



Королёвские чтения

XLVII Академические чтения по космонавтике

24–27 января 2023,

Москва, Россия

Сравнительный анализ функционалов в задаче построения программного движения для магнитной системы управления ориентацией

Анна Охитина, Степан Ткачев, Дмитрий Ролдугин

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

anna.ohitina@mail.ru

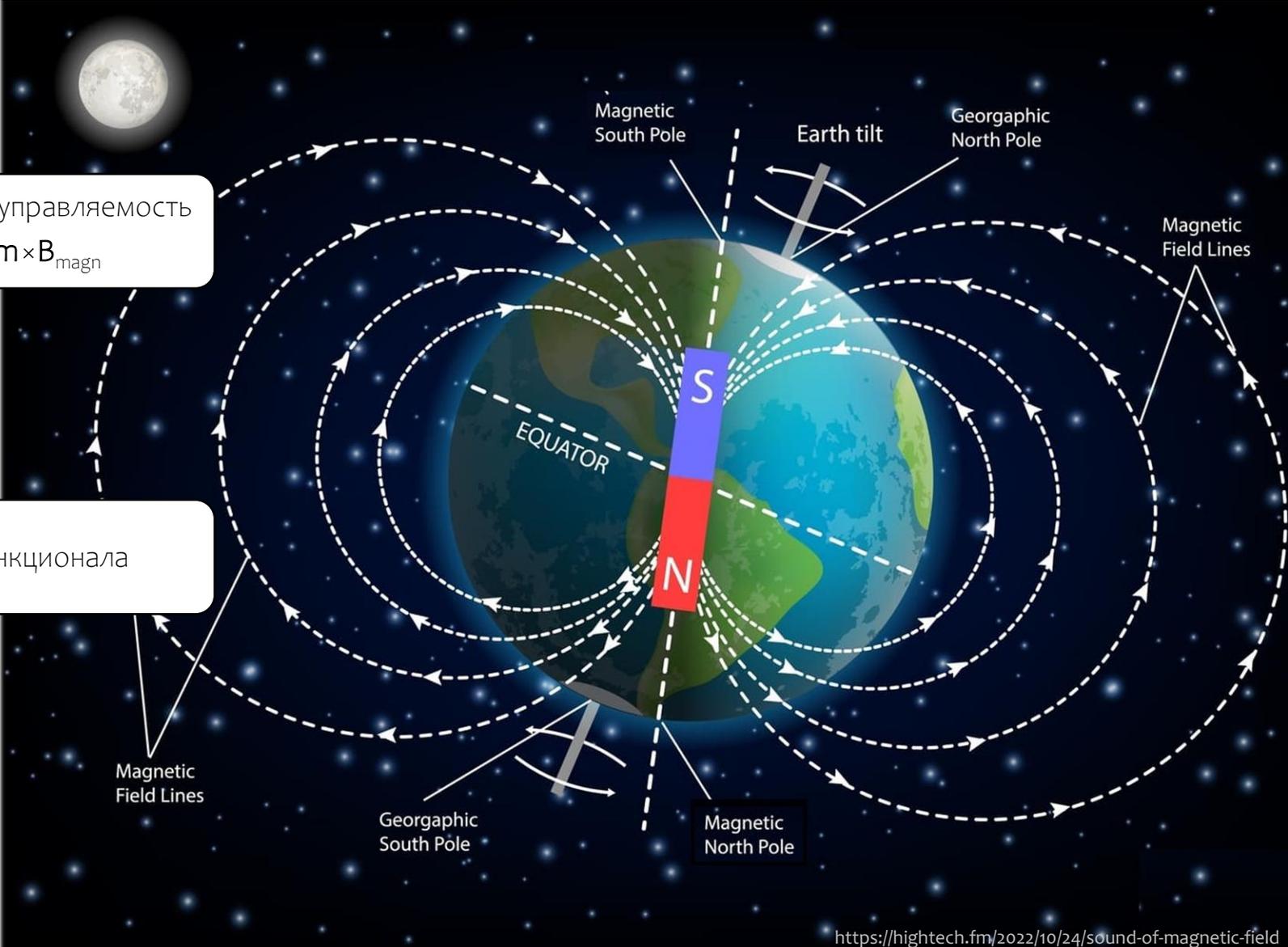


Введение



Локальная неуправляемость
 $M_{\text{magn}} = m \times V_{\text{magn}}$

Выбор функционала



<https://hightech.fm/2022/10/24/sound-of-magnetic-field>

Метод роя частиц

(Particle Swarm Optimization)

$$\min_{x \in \mathbb{U}} \Phi(x)$$

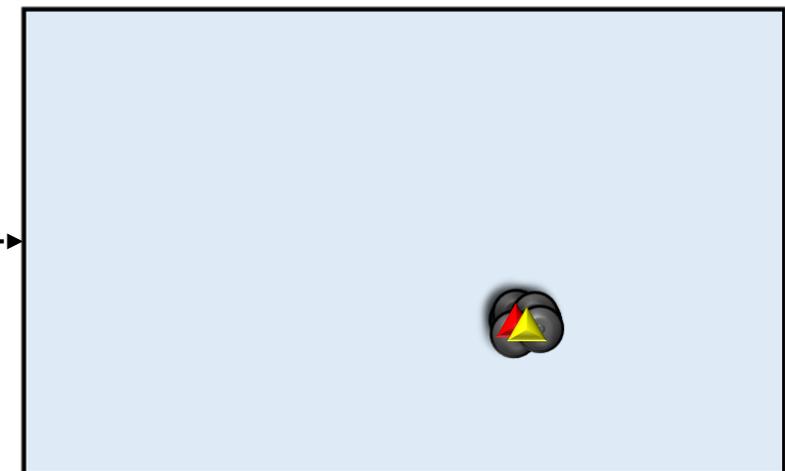
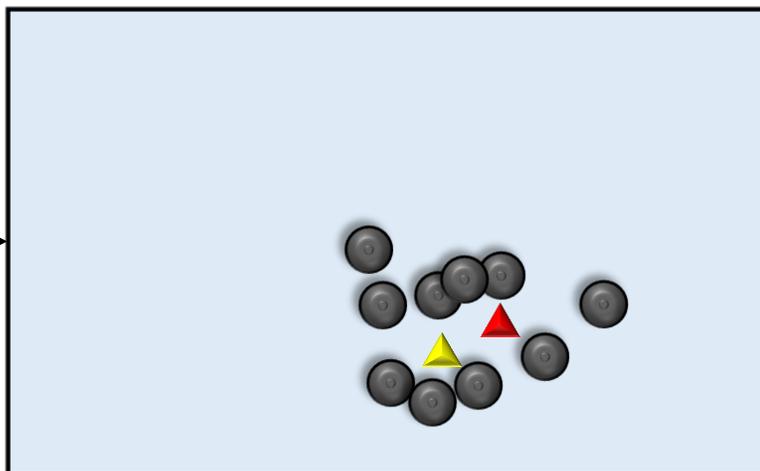
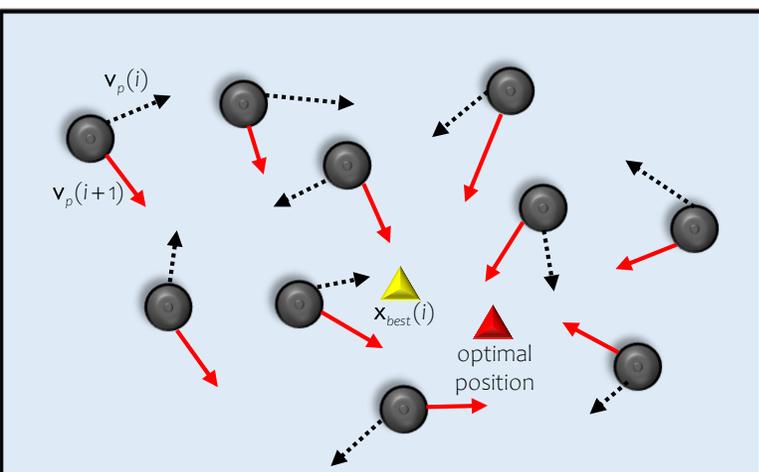
$\Phi(x)$ – функционал

\mathbb{U} – пространство поиска

P – количество частиц в рое

x_p, v_p – положение и скорость p -ой частицы

G – количество рассматриваемых поколений



$$x_p(i+1) = x_p(i) + v_p(i+1)$$

$$v_p(i+1) = c_{in} v_p(i) + c_{cog} [x_{p,best}(i) - x_p(i)] + c_{soc} [x_{best}(i) - x_p(i)]$$

Инерционная компонента (продолжение поиска в том же направлении)

Когнитивная компонента (желание частицы вернуться в своё лучшее положение среди всех найденных ранее)

Социальная компонента (стремление занять лучшее положение среди всех найденных ранее в окрестности частицы)

Критерии остановки

- 1) стагнация функционала (малая величина производной функционала)
- 2) стагнация роя (попадание всех частиц в некоторую окрестность найденного лучшего положения)

Модель движения

Уравнения движения

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{abs} = J^{-1}(M_{ctrl} + M_{grav} + M_{aero} + M_{dist} - \omega_{abs} \times J \omega_{abs}), \\ \dot{q}_o = -0.5 q^T \omega, \\ \dot{q} = 0.5(q_o \omega + q \times \omega), \end{cases}$$

где $\omega = \omega_{abs} - A \omega_o$,

$\omega_o = (0, \omega_o, 0)$ – орбитальная угловая скорость

ОрбСК \xrightarrow{A} ССК,

ОрбСК \xrightarrow{C} ОпСК,

ОпСК \xrightarrow{D} ССК.

Используемые
системы координат

Параметры орбиты

$h_1 = 550$ км – высота орбиты

$h_2 = 650$ км (2 случая)

$i = 57^\circ$ – наклонение

$10 \times 20 \times 30$ см – форма (параллелепипед)

$c = (0, 1, 0)$ см – смещение центра масс

$J = \text{diag}(0.15, 0.13, 0.11)$ кг·м² – тензор инерции

Параметры КА



Построение опорного движения

Этап 1

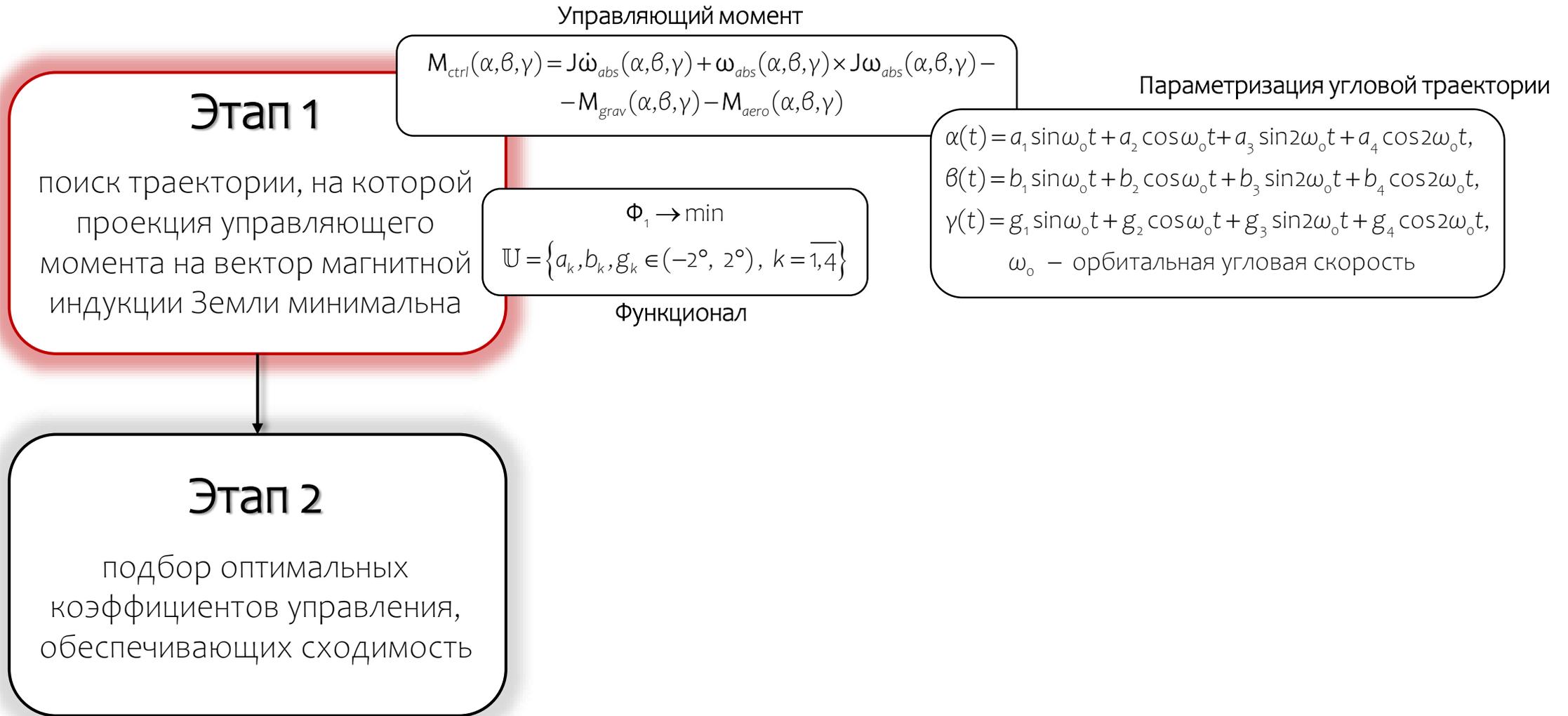
поиск траектории, на которой
проекция управляющего
момента на вектор магнитной
индукции Земли минимальна



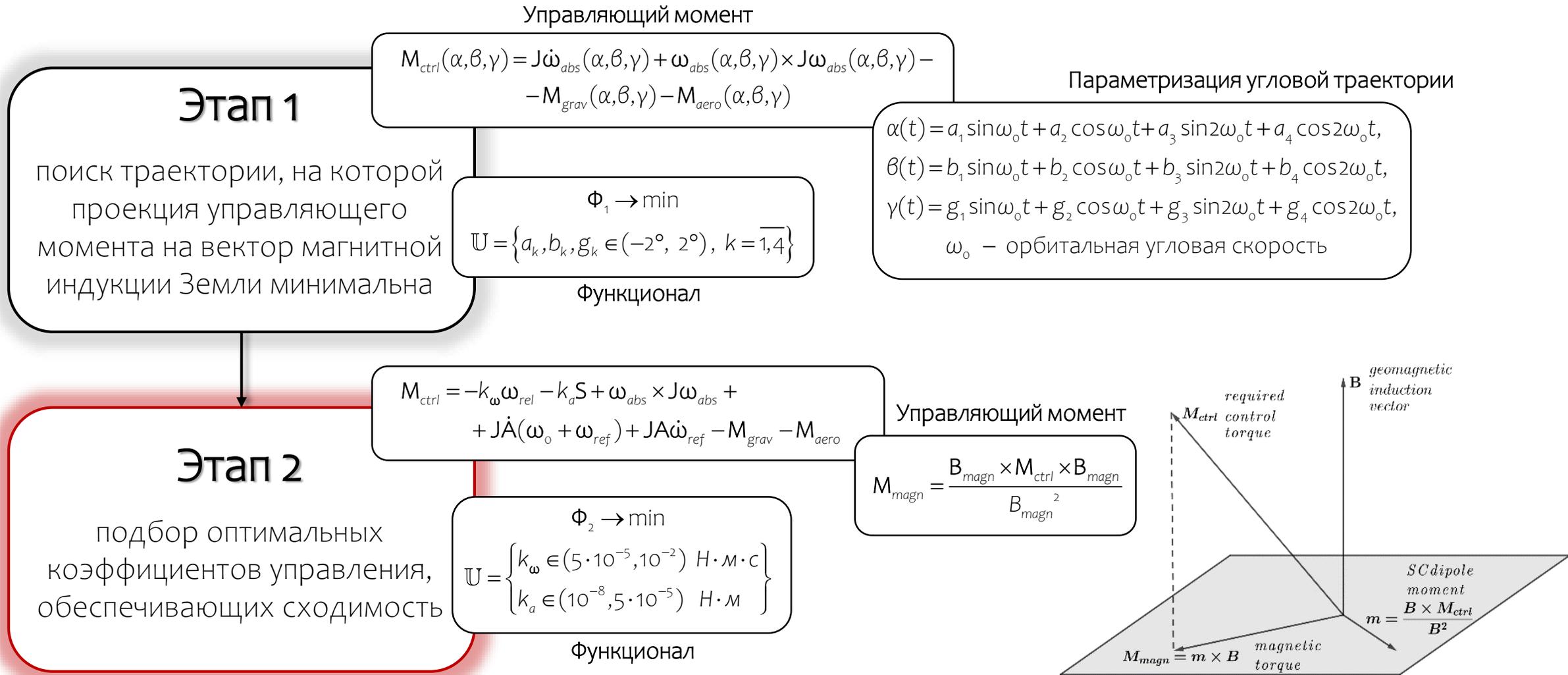
Этап 2

подбор оптимальных
коэффициентов управления,
обеспечивающих сходимость

Построение опорного движения



Построение опорного движения



Линеаризация

$$J\dot{\omega}_{\text{rel}} = -k_{\omega}\omega_{\text{rel}} - 2k_a S - \frac{B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}})}{B_{\text{magn}}^2}$$

$$\dot{y} = G(t)y + f(t) \quad (1)$$

$$\dot{x} = G(t)x \quad (2)$$

Линеаризация

$$J\dot{\omega}_{\text{rel}} = -k_{\omega}\omega_{\text{rel}} - 2k_a S - \frac{B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}})}{B_{\text{magn}}^2}$$

$$\dot{y} = G(t)y + f(t) \quad (1)$$

$$\dot{x} = G(t)x \quad (2)$$

Матрица
системы

$$G(t)$$

Мультипликаторы

$$X(T)$$

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = \overline{1,6}$$

Матрица
мондромии

Линеаризация

$$J\dot{\omega}_{\text{rel}} = -k_{\omega}\omega_{\text{rel}} - 2k_a S - \frac{B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}})}{B_{\text{magn}}^2}$$

$$\dot{y} = G(t)y + f(t) \quad (1)$$

$$\dot{x} = G(t)x \quad (2)$$

Тривиальное решение системы (2)

Матрица системы

$$G(t)$$

Матрица монодромии

Мультипликаторы

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = \overline{1,6}$$

Все решения системы (2) являются асимптотически устойчивыми

$$(2) \text{ ас.уст.}$$

$$x_0 \equiv 0 \text{ ас.уст.}$$

Линеаризация

$$J\dot{\omega}_{rel} = -k_{\omega}\omega_{rel} - 2k_a S - \frac{B_{magn}(B_{magn}, M_{ctrl})}{B_{magn}^2}$$

$$\dot{y} = G(t)y + f(t) \quad (1)$$

$$\dot{x} = G(t)x \quad (2)$$

Тривиальное решение системы (2)

Матрица системы

$$G(t)$$

Матрица монодромии

Мультипликаторы

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = \overline{1,6}$$

Все решения системы (2) являются асимптотически устойчивыми

(2) ас.уст.

$x_0 \equiv 0$ ас.уст.

(1) ас.уст.

Система (1) асимптотически устойчива и существует единственное T-периодическое решение

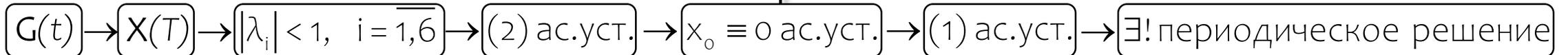
∃! периодическое решение

Линеаризация

$$J\dot{\omega}_{\text{rel}} = -k_{\omega}\omega_{\text{rel}} - 2k_a S - \frac{B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}})}{B_{\text{magn}}^2}$$

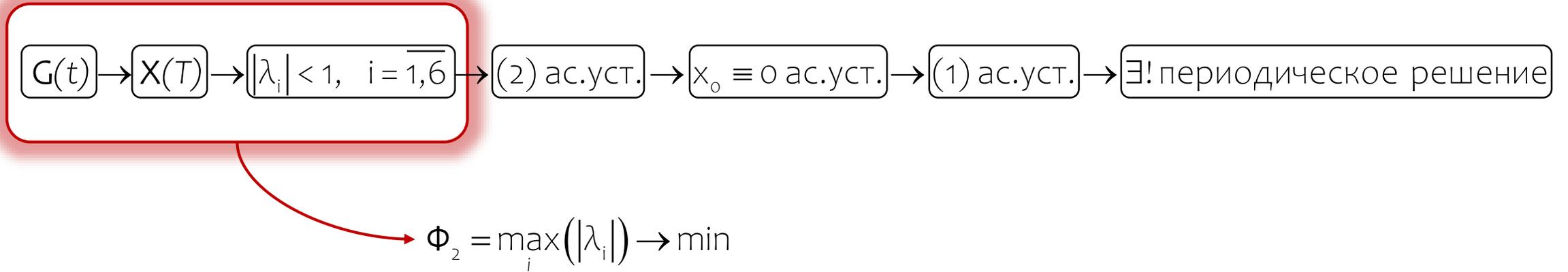
$$\dot{y} = G(t)y + f(t) \quad (1)$$

$$\dot{x} = G(t)x \quad (2)$$

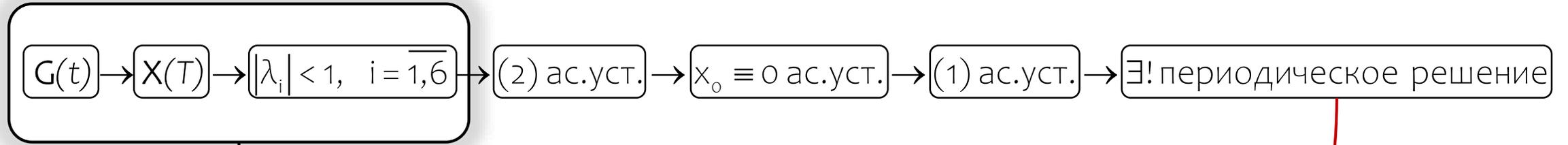


$$y(t) = X(t)[E - X(T)]^{-1} \left\{ \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X(T) \int_t^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right\}$$

Линеаризация



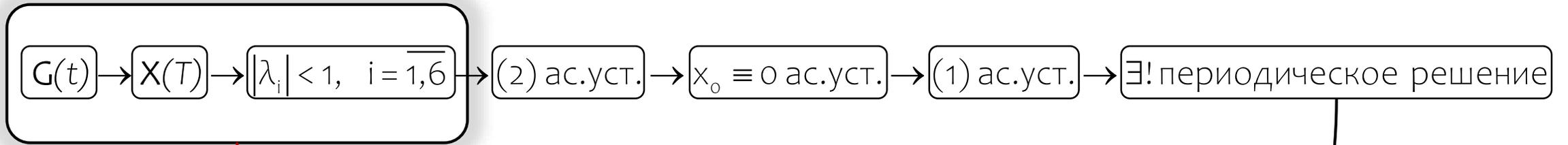
Линеаризация



$$\rightarrow \Phi_2 = \max_i (|\lambda_i|) \rightarrow \min$$

$$y(t) = X(t)[E - X(T)]^{-1} \left\{ \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X(T) \int_t^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right\}$$

Линеаризация



$$\Phi_2 = \max_i (|\lambda_i|) \rightarrow \min$$

$$y(t) = X(t)[E - X(T)]^{-1} \left\{ \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + X(T) \int_t^T X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \right\}$$

$$f(t) = - \frac{B_{\text{magn}} (B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2}$$

Выбор функционала Φ_1

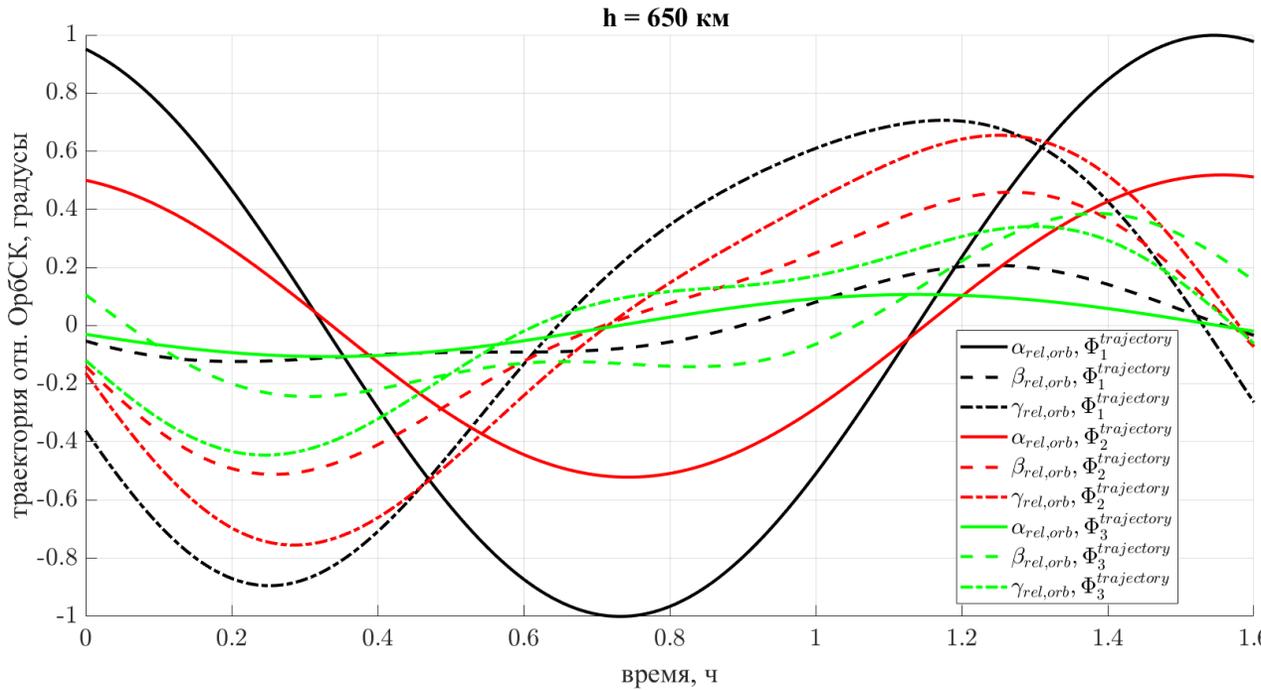
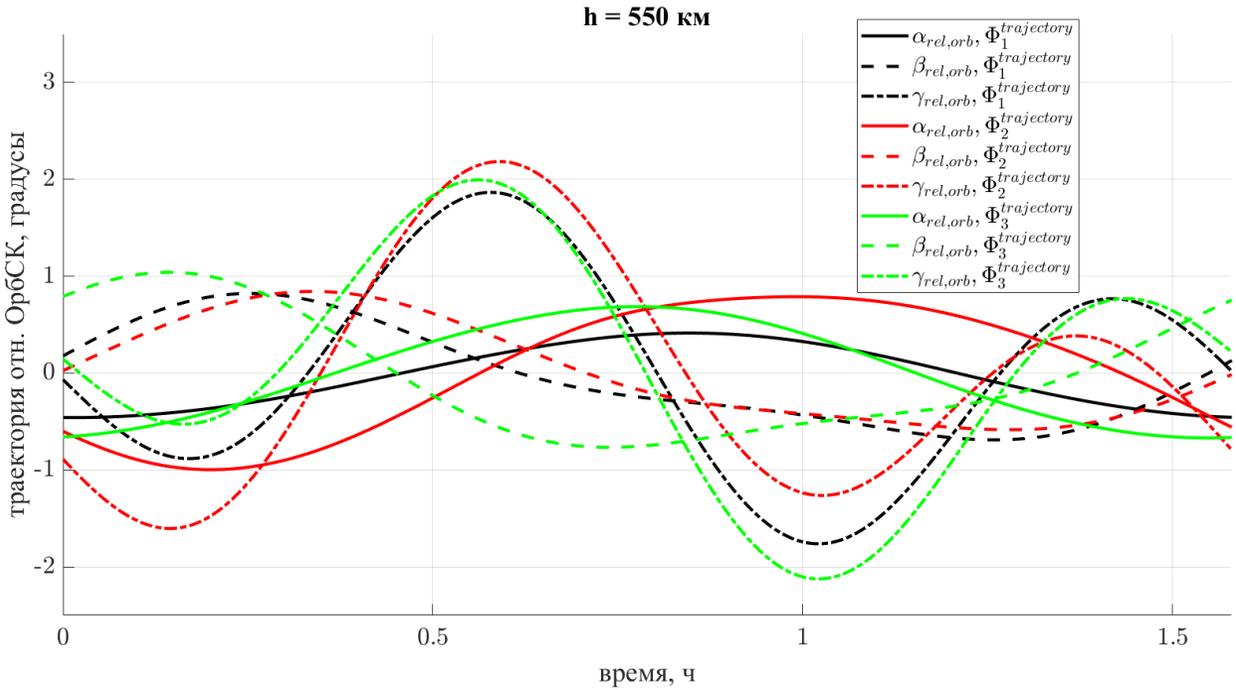
$$f(t) = -\frac{B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2}$$

$$\Phi_1 = \max_i |\phi_k^i| \rightarrow \min, k = 1, 2, 3$$

$$\phi_1(t) = \frac{(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}}$$

$$\phi_2(t) = (B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)$$

$$\phi_3(t) = \frac{\max |B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)|}{B_{\text{magn}}^2}$$



Влияние возмущений

$$\dot{y} = (G(t) + \delta G(t))y + (f(t) + \delta f(t))$$

$$\delta f(t) \approx -2 \frac{B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2} (B_{\text{magn}}, \delta B) - \frac{\delta B(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2} - \frac{B_{\text{magn}}(\delta B, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2}$$

Влияние возмущений

$$\dot{y} = (G(t) + \delta G(t))y + (f(t) + \delta f(t))$$

$$\delta f(t) \approx -2 \frac{B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2} (B_{\text{magn}}, \delta B) - \frac{\delta B(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2} - \frac{B_{\text{magn}}(\delta B, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2}$$

$$\delta B = B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}$$

Влияние возмущений

$$\dot{y} = (G(t) + \delta G(t))y + (f(t) + \delta f(t))$$

$$\delta f(t) \approx -2 \frac{B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2} (B_{\text{magn}}, \delta B) - \frac{\delta B(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2} - \frac{B_{\text{magn}}(\delta B, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2}$$

Этап 0

Оптимальная аппроксимация
магнитного поля

$$\delta B = B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}$$

$\Phi_o \rightarrow \min$

Выбор функционала Φ_0

$$\delta B = B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}^{\text{oblique}}$$

$$\Phi_0 = \max_i |\delta \beta_k^i| \rightarrow \min, k = 1, 2, 3, 4$$

$$\delta \beta_1(t) = \frac{\|B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}^{\text{oblique}}\|_2}{\|B_{\text{magn}}^{\text{incline}}\|_2}$$

$$\delta \beta_2(t) = \frac{\|B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}^{\text{oblique}}\|_\infty}{\|B_{\text{magn}}^{\text{incline}}\|_\infty}$$

$$\delta \beta_3(t) = \|B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}^{\text{oblique}}\|_2$$

$$\delta \beta_4(t) = \frac{\|B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}^{\text{oblique}}\|_\infty}{\|B_{\text{magn}}^{\text{incline}}\|_2}$$

$$B_{\text{magn}} = -B_0 \left(k - 3 \frac{(k,r)r}{r} \right)$$

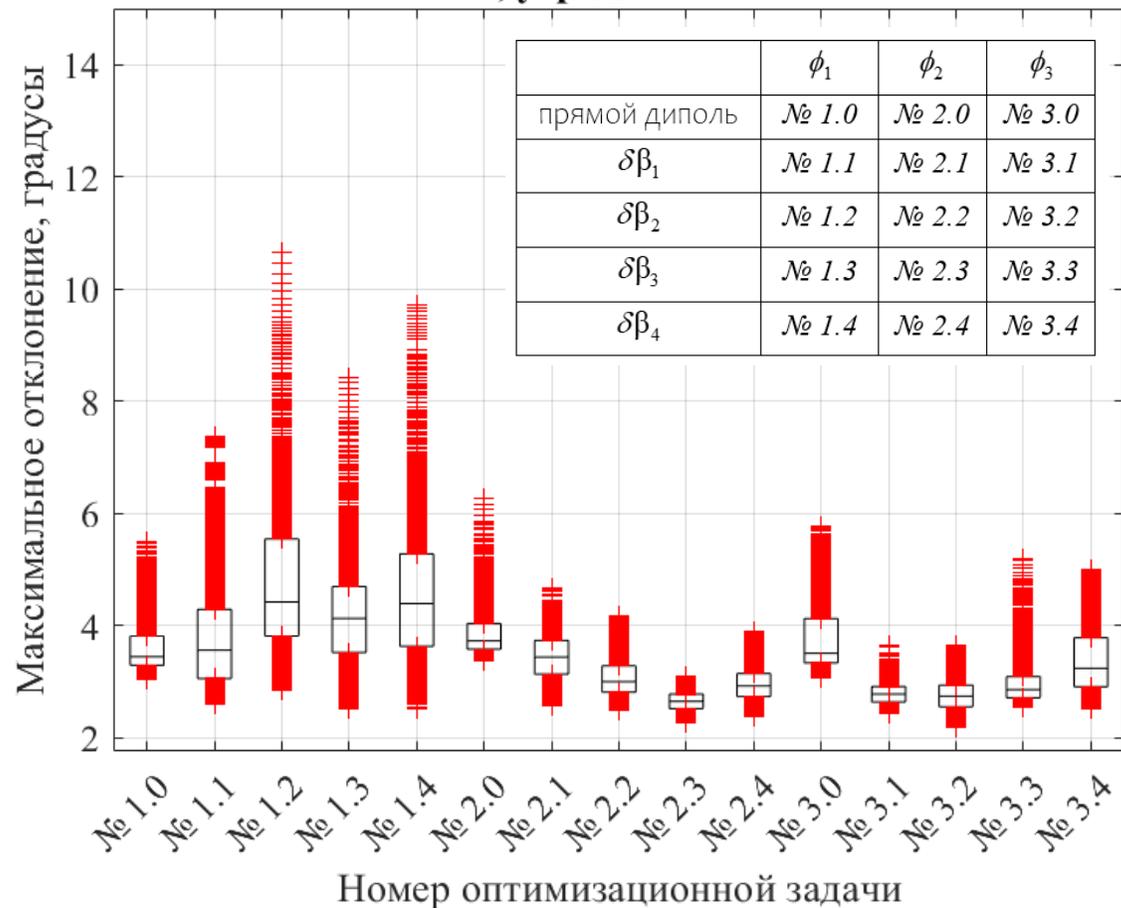
$$k^{\text{oblique}} = \begin{pmatrix} \cos x_1 \sin x_2 \\ \sin x_1 \sin x_2 \\ -\cos x_2 \end{pmatrix}$$

$$U = \left\{ x_1 \in (0, 2\pi), x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

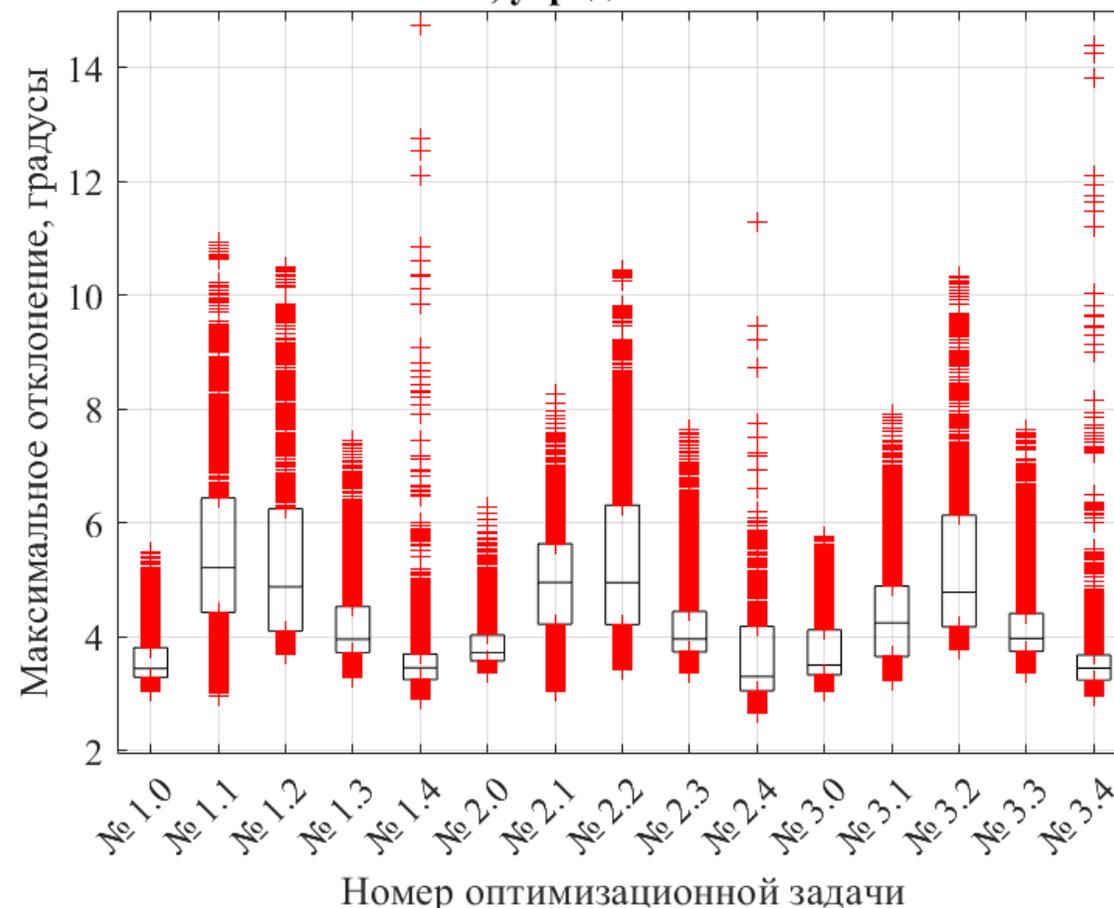
Результаты моделирования

Распределение наихудших значений точности отслеживания опорной траектории для высоты орбиты 550 км для различных возмущений тензора инерции КА

$h = 550$ км, усреднение на 3 витка

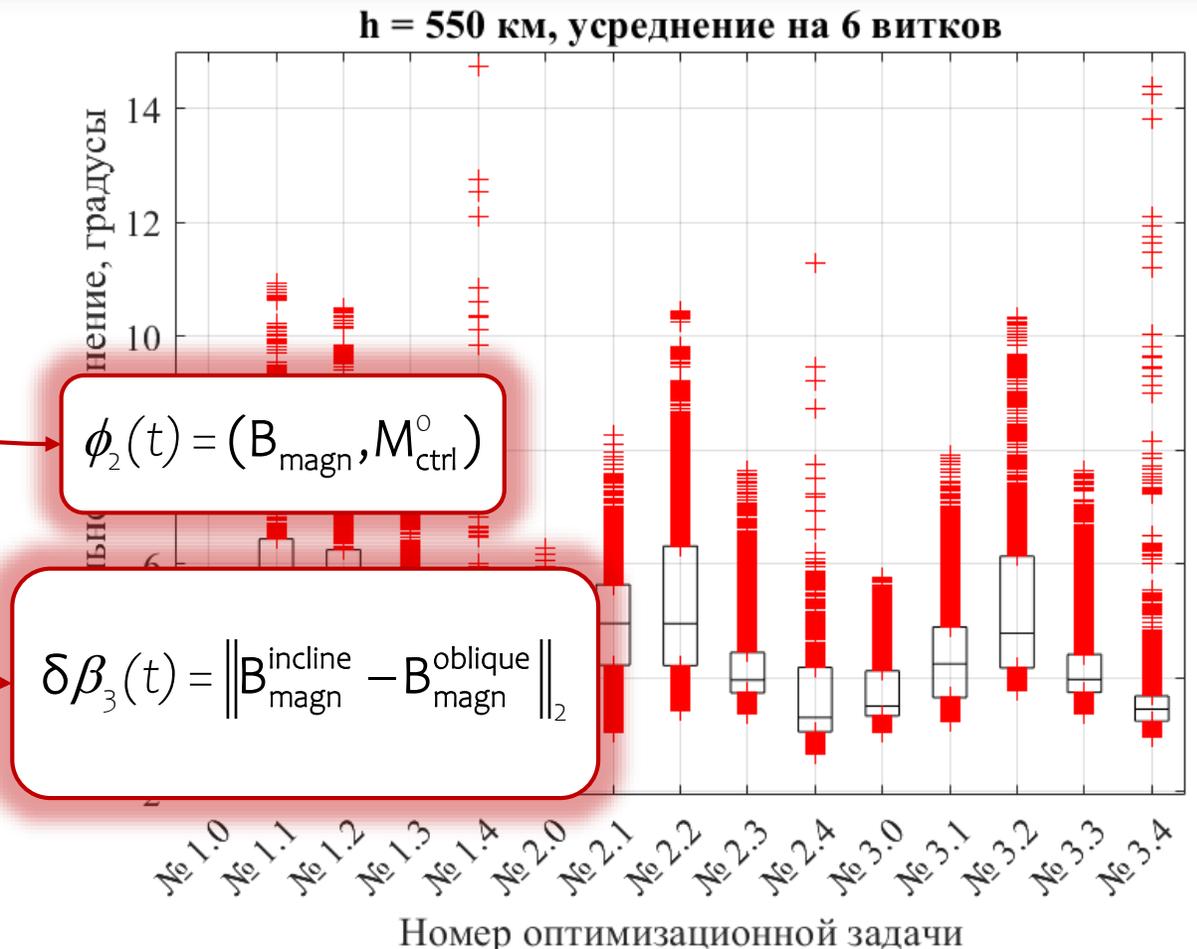
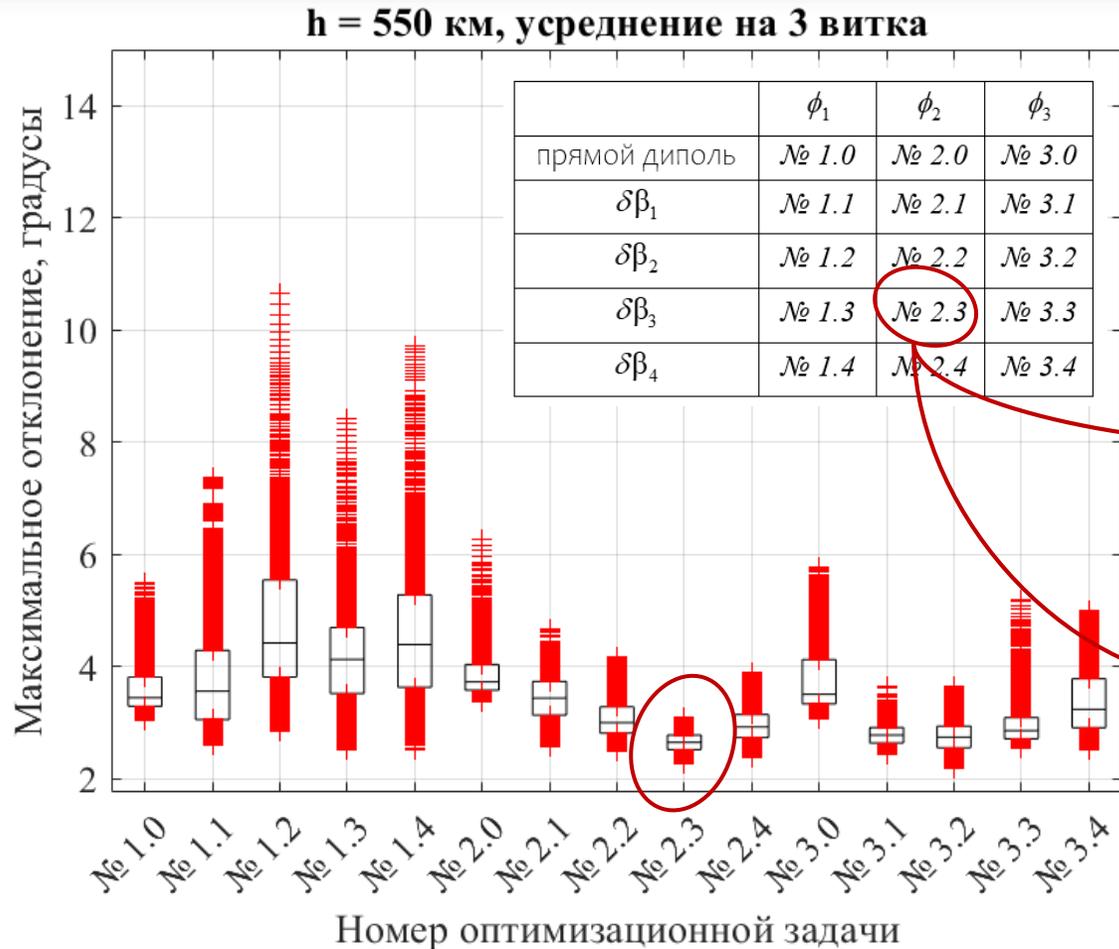


$h = 550$ км, усреднение на 6 витков



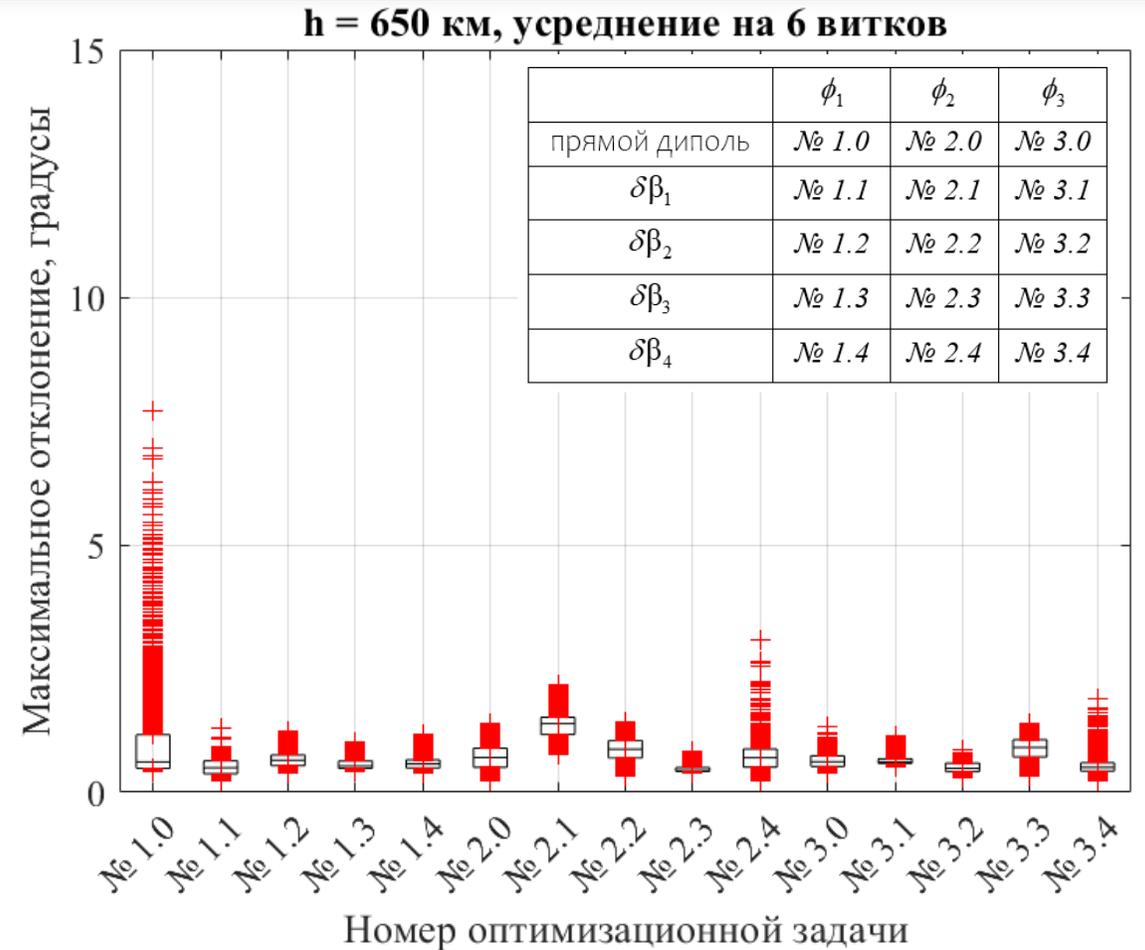
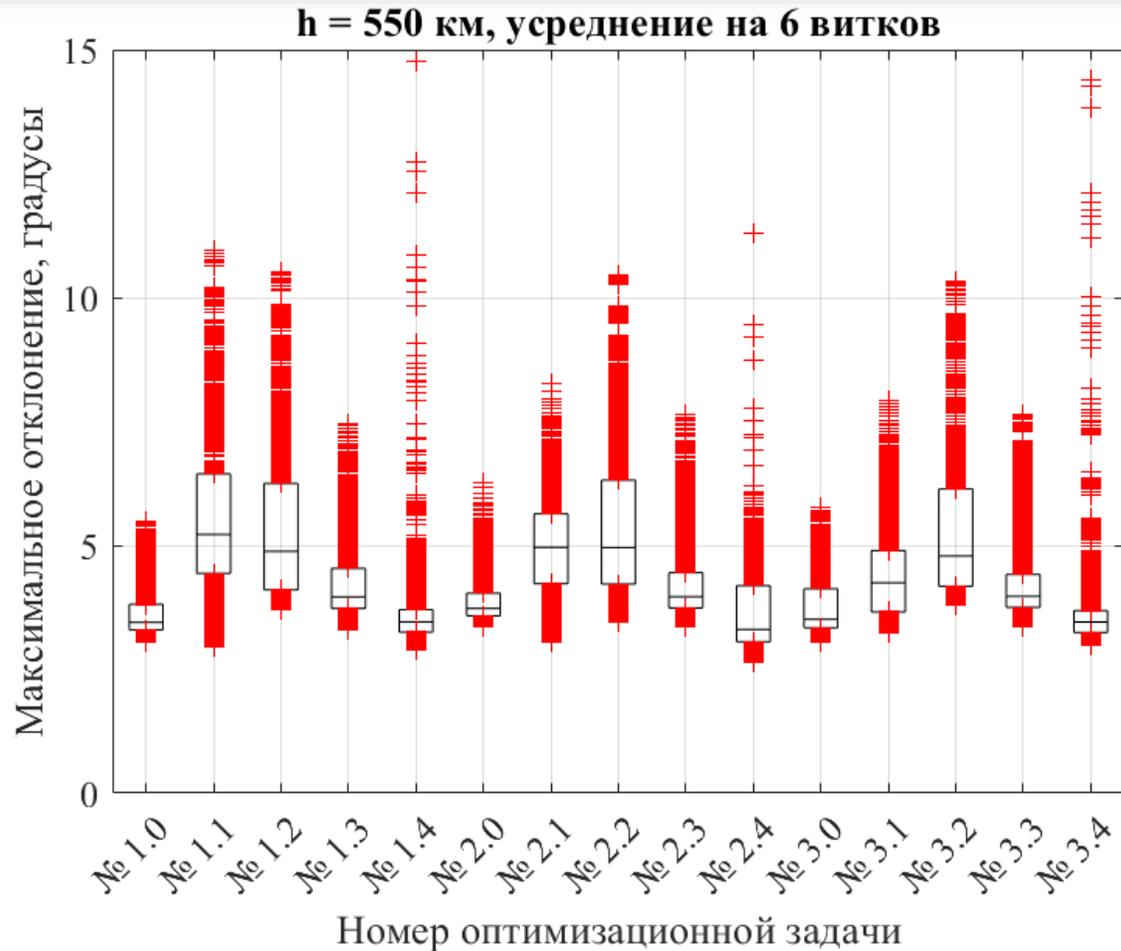
Результаты моделирования

Распределение наихудших значений точности отслеживания опорной траектории для высоты орбиты 550 км для различных возмущений тензора инерции КА



Результаты моделирования

Распределение наихудших значений точности отслеживания опорной траектории для орбит 550 и 650 км для различных возмущений тензора инерции КА



Заключение

- предложен **набор функционалов** для двухэтапной схемы **построения управляемой траектории** на основе **линеаризованной модели уравнений движения КА**
- рассмотрено **влияние количества витков для усреднения** при аппроксимации магнитного поля Земли на точность ориентации
- проведен **статистический анализ** поведения наихудшего значения точности ориентации для различных **возмущений тензора инерции**
- показано, что **возмущение атмосферы** вносит существенный вклад в точность стабилизации