

# Моделирование гравитационного потенциала астероидов с неоднородными включениями

Студентка: А.С. Юдицкая, 6 курс ФПМИ

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. С.С. Ткачев

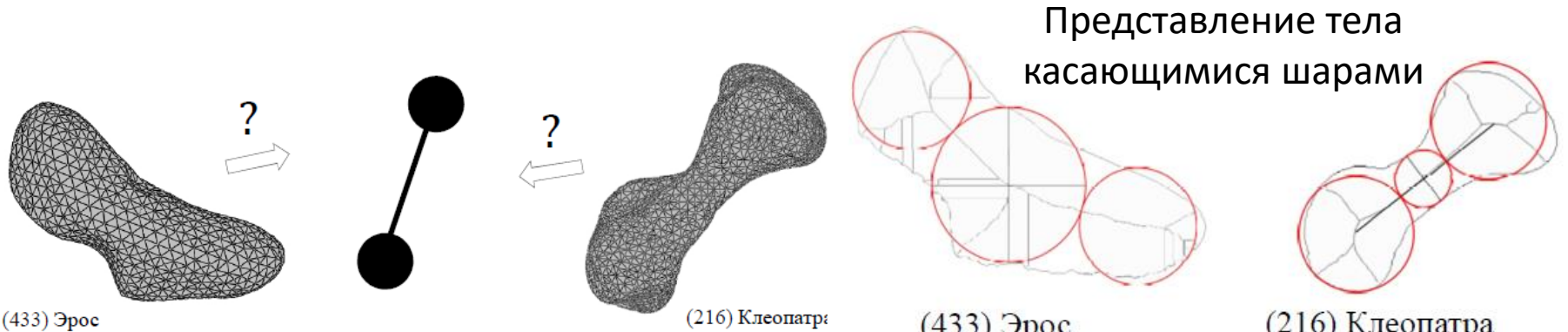
# Содержание

1. Введение
2. Постановка задачи
3. Сравнение методов для однородного астероида
4. Методика вычисления потенциала для неоднородного астероида
5. Влияние неоднородного включения
6. Заключение

# Введение

- Для задач сближения и исследования астероидов требуется уметь моделировать гравитационный потенциал
- Астероиды обладают сложной формой и могут иметь неоднородности

# Подходы к описанию гравитационного потенциала



## Гравитирующая гантель

Xiangyuan Zeng, Fanghua Jiang, Junfeng Li, Hexi Baoyin  
 STUDY ON THE CONNECTION BETWEEN THE ROTATING MASS DIPOLE  
 AND NATURAL ELONGATED BODIES

Представление тела  
 касающимися шарами

(433) Эрос  
 (216) Клеопатра  
 Elisabet Herrera Sucarrat  
 THE FULL PROBLEM OF TWO AND THREE BODIES:  
 APPLICATION TO ASTEROIDS AND BINARIES

Представление через тензоры  
 Эйлера-Пуансо

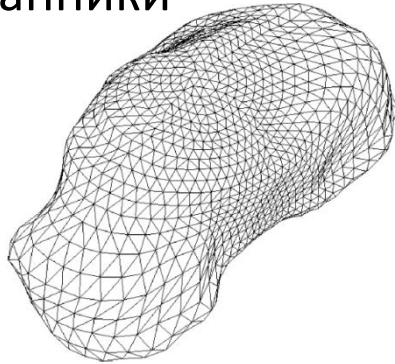
$$J_{k_1 k_2 k_3} = \int_B \rho(\mathbf{x}) x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} d\mathbf{x}$$

$$k = k_1 + k_2 + k_3$$

Poinsot L. Théorie nouvelle de la rotation des corps

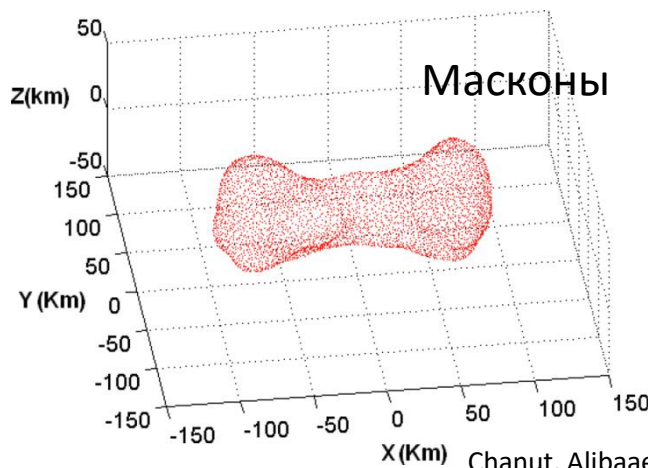
# Подходы к описанию гравитационного потенциала

## Многогранники



R. Werner

The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners



Chanut, Aljbaae, Carruba

Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source

## Модель сферических гармоник

$$U = \frac{G}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l[\sin(\theta)]}{r^l} C_{l,0} + \frac{G}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{P_{l,m}[\sin(\theta)]}{r^l} \{C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi)\}$$

D. Vallado

Fundamentals of astrodynamics and applications.

# Постановка задачи

Дано:

- форма тела, заданная с помощью поверхностной сетки
- масса тела
- форма неоднородного включения
- плотность неоднородного включения

# Постановка задачи

## Задачи:

1. Сравнить три наиболее известных метода для однородных астероидов
2. Искусственно добавить в астероид неоднородное включение
3. Вычислить потенциал и ускорение в заданных точках
4. Изучить влияние неоднородности на потенциал и ускорение

# Модель многогранника

$$U = G\sigma \sum_{\text{faces}} U_{\text{triangle}}$$

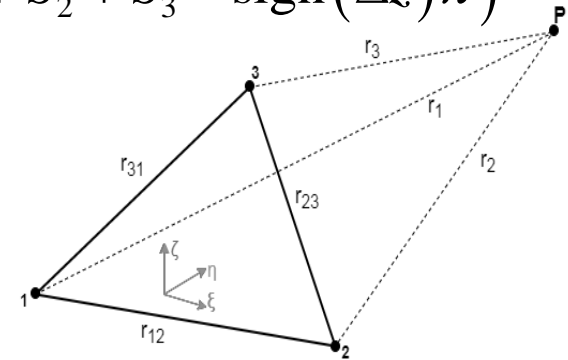
$$U_{\text{triangle}} = \frac{\Delta z}{2} (\det_{12} L_{12} + \det_{23} L_{23} + \det_{31} L_{31}) - \frac{\Delta z^2}{2} (S_1 + S_2 + S_3 - \text{sign}(\Delta z) \pi)$$

$$\mathbf{a} = -\nabla U = -G\sigma \sum_{\text{faces}} \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial U_{\text{triangle}}}{\partial x} & \frac{\partial U_{\text{triangle}}}{\partial y} & \frac{\partial U_{\text{triangle}}}{\partial z} \end{pmatrix}^T$$

$$\frac{\partial}{\partial x} U_{\text{triangle}} = -\frac{\Delta z}{2} ((\eta_2 - \eta_1) L_{12} + (\eta_3 - \eta_2) L_{23} + (\eta_1 - \eta_3) L_{31})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} U_{\text{triangle}} = \frac{\Delta z}{2} ((\xi_2 - \xi_1) L_{12} + (\xi_3 - \xi_2) L_{23} + (\xi_1 - \xi_3) L_{31})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} U_{\text{triangle}} = -\frac{1}{2} (\det_{12} L_{12} + \det_{23} L_{23} + \det_{31} L_{31}) + \Delta z (S_1 + S_2 + S_3 - \text{sign}(\Delta z) \pi)$$



$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$  – матрица перехода  
СК тела  $\rightarrow$  СК грани



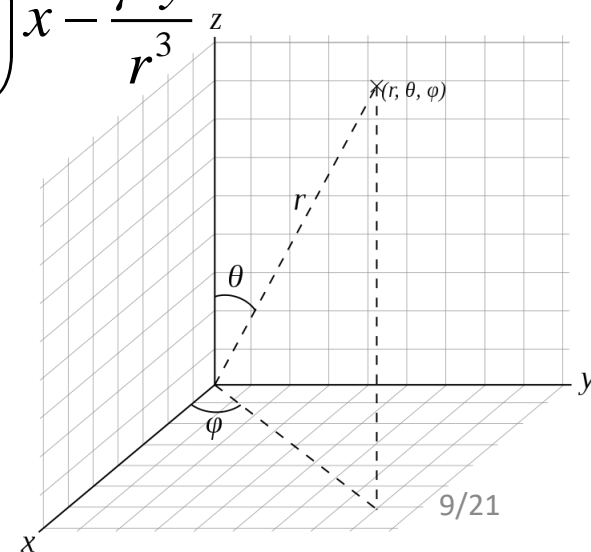
# Модель сферических гармоник

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{G}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{1}{r^l} P_{l,m} [\sin(\theta)] \{ C_{l,m} \cos(m\varphi) + S_{l,m} \sin(m\varphi) \}$$

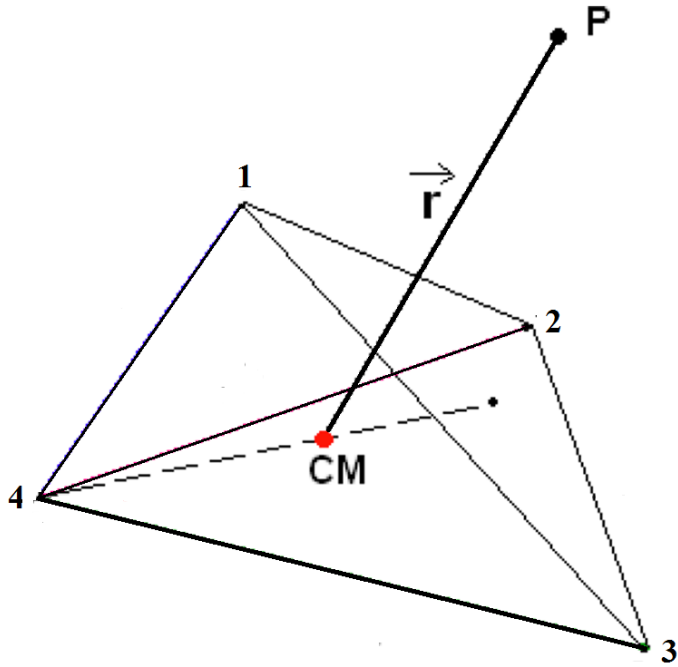
$$a_x = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{z}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) x - \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) y - \frac{\mu x}{r^3}$$

$$a_y = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{z}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) y + \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) x - \frac{\mu y}{r^3}$$

$$a_z = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} z + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\mu z}{r^3}$$



# Масконы



$$U = G \sum_i \frac{M_i}{\|\mathbf{r}_{\text{ЦМ } i} - \mathbf{P}\|}$$

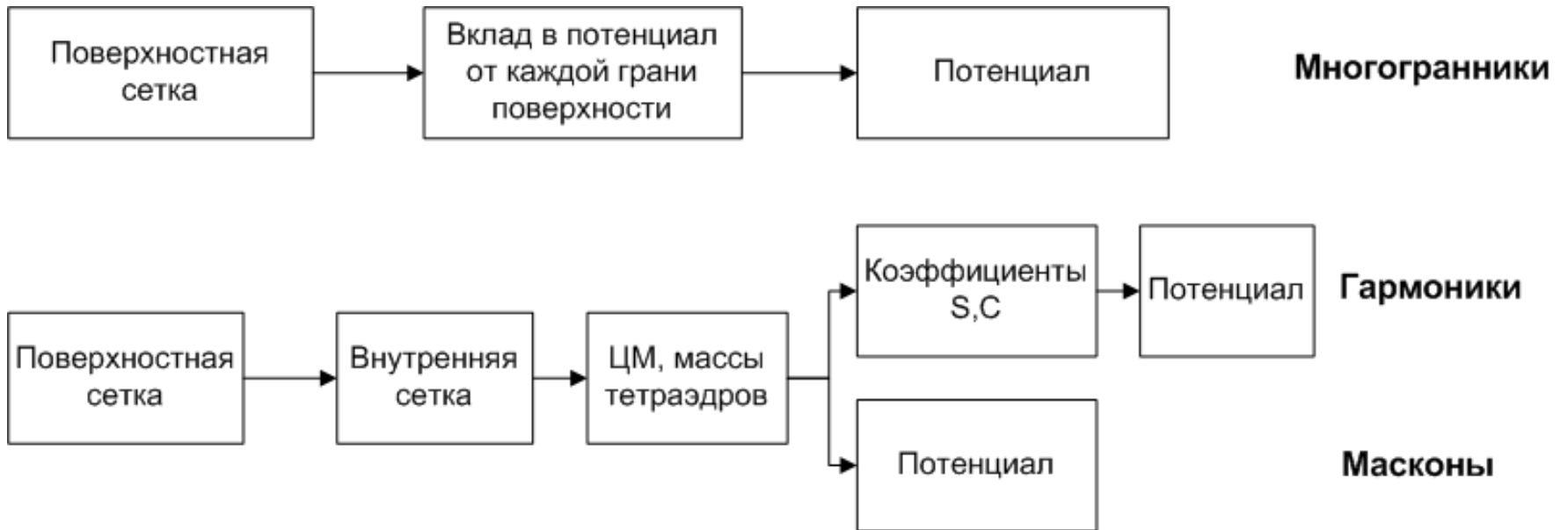
$$\mathbf{a} = -\nabla U = G \sum_i M_i \frac{\mathbf{r}_{\text{ЦМ } i} - \mathbf{P}}{\|\mathbf{r}_{\text{ЦМ } i} - \mathbf{P}\|^3}$$

$M_i$  – масса  $i$ -го тетраэдра

$r_{\text{ЦМ } i}$  – центр масс  $i$ -го тетраэдра

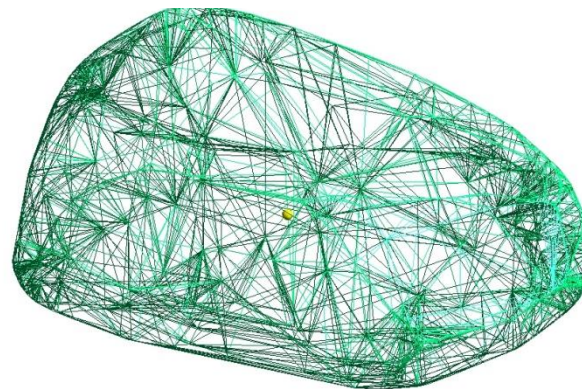
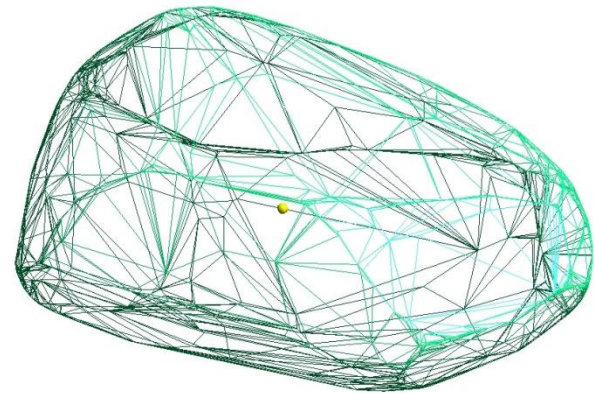
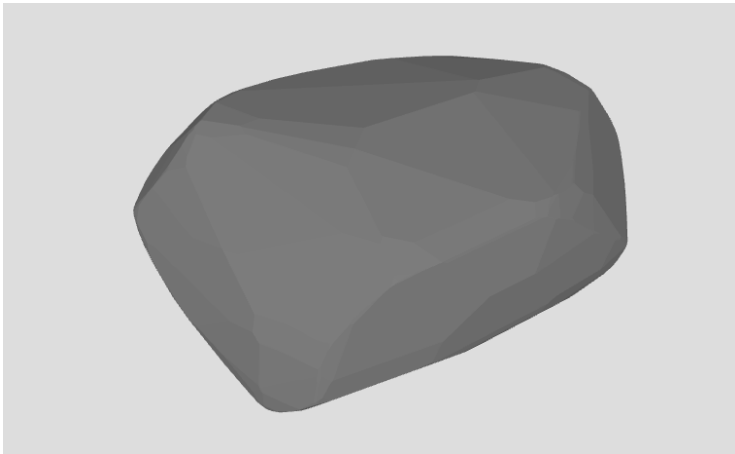
$P$  – пробная точка

# Схемы расчета



# (321) Флорентина

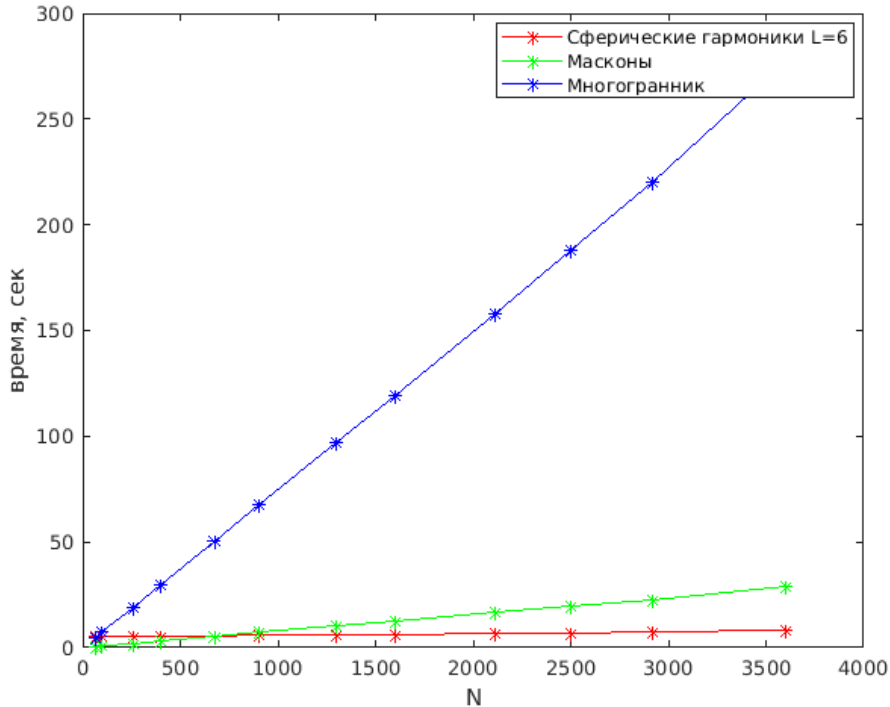
- Масса  $2,11 \cdot 10^{16}$  кг
- Средний диаметр 27.97 км



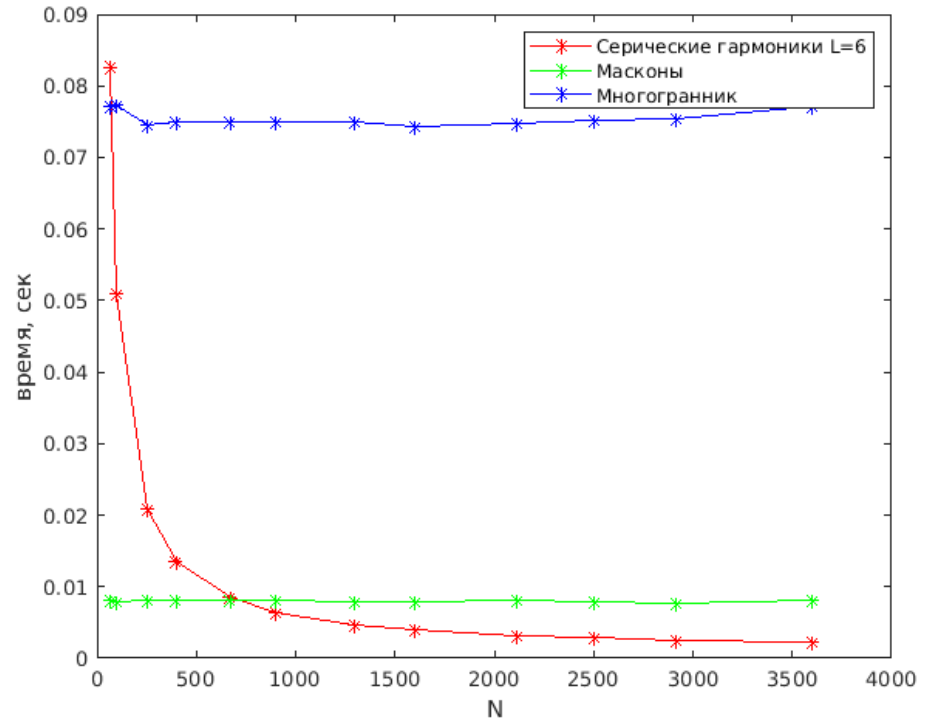
x y z

x y z

# Вычислительная сложность



Время вычисления гравитационного потенциала в  $N$  точках



Среднее время вычисления гравитационного потенциала в 1 точке

# Сравнение точности

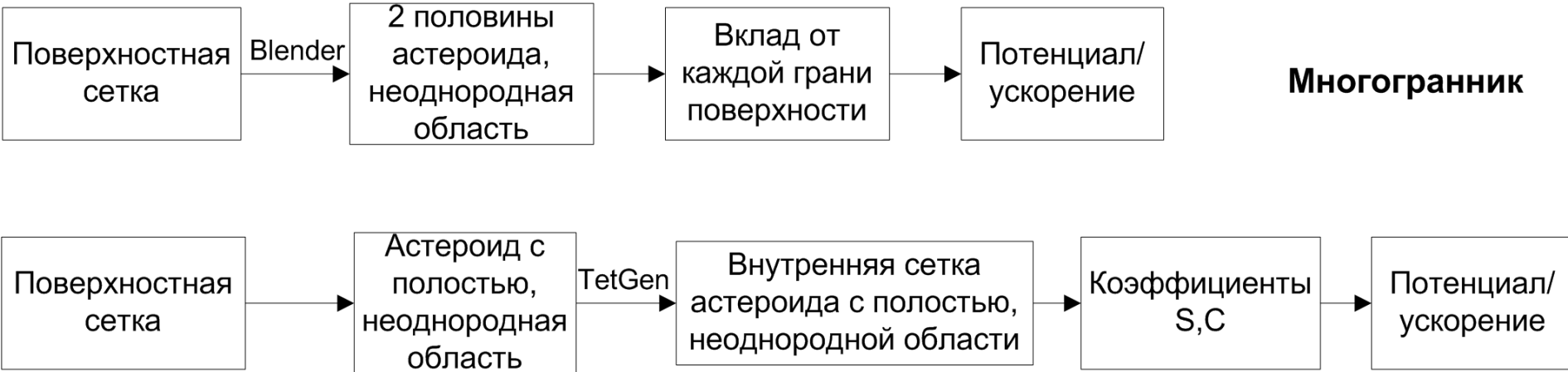
Метод многогранника → точное значение

Метод Расстояние	Сферические гармоники L=6	Масконы
2r	0,2472%	0,009 %
3r	0,1126%	0,004%
4r	0,0653%	0,00221 %
50r	0,0023%	1,57E-05%

# Схема расчета

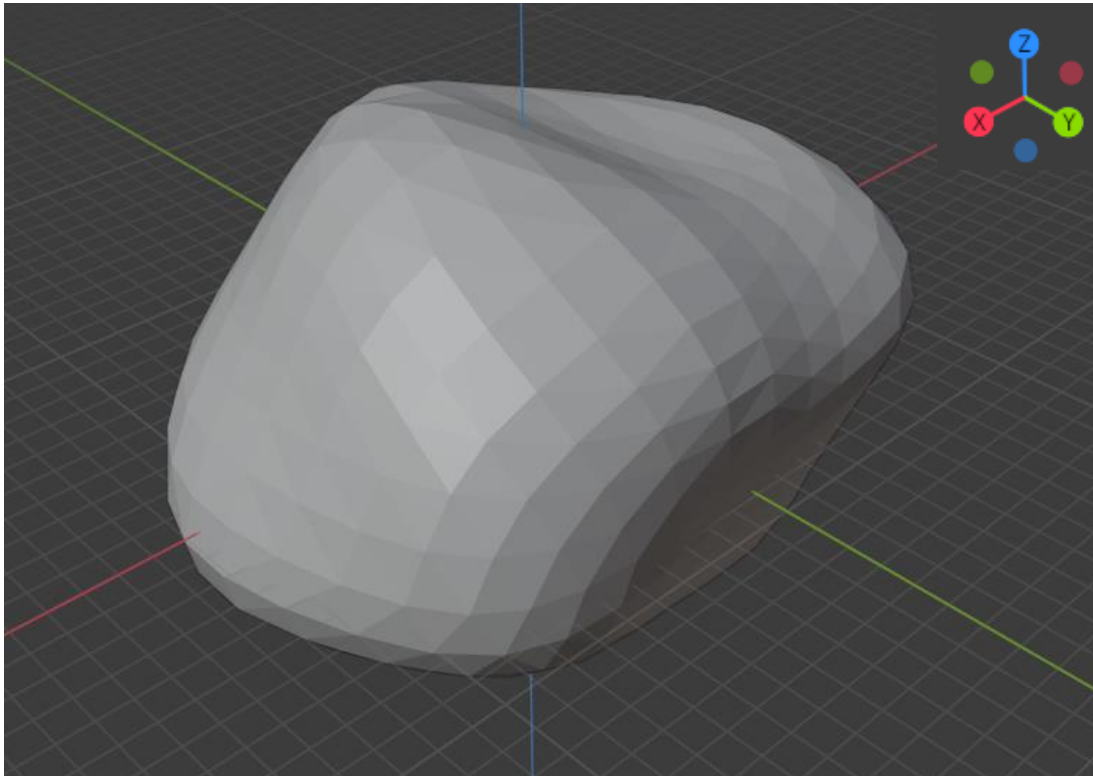
**Многогранник**

**Гармоники**



# (532) Геркулина

- Масса  $2,29 \cdot 10^{19}$  кг
- Размеры  $260 \times 220 \times 215$  км

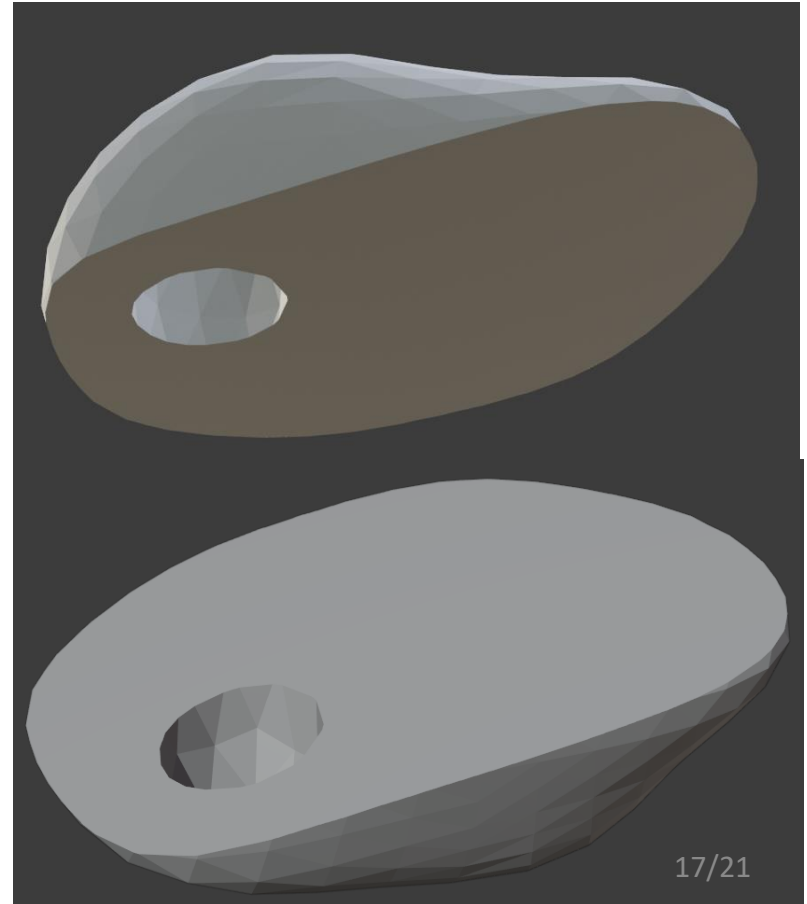
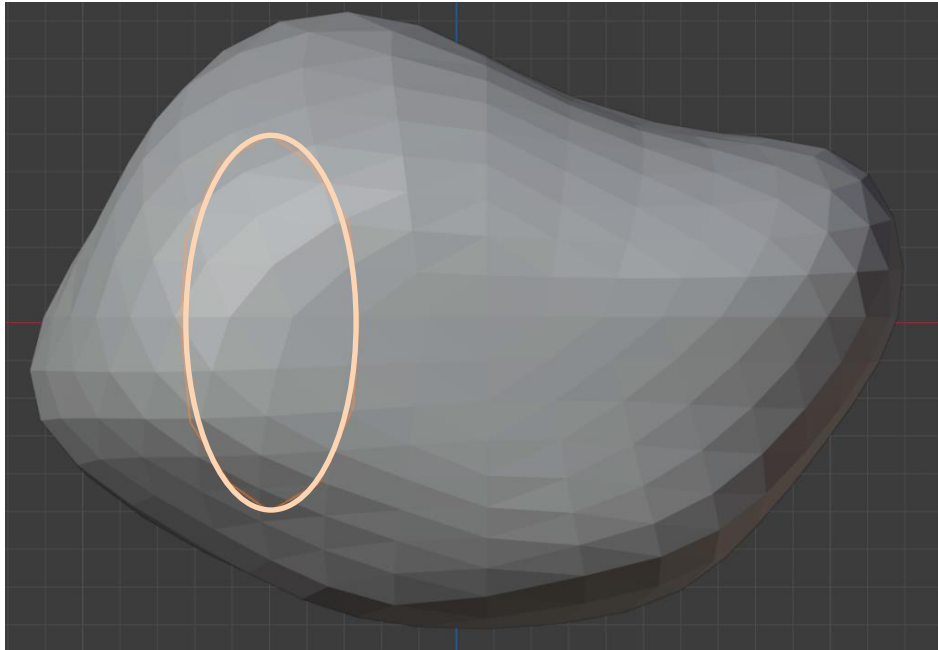




# (532) Геркулина

Размеры области  $25 \times 25 \times 50$  км (3,25% от общего объема)

Положение центра области (50, 40, 0)



# Точность модели сферических гармоник

Метод многогранника → точное значение

Метод сферических гармоник →  $L=6$

Расстояние	Относительная ошибка потенциала	Относительная ошибка ускорения
2r	0,1313%	0,9699%
3r	0,0885%	0,6148%
4r	0,0666%	0,3465%
50r	0,0053%	0,0022%

# Неоднородное включение

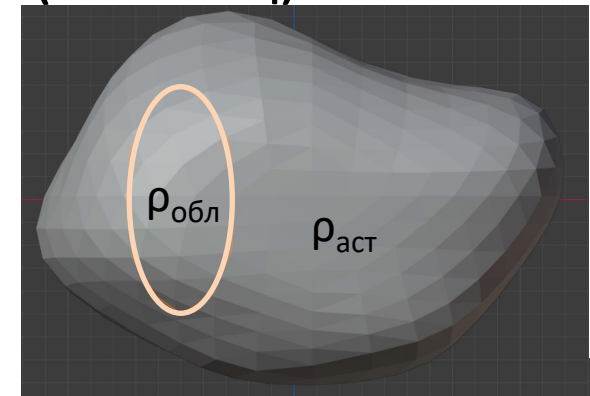
Плотность астероида  $6.516 \cdot 10^{12}$  кг/км<sup>3</sup>

Плотность области  $7.874 \cdot 10^{12}$  кг/км<sup>3</sup> (железо)

Плотность области  $4.68 \cdot 10^{12}$  кг/км<sup>3</sup> (силикат)

Плотность области  $11.342 \cdot 10^{12}$  кг/км<sup>3</sup> (свинец)

	Полость		Железо		Силикат		Свинец	
<b>2r</b>	3.23%	2.79%	0.67%	0.29%	0.91%	0.61%	2.40%	1.8%
		3.81%		1.03%		1.14%		2.96%
<b>3r</b>	3.24%	2.94%	0.68%	0.43%	0.91%	0.73%	2.40%	2.01%
		3.59%		0.89%		1.05%		2.78%
<b>4r</b>	3.25%	3.02%	0.68%	0.5%	0.92%	0.78%	2.41%	2.11%
		3.49%		0.84%		1.02%		2.69%
<b>50r</b>	3.25%	3.24%	0.68%	0.67%	0.92%	0.91%	2.41%	2.39%
		3.27%		0.69%		0.93%		2.43%



# Заключение

- Сравнение методов показало:
  - ✓ модель многогранника – для контроля точности
  - ✓ модель сферических гармоник – для большого количества точек
  - ✓ модель масконов – для небольшого количества точек
- Построена методика расчета гравитационного поля для тел с неоднородными включениями
- Влияние неоднородного включения увеличивается:
  - ✓ при большей разности плотности астероида и включения
  - ✓ при большем объеме включения
  - ✓ при меньшем расстоянии от пробной точки до полости

# Публикации и доклады

- А. С. Юдицкая, С. С. Ткачев, “Сравнительный анализ методов моделирования гравитационного потенциала тел сложной формы”, *Математическое моделирование*, 33:5 (2021), 78–90
- 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ
- 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ
- Работа поддержана грантом РФФИ № 19-11-00256

**Спасибо за внимание!**