовых затрат характеристической скорости на поддержание круговой полярной орбиты высотой 10 тыс. км в ходе проведения 300 испытаний Монте-Карло (второй сценарий ошибок).

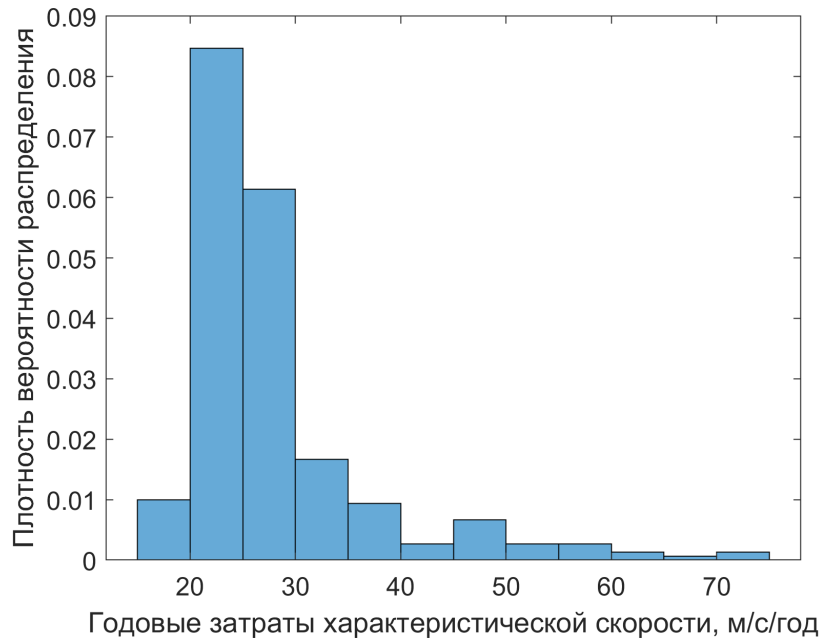


Рисунок 21 – Распределение годовых затрат характеристической скорости на поддержание круговой полярной орбиты высотой 10 тыс. км в ходе проведения 300 испытаний Монте-Карло (второй сценарий ошибок).

2.5. Алгоритм поддержания NRHO-орбит

На сегодняшний день известно много различных методов поддержания периодических орбит вблизи коллинеарных точек либрации. Подробный обзор этих методов можно найти в работах [13, 35]. Условно все из них можно разделить на две категории: к первой относятся методы, использующие математический аппарат теории управления и основанные на расчете различных характеристик неустойчивости типа мод Флоке, ко второй — общие методы теории управления, адаптированные к конкретной задаче стабилизации неустойчивых орбит в окрестности точек либрации.

Методы первой категории плохо подходят для поддержания NRHO-орбит, так как эти орбиты обладают слабой неустойчивостью (см. раздел 1.5), в связи с чем требуемые характеристики неустойчивости могут быть определены со значительными численными ошибками или вовсе не могут быть вычислены. В этом случае целесообразно пользоваться методами второй

категории. Одним из наиболее простых и эффективных является метод целевых величин. Его идея заключается в нацеливании на значения конкретных параметров в заданных точках орбиты через некоторое количество витков.

Данный метод успешно применялся в роботизированной миссии «WIND» к коллинеарным точкам либрации системы Солнце–Земля, реализованной NASA в 1994 году и предназначенной для изучения солнечного ветра и его взаимодействия с поверхностью Земли [36]. А также в лунной миссии NASA под названием «ARTEMIS» [37], направленной на изучение магнитосферы Земли. «ARTEMIS» — это первая миссия по выводу КА на либрационные орбиты системы Земля–Луна. Космические аппараты ARTEMIS P1 и ARTEMIS P2 находились на промежуточных периодических орбитах вблизи L_1 и L_2 с 25 августа 2010 года по 22 июня 2011 года и с 22 октября 2010 года по 17 июля 2011 года, соответственно. В обеих миссиях «WIND» и «ARTEMIS» аппараты были выведены на орбиты Лиссажу [29], в качестве целевой величины при этом использовалась x -компонента скорости в точках пересечения орбит с плоскостью вращающейся системы координат $O'xyz$ [36, 37].

Как показано в статье [13], в случае NRHO-орбит, наиболее надежным алгоритмом, обеспечивающим самые низкие затраты на поддержание является алгоритм нацеливания на номинальную x -компоненту скорости в перицентре спустя некоторое количество витков N' , при этом импульс коррекции необходимо подавать в апоцентре. Подробное описание данного метода целевых величин с учетом навигационных ошибок измерений, а также зависимость затрат характеристической скорости от N' можно найти в работах [13] и [16].

В данном разделе приводятся результаты поддержания южной почти прямолинейной гало-орбиты L_2 9 : 2 следующим методом:

1. В начальный момент считается, что КА выведен в окрестность апосе-

ления номинальной NRHO-орбиты, тем самым моделируется ошибка входа на орбиту.

2. В начальной точке ищется импульс, минимизирующий невязку между получаемым из численного интегрирования в полной модели и номинальными значениями x -компоненты скорости через $N' = 2.5$ витка.
3. К начальному фазовому вектору прибавляется вектор навигационных ошибок, смоделированный как нормальный случайный вектор, с нулевыми средними и установленными среднеквадратичными отклонениями. Если рассчитанная величина импульса оказалась меньше минимально допустимого значения, то импульс пропускается. В противном случае моделируется ошибка исполнения импульса по величине и направлению. Распределение ошибки считается нормальным, с нулевыми средними и установленными среднеквадратичными отклонениями. Ошибка по направлению считается нормально распределенной в некотором конусе.
4. Полученный из процедуры оптимизации на втором шаге импульс коррекции применяется с учетом смоделированной ошибки исполнения. Затем траектория численно интегрируется до ближайшего пересечения, а затем до следующего апоселения. После этого алгоритм возвращается к шагу 2.

Результаты моделирования с учетом навигационных ошибок измерений из табл. 1 для 300 испытаний метода Монте-Карло приведены на рис. 22–23 (первый сценарий) и рис. 24–25 (второй сценарий). Видно, что полученные годовые затраты характеристической скорости на поддержание NRHO-орбиты L_2 9:2 увеличиваются в 10 раз при соответствующем увеличении ошибок. Однако, даже при втором сценарии навигационных ошибок и ошибок исполнения маневра затраты на поддержание гало-орбиты на порядок меньше соответствующих для почти круговой полярной орбиты

высотой 10 тыс. км. Средние затраты характеристической скорости на поддержание NRHO-орбиты L_2 9:2 с помощью вышеописанного алгоритма составляют 0.246 ± 0.024 м/с/год и 2.183 ± 0.225 м/с/год для первого и второго сценария, соответственно. При этом коррекции гало-орбиты необходимо совершать значительно чаще, чем в случае с высокой окололунной орбитой. Рассмотренный алгоритм поддержания NRHO-орбит предполагает коррекцию на каждом витке, то есть приблизительно каждые 7 дней.

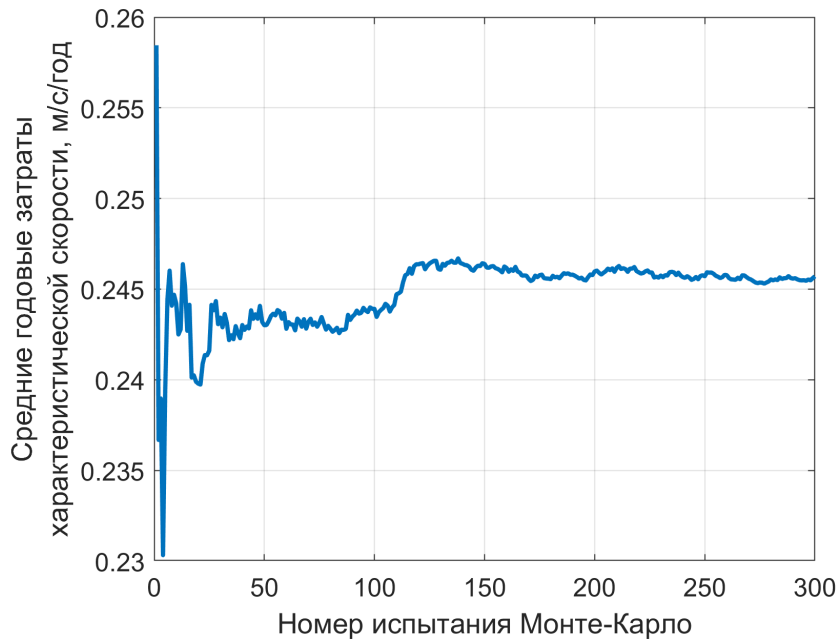


Рисунок 22 – Эволюция средних годовых затрат характеристической скорости на поддержание L_2 -орбиты 9:2 в ходе проведения 300 испытаний Монте-Карло (первый сценарий ошибок).

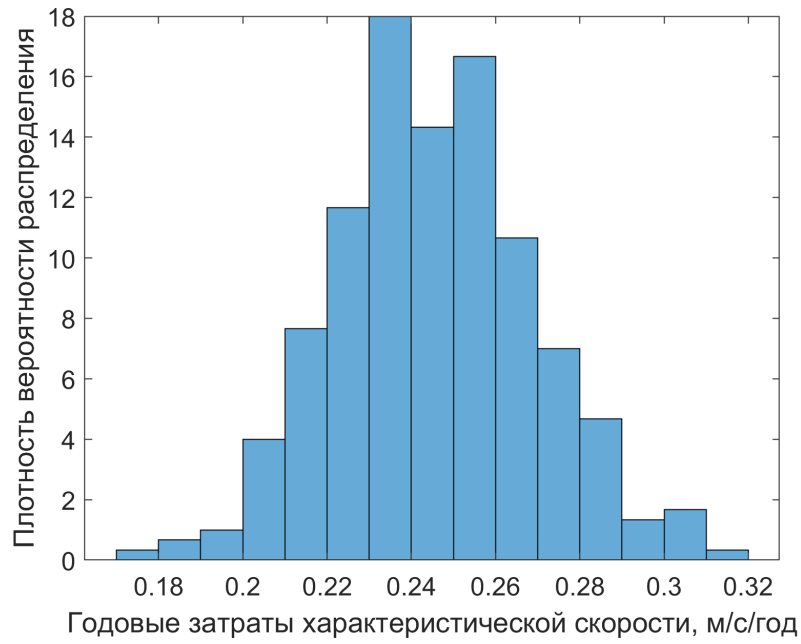


Рисунок 23 – Распределение годовых затрат характеристической скорости на поддержание L_2 -орбиты 9:2 в серии из 300 испытаний Монте-Карло (первый сценарий ошибок).

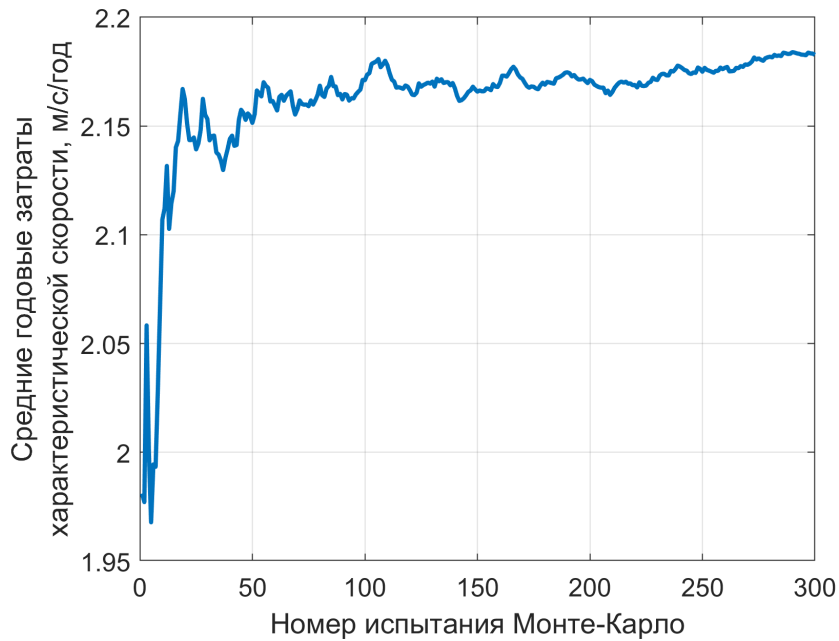


Рисунок 24 – Эволюция средних годовых затрат характеристической скорости на поддержание L_2 -орбиты 9:2 в ходе проведения 300 испытаний Монте-Карло (второй сценарий ошибок).

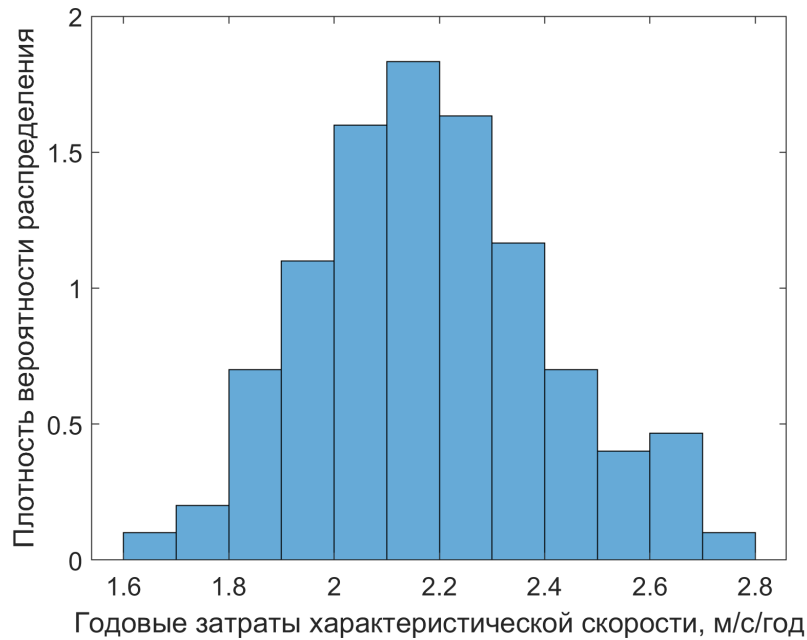


Рисунок 25 – Распределение годовых затрат характеристической скорости на поддержание L_2 -орбиты 9:2 в серии из 300 испытаний Монте-Карло (второй сценарий ошибок).

Заключение

В ходе работы была исследована устойчивость высоких почти круговых околополярных орбит вокруг Луны высотой 10 тыс. км. Исследование устойчивости проводилось с помощью двукратно осредненных уравнений движения. Устойчивыми считались орбиты, у которых отсутствовал вековой дрейф эксцентриситета, наклона и аргумента перицентра. Анализ двукратно осредненных уравнений показал, что рассматриваемые орбиты не являются устойчивыми в этом смысле. Эксцентриситет таких орбит в некоторый момент начинает неограниченно расти, в то время как большая полуось в среднем не меняется, что в конечном итоге приводит к столкновению КА с Луной. При этом время, за которое эксцентриситет меняется в $e \approx 2.718$ раз, составляет примерно 50 дней.

На основании исследования вековой эволюции орбит был предложен и реализован алгоритм их поддержания. В работе были получены необходи-

мые затраты характеристической скорости на поддержание почти круговой околополярной орбиты вокруг Луны высотой 10 тыс. км в течение года с учетом навигационных ошибок измерений и ошибок исполнения маневра. Годовые затраты характеристической скорости составили более 20 м/с, что на один-два порядка выше, чем для почти прямолинейной гало-орбиты L_2 9:2. Что касается периодичности коррекций, высокие круговые орбиты можно корректировать раз в несколько месяцев, в то время как почти прямолинейные гало-орбиты необходимо корректировать на каждом витке (примерно каждые 7 дней).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] International Space Exploration Coordination Group: URL: <http://www.globalspaceexploration.org/wordpress/> (дата обращения: 18.06.2019).
- [2] Laurini, K., Hufenbach, B., Hill, J., and Ouellet, A. *The Global Exploration Roadmap and Expanding Human/Robotic Exploration Mission Collaboration Opportunities*, IAF 66th International Astronautical Congress, Jerusalem, Israel, October 12-16, 2015, 9 p.
- [3] Hufenbach, B. et al. *International Missions to Lunar Vicinity and Surface — Near-Term Mission Scenario of the Global Space Exploration Roadmap*, IAF 66th International Astronautical Congress, Jerusalem, Israel, October 12-16, 2015, 11 p.
- [4] Global Exploration Roadmap 2018: URL: https://www.nasa.gov/sites/default/files/atoms/files/ger_2018_small_mobile.pdf (дата обращения: 18.06.2019).
- [5] Tracy, J. *Lunar Orbital Platform-Gateway*, 45th Space Congress Proceedings, Cape Canaveral, Florida, USA, February 27-March 1, 2018, 27 p.
- [6] Gateway Memorandum for the Record: URL: https://www.nasa.gov/sites/default/files/atoms/files/gateway_domestic_and_international_benefits-memo.pdf (дата обращения: 12.05.2019).
- [7] Роскосмос — NASA. Совместные исследования дальнего космоса: URL: <https://www.roscosmos.ru/24136/> (дата обращения: 18.06.2019).

- [8] ESA. Gateway to the Moon: URL: https://www.esa.int/Our_Activities/Human_and_Robotic_Exploration/Gateway_to_the_Moon (дата обращения: 18.06.2019).
- [9] NASA — JAXA Joint Statement on Space Exploration: URL: http://global.jaxa.jp/press/2018/01/20180126_nasa.html (дата обращения: 18.06.2019).
- [10] Лидов М.Л. *Об одном семействе пространственных периодических орбит около Луны и планет*, Доклады академии наук СССР, 1977, Т. 223, №. 6, с. 1068–1071.
- [11] Breakwell, J. and Brown, J. *The “Halo” Family of 3-Dimensional Periodic Orbits in the EarthMoon Restricted 3-body Problem*, Celestial Mechanics, 1979, Vol. 20, No. 4, pp. 389–404.
- [12] Williams, J. et al. *Targeting Cislunar Near Rectilinear Halo Orbits for Human Space Exploration*, 27th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, San Antonio, TX, USA, February 5-9, 2017, Paper AAS 17-267, 20 p.
- [13] Guzzetti, D. et al. *Stationkeeping analysis for spacecraft in lunar near rectilinear halo orbits*, 27th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, San Antonio, Texas, USA, February 5-9, 2017, 20 p.
- [14] Howell, K., Breakwell, J. *Almost rectilinear halo orbits*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1984, Vol. 32, No. 1, pp. 29–52.
- [15] Zimovan, E., Howell, K., and Davis, D. *Near Rectilinear Halo Orbits and Their Application in Cis-Lunar Space*, 3rd IAA Conference on Dynamics and Control of Space Systems, Moscow, Russia, May 30–June 1, 2017, Paper IAA-AAS-DyCoSS3-125, 20 p.

- [16] Davis, D. et al. *Orbit maintenance and navigation of human spacecraft at cislunar near rectilinear halo orbits*, 27th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, San Antonio, Texas, USA, February 5-9, 2017, 20 p.
- [17] Grebow, D. et al. *Multibody orbit architectures for lunar south pole coverage*, Journal of Spacecraft and Rockets, 2008, Vol. 45, No. 2., pp. 344–358.
- [18] Прохорова Е.С., Муртазин Р.Ф. *Оценка энергетических затрат транспортной системы для обслуживания окололунной станции*, Сборник Тезисов XLIII Академических Чтений по Космонавтике, г. Москва, Россия, 29 января-1 февраля, 2019, Т. 1, с. 366.
- [19] Целоусова А.А., Ширококов М.Г., Трофимов С.П. *Анализ перелетов с низких околоземных орбит на высокие круговые околополярные орбиты вокруг Луны*, Сборник Тезисов XLIII Академических Чтений по Космонавтике, г. Москва, Россия, 29 января-1 февраля, 2019, Т. 1, с. 113.
- [20] Lidov, M.L. *The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies*, Planetary and Space Science, Vol. 9, No. 10, 1962, pp. 719–759.
- [21] Kozai, Y. *Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity*, The Astronomical Journal, Vol. 67, No. 9, 1962, pp. 591–598.
- [22] Deprit, A. *Canonical transformations depending on a small parameter*, Celestial Mechanics, Vol. 1, No. 1, 1969, pp. 12-30.
- [23] Nie, T., Gurfil, P. *Lunar frozen orbits revisited*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 130, No. 10, 2018, p. 61.

- [24] Cinelli, M., Ortore, E., Circi, C. *Long Lifetime Orbits for the Observation of Europa*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 42, No. 1, 2018, pp. 123-135.
- [25] Possner, M., Scheeres, D. *Control of science orbits about planetary satellites*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 32, No. 1, 2009, pp. 223-231.
- [26] Paskowitz, M., Scheeres, D. *Design of science orbits about planetary satellites: application to Europa*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 29, No. 5, 2006, pp. 1147-1158.
- [27] Lara, M. *Simplified equations for computing science orbits around planetary satellites*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 31, No. 1, 2008, pp. 172-181.
- [28] Abad, A., Elipe, A., Tresaco, E. *Analytical model to find frozen orbits for a lunar orbiter*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 32, No. 3, 2009, pp. 888-898.
- [29] Doedel, E. et al. *Elemental periodic orbits associated with the libration points in the circular restricted 3-body problem*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 17, No. 8, 2007, pp. 2625-2677.
- [30] Gómez, G., Llibre, J., Martínez, R., Simó, C. *Dynamics and Mission Design Near Libration Points. Vol. I Fundamentals: The Case of Collinear Libration Points*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001, 464 p.
- [31] Ширококов М.Г. *Баллистико-навигационные аспекты миссий малых космических аппаратов к Луне и точкам либрации*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша (РАН), 2017.

- [32] Folkner, W., Williams, J., Boggs, D. et al. *The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431*, IPN Progress Report 42-196, 2014, 81 p.
- [33] JPL Planetary and Lunar Ephemerides. URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/?planet_eph_export (дата обращения: 18.06.2019).
- [34] Мирер С.А. *Механика космического полета. Орбитальное движение* М.: Резолит, 2007. 270 с.
- [35] Shirobokov, M., Trofimov, S., Ovchinnikov, M. *Survey of Station-Keeping Techniques for Libration Point Orbits*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 40, No. 5, 2017, pp. 1085–1105.
- [36] Brown, J., Petersen, J. *Applying dynamical systems theory to optimize libration point orbit stationkeeping maneuvers for WIND*, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, 2014, 12 p.
- [37] Folta, D. et al. *Earth–Moon libration point orbit stationkeeping: theory, modeling, and operations*, Acta Astronautica, Vol. 94, No. 1, 2014, pp. 421-433.