



«Прикладная математика. XXI век»  
к 70-летию ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

# Использование метода роя частиц в задачах построения управляемых траекторий для магнитной системы управления ориентацией космического аппарата

Анна Охитина,  
м.н.с. отдела №7  
«Динамика космических систем»  
[anna.ohitina@mail.ru](mailto:anna.ohitina@mail.ru)

21 апреля 2023, Москва, Россия

# Введение

Магнитная система управления  
ориентацией КА

Локальная неуправляемость

$$M_{\text{magn}} = m \times V_{\text{magn}}$$

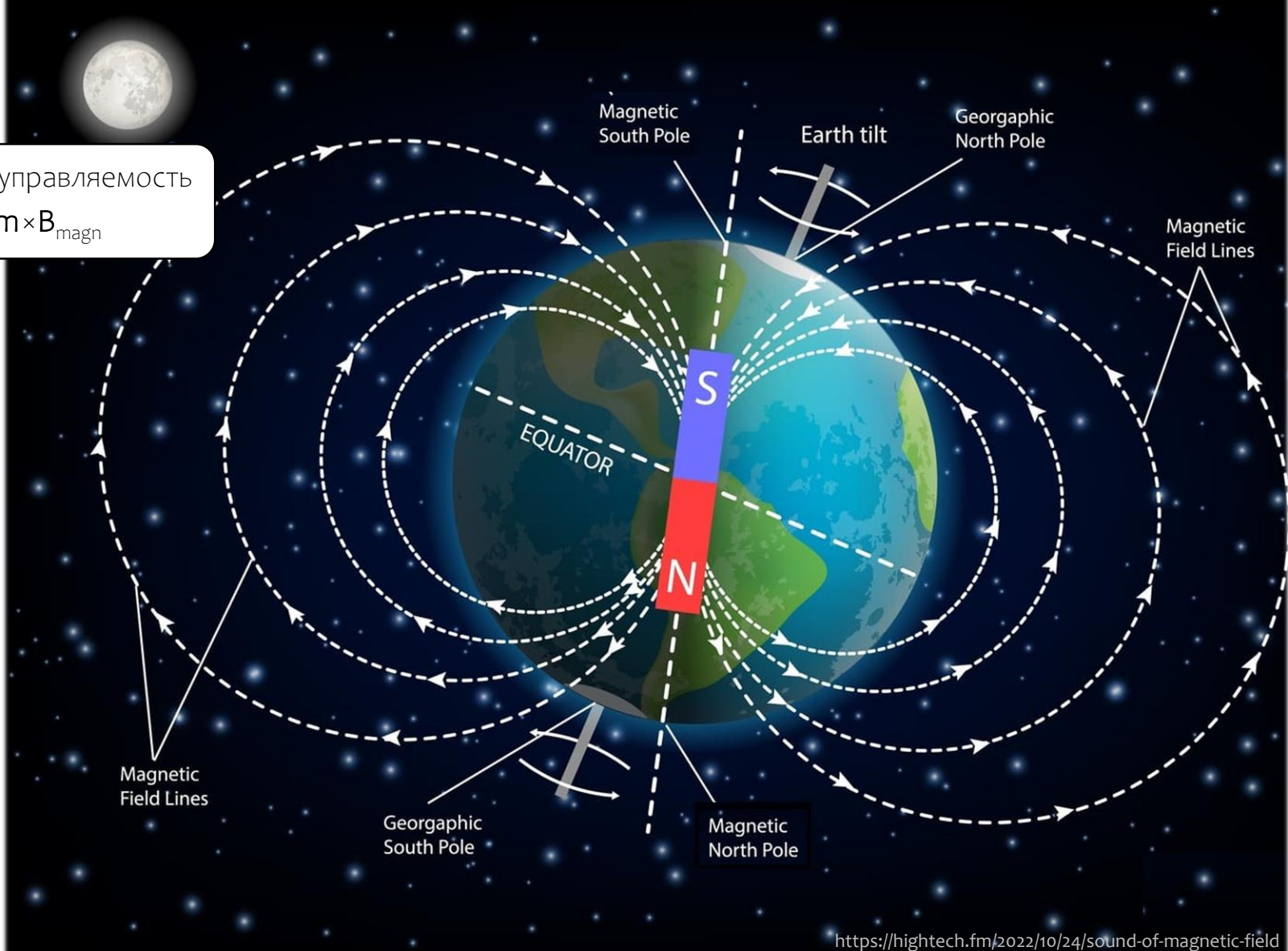
В.В. Белецкий, В.М. Морозов,  
М.Ю. Овчинников, В.И. Калёнова,  
Д.С. Ролдугин, S.P. Bhat, M. Lovera,  
F. Celani, W.H. Chen и др.

## 1) Одноосная ориентация

- Закрутка
- Точность около 1 градуса
- Подходит **не** для всех задач

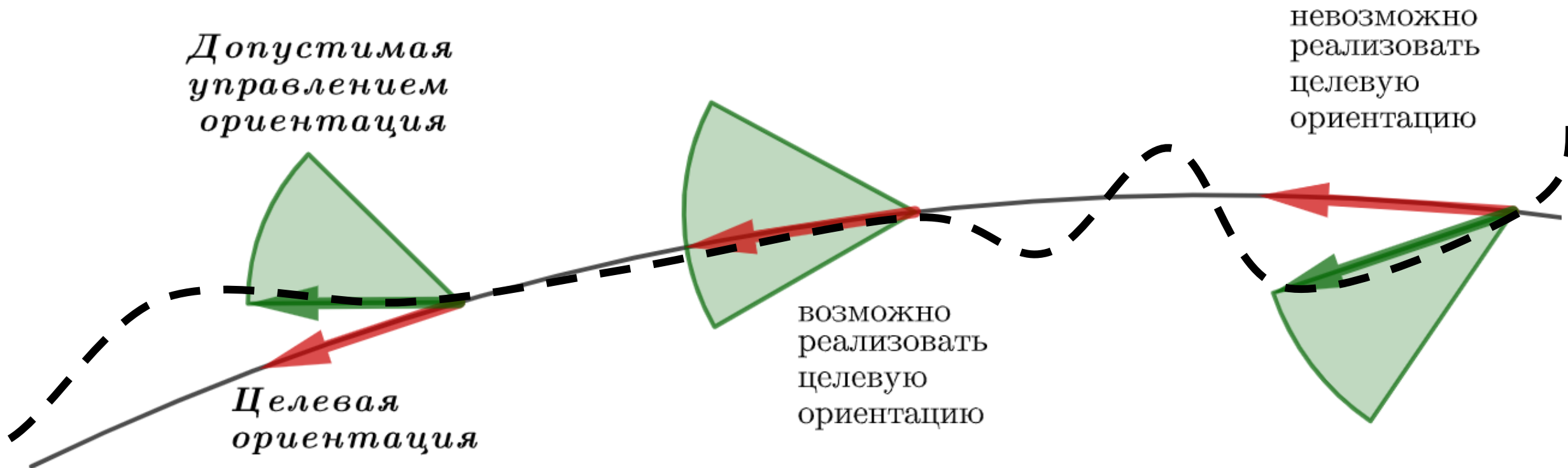
## 2) Трехосная ориентация

- Точность 10-15 градусов



<https://hightech.fm/2022/10/24/sound-of-magnetic-field>

# Локальная неуправляемость



Обеспечение трехосной  
ориентации КА с помощью  
магнитных катушек

Синтез управления  
с учетом ограничений

Управляемая  
угловая траектория

# Модель движения

## Уравнения движения

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{abs} = J^{-1}(-\omega_{abs} \times J\omega_{abs} + \\ \quad + M_{ctrl} + M_{grav} + M_{aero} + M_{dist}), \\ \dot{q}_0 = -0.5 q^T \omega_{abs}, \\ \dot{q} = 0.5(q_0 \omega_{abs} + q \times \omega_{abs}), \end{cases}$$

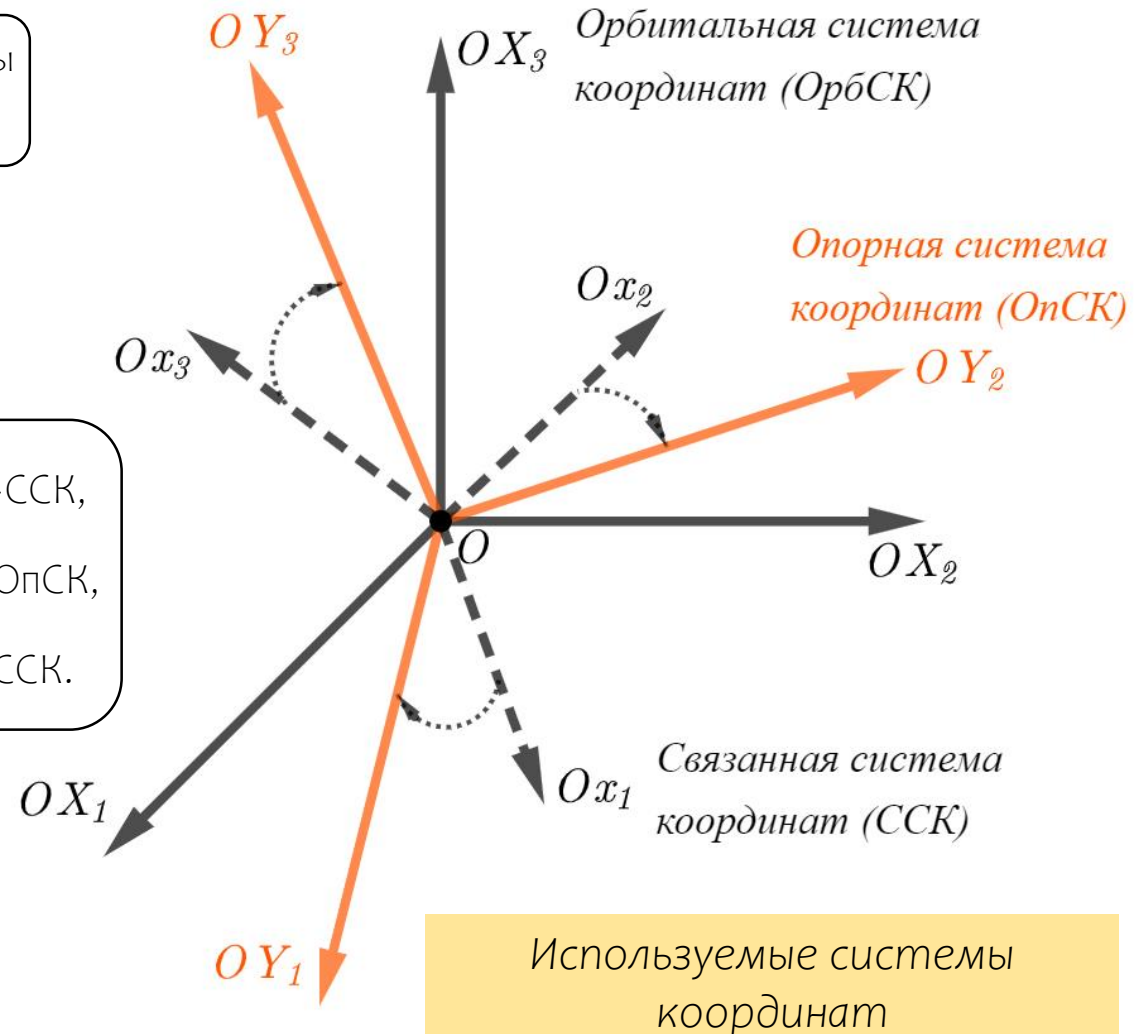
10×20×30 см – форма (параллелепипед)  
 c=(0, 1, 0) см – смещение центра масс  
 $J = \text{diag}(0.15, 0.13, 0.11) \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  – тензор инерции

### Параметры КА

### Параметры орбиты

$h = 650 \text{ км}$  – высота орбиты  
 $i = 57^\circ$  – наклонение

$\overset{A}{\text{ОрбСК}} \rightarrow \text{ССК},$   
 $\overset{C}{\text{ОрбСК}} \rightarrow \text{ОпСК},$   
 $\overset{D}{\text{ОпСК}} \rightarrow \text{ССК}.$



Используемые системы координат

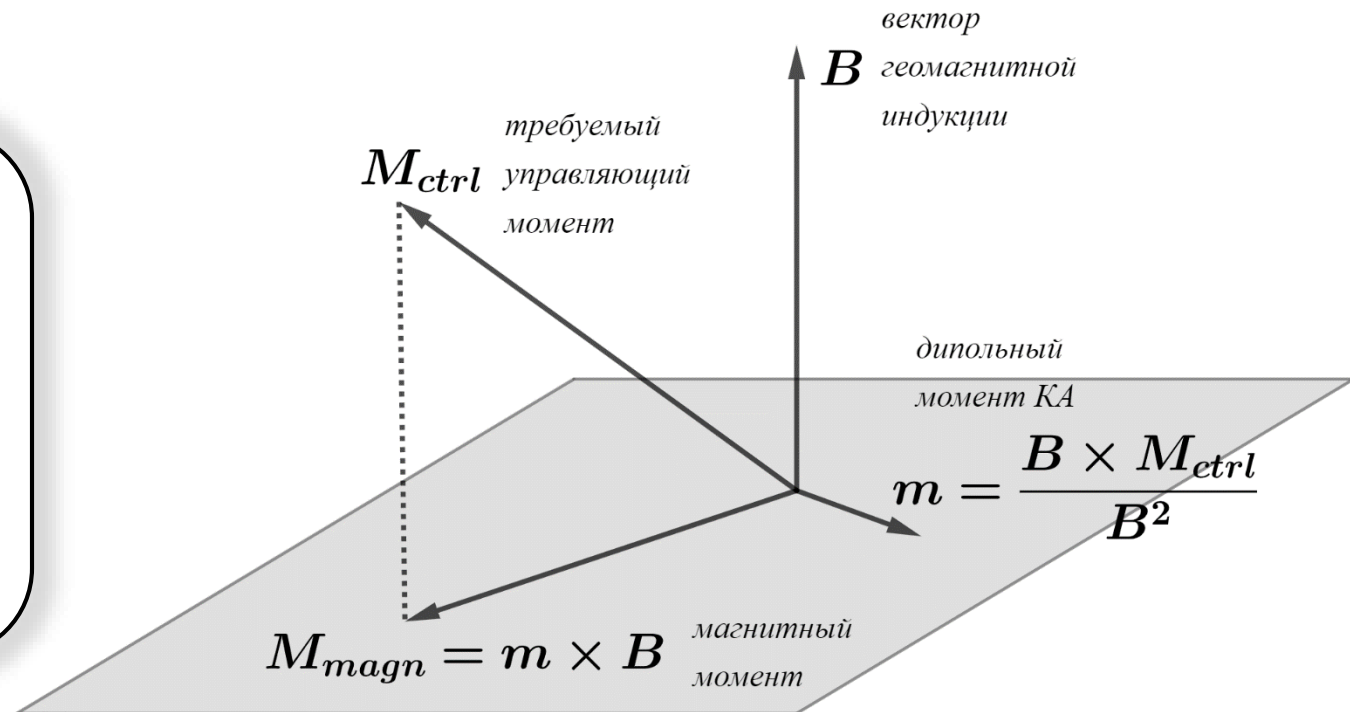
# Управляющий момент

Программное (Ляпуновское) управление

$$M_{ctrl} = -k_{\omega} \omega_{rel} - k_a S + \omega_{abs} \times J \omega_{abs} + J \dot{A} (\omega_o + \omega_{ref}) + J A \dot{\omega}_{ref} - M_{grav} - M_{aero}$$

Магнитный момент

$$M_{magn} = m \times B_{magn} = \left( \frac{B_{magn} \times M_{ctrl}}{B_{magn}^2} \right) \times B_{magn} =$$
$$= M_{ctrl} - \frac{B_{magn} (B_{magn}, M_{ctrl})}{B_{magn}^2}$$



# Построение опорного движения

## Этап 1

поиск траектории, на которой проекция управляющего момента на вектор магнитной индукции Земли минимальна

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= a_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos \omega_0 t + a_3 \sin 2\omega_0 t + a_4 \cos 2\omega_0 t, \\ \beta(t) &= b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \cos \omega_0 t + b_3 \sin 2\omega_0 t + b_4 \cos 2\omega_0 t, \\ \gamma(t) &= g_1 \sin \omega_0 t + g_2 \cos \omega_0 t + g_3 \sin 2\omega_0 t + g_4 \cos 2\omega_0 t, \\ \omega_0 & \text{ – орбитальная угловая скорость}\end{aligned}$$

параметризация  
траектории

управляющий  
момент

$$M_{ctrl}(\alpha, \beta, \gamma) = J \dot{\omega}_{abs}(\alpha, \beta, \gamma) + \omega_{abs}(\alpha, \beta, \gamma) \times J \omega_{abs}(\alpha, \beta, \gamma) - M_{grav}(\alpha, \beta, \gamma) - M_{aero}(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Phi_1 \rightarrow \min$$

$$\mathbb{U} = \{a_k, b_k, g_k \in (-2^\circ, 2^\circ), k = \overline{1,4}\}$$

первая задача  
оптимизации

1) A.Okhitina, D. Roldugin, S. Tkachev, *Application of the PSO for the construction of a 3-axis stable magnetically actuated satellite angular motion*, Acta Astronautica. 195 (2022) 86–97. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2022.03.001>.  
2) A.Okhitina, D. Roldugin, S. Tkachev, M. Ovchinnikov, Academy transaction note “closed form solution for a minimum deviation magnetically controllable satellite angular trajectory”, Acta Astronaut. 203 (2023) 60–64. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2022.11.045>. WoS, Scopus, Q1



# Построение опорного движения

## Этап 2

подбор оптимальных коэффициентов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость

$$M_{ctrl} = -k_{\omega} \omega_{rel} - k_a S + \omega_{abs} \times J \omega_{abs} + J \dot{A} (\omega_o + \omega_{ref}) + J A \dot{\omega}_{ref} - M_{grav} - M_{aero}$$

управляющий  
момент

обрезка  
управления

$$M_{magn} = \frac{B_{magn} \times M_{ctrl} \times B_{magn}}{B_{magn}^2}$$

вторая задача  
оптимизации

$$\Phi_2 \rightarrow \min$$
$$U = \left\{ \begin{array}{l} k_{\omega} \in (5 \cdot 10^{-5}, 10^{-2}) \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \\ k_a \in (10^{-8}, 5 \cdot 10^{-5}) \text{ Н} \cdot \text{м} \end{array} \right\}$$

# Как выбрать функционалы?

линеаризация в окрестности опорной траектории

$$J\dot{\omega}_{\text{rel}} = -k_{\omega}\omega_{\text{rel}} - 2k_a S - \frac{B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}})}{B_{\text{magn}}^2}$$

$$\dot{y} = G(t)y + f(t) \quad (1)$$

$$\dot{x} = G(t)x \quad (2)$$

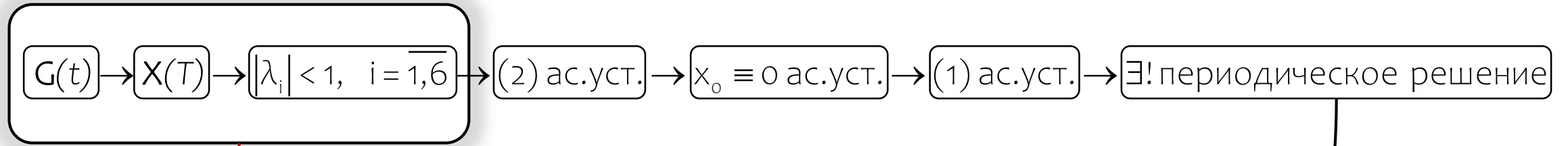


периодическое решение

$$y(t) = X(t)[E - X(T)]^{-1} \left\{ \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X(T) \int_t^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right\}$$



# Как выбрать функционалы?



$$\Phi_2 = \max_i (|\lambda_i|) \rightarrow \min$$

$$y(t) = X(t)[E - X(T)]^{-1} \left\{ \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + X(T) \int_t^T X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \right\}$$

$$f(t) = - \frac{B_{\text{magn}} (B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2}$$

# Метод роя частиц

(Particle Swarm Optimization)

$$\min_{x \in \mathbb{U}} \Phi(x)$$

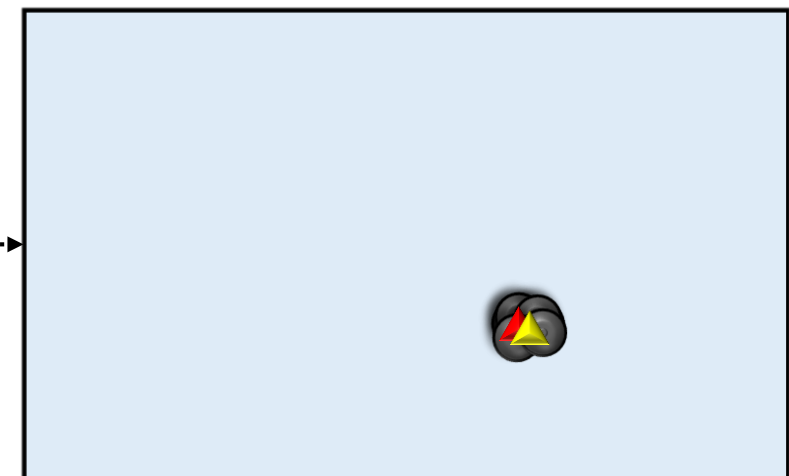
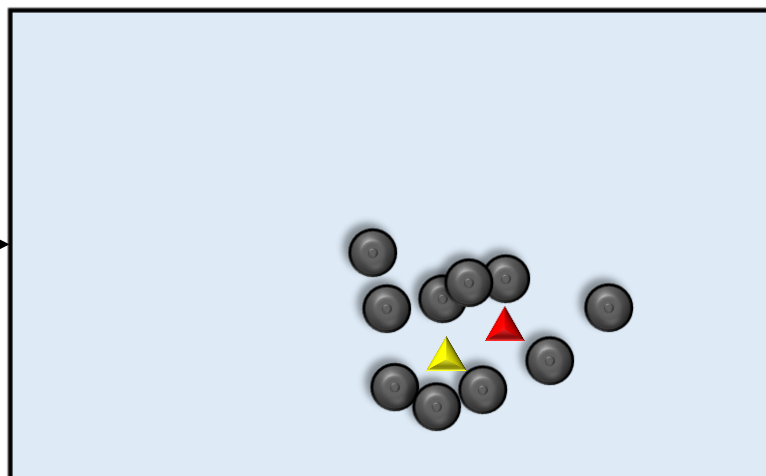
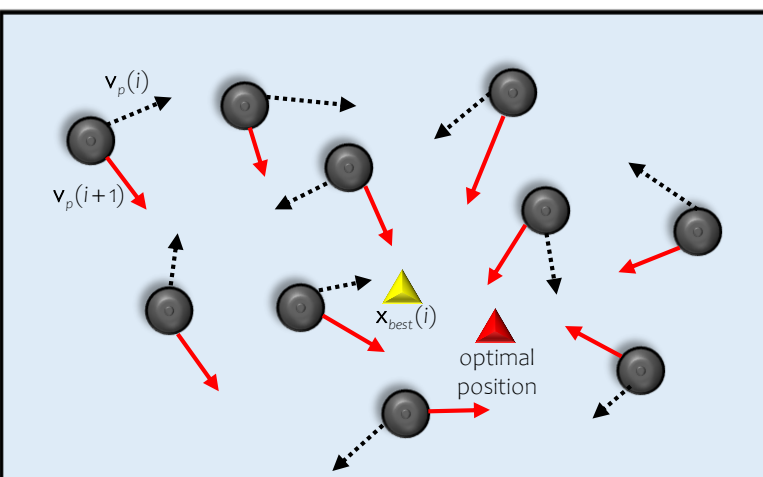
$\Phi(x)$  – функционал

$\mathbb{U}$  – пространство поиска

$P$  – количество частиц в рое

$x_p, v_p$  – положение и скорость  $p$ -ой частицы

$G$  – количество рассматриваемых поколений



$$x_p(i+1) = x_p(i) + v_p(i+1)$$

$$v_p(i+1) = c_{in} v_p(i) + c_{cog} [x_{p,best}(i) - x_p(i)] + c_{soc} [x_{best}(i) - x_p(i)]$$

*Инерционная компонента (продолжение поиска в том же направлении)*

*Когнитивная компонента (желание частицы вернуться в своё лучшее положение среди всех найденных ранее)*

*Социальная компонента (стремление занять лучшее положение среди всех найденных ранее в окрестности частицы)*

## Критерии остановки

- 1) стагнация функционала (малая величина производной функционала)
- 2) стагнация роя (попадание всех частиц в некоторую окрестность найденного лучшего положения)

# Выбор функционала $\Phi_1$

$$f(t) = -\frac{B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2}$$

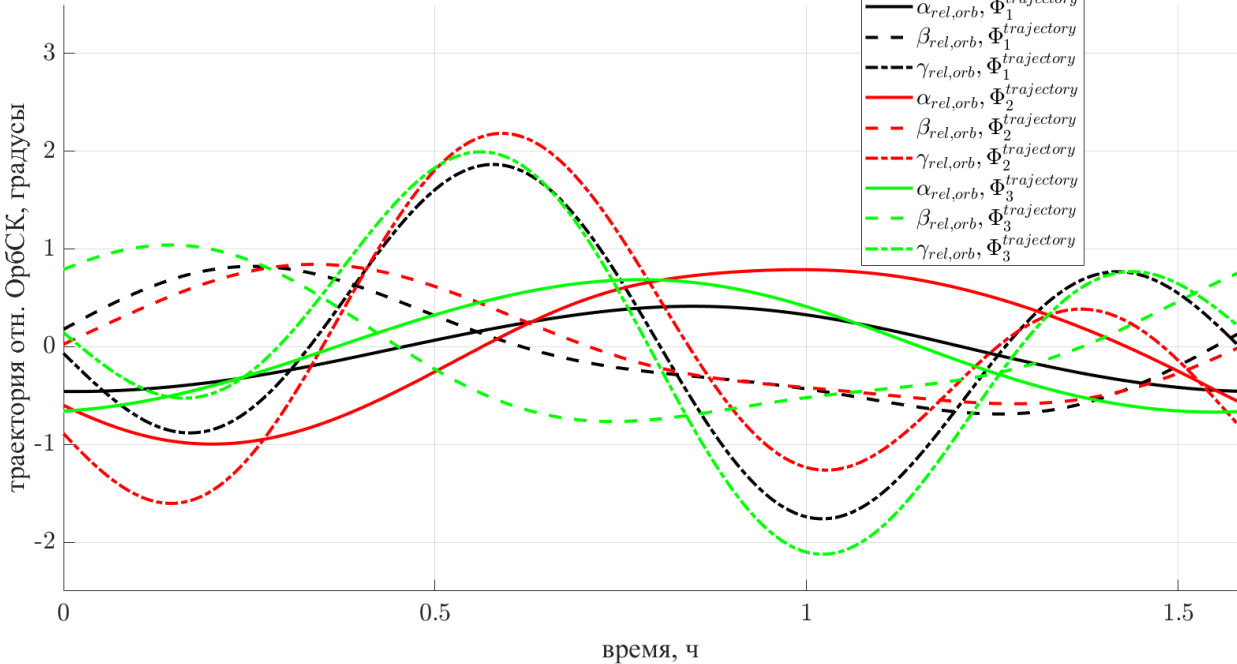
$$\Phi_1 = \max_i |\phi_k^i| \rightarrow \min, k = 1, 2, 3$$

$$\phi_1(t) = \frac{(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}}$$

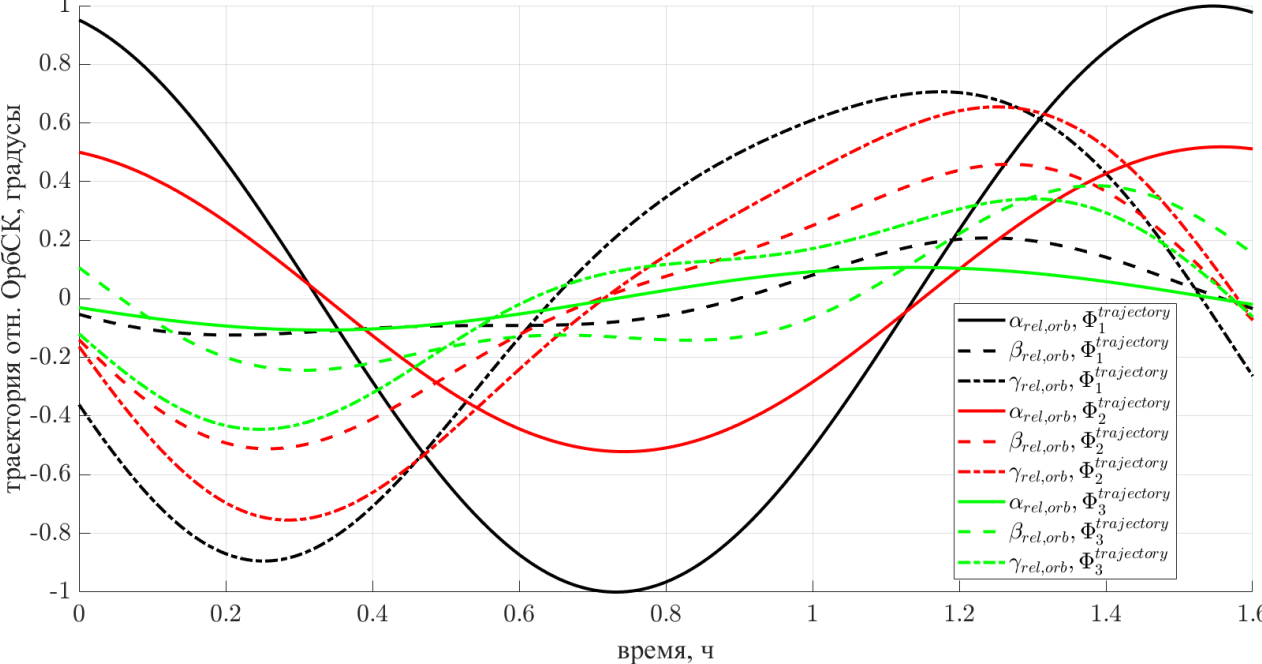
$$\phi_2(t) = (B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)$$

$$\phi_3(t) = \frac{\max |B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)|}{B_{\text{magn}}^2}$$

h = 550 км



h = 650 км



# Влияние возмущений

$$\dot{y} = (G(t) + \delta G(t))y + (f(t) + \delta f(t))$$

$$\delta f(t) \approx -2 \frac{B_{\text{magn}}(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2} (B_{\text{magn}}, \delta B) - \frac{\delta B(B_{\text{magn}}, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2} - \frac{B_{\text{magn}}(\delta B, M_{\text{ctrl}}^0)}{B_{\text{magn}}^2}$$

## Этап 0

Оптимальная аппроксимация  
магнитного поля

$$\delta B = B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}$$

$\Phi_0 \rightarrow \min$

# Выбор функционала $\Phi_0$

$$\delta B = B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}^{\text{oblique}}$$

$$\Phi_0 = \max_i |\delta \beta_k^i| \rightarrow \min, k = 1, 2, 3, 4$$

$$\delta \beta_1(t) = \frac{\|B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}^{\text{oblique}}\|_2}{\|B_{\text{magn}}^{\text{incline}}\|_2}$$

$$\delta \beta_2(t) = \frac{\|B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}^{\text{oblique}}\|_\infty}{\|B_{\text{magn}}^{\text{incline}}\|_\infty}$$

$$\delta \beta_3(t) = \|B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}^{\text{oblique}}\|_2$$

$$\delta \beta_4(t) = \frac{\|B_{\text{magn}}^{\text{incline}} - B_{\text{magn}}^{\text{oblique}}\|_\infty}{\|B_{\text{magn}}^{\text{incline}}\|_2}$$

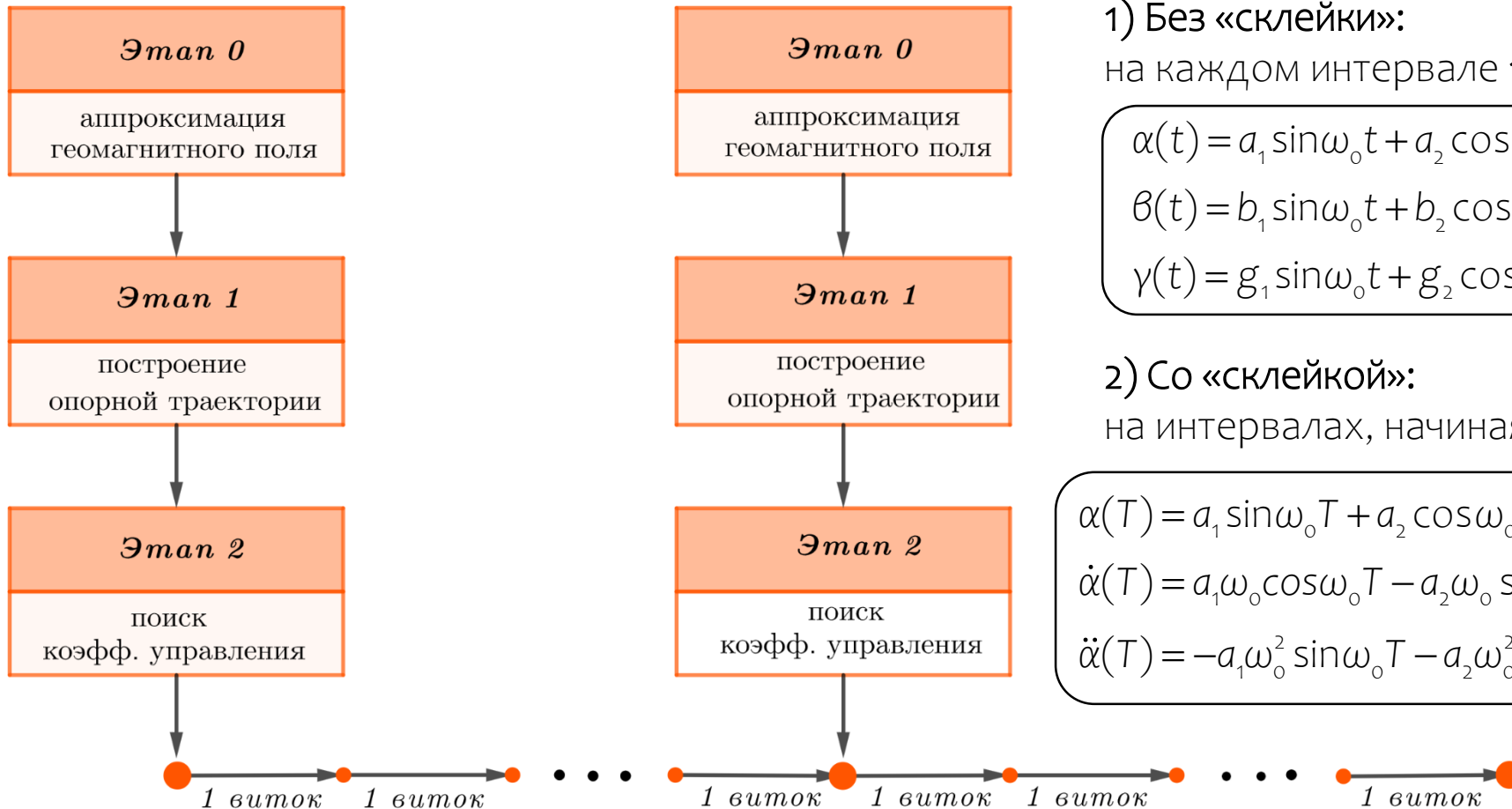
$$B_{\text{magn}} = -B_0 \left( k - 3 \frac{(k,r)r}{r} \right)$$

$$k^{\text{oblique}} = \begin{pmatrix} \cos x_1 \sin x_2 \\ \sin x_1 \sin x_2 \\ -\cos x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{U} = \left\{ x_1 \in (0, 2\pi), x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

# «Склейка»

Для гладкого перехода между траекториями с разными аппроксимациями магнитного поля



1) Без «склейки»:

на каждом интервале 12 параметров

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= a_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos \omega_0 t + a_3 \sin 2\omega_0 t + a_4 \cos 2\omega_0 t \\ \beta(t) &= b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \cos \omega_0 t + b_3 \sin 2\omega_0 t + b_4 \cos 2\omega_0 t \\ \gamma(t) &= g_1 \sin \omega_0 t + g_2 \cos \omega_0 t + g_3 \sin 2\omega_0 t + g_4 \cos 2\omega_0 t\end{aligned}$$

2) Со «склежкой»:

на интервалах, начиная со второго, 3 параметра и 9 связей

$$\begin{aligned}\alpha(T) &= a_1 \sin \omega_0 T + a_2 \cos \omega_0 T + a_3 \sin 2\omega_0 T + a_4 \cos 2\omega_0 T \\ \dot{\alpha}(T) &= a_1 \omega_0 \cos \omega_0 T - a_2 \omega_0 \sin \omega_0 T + 2a_3 \omega_0 \cos 2\omega_0 T - 2a_4 \omega_0 \sin 2\omega_0 T \\ \ddot{\alpha}(T) &= -a_1 \omega_0^2 \sin \omega_0 T - a_2 \omega_0^2 \cos \omega_0 T - 4a_3 \omega_0^2 \sin 2\omega_0 T - 4a_4 \omega_0^2 \cos 2\omega_0 T\end{aligned}$$

# Подбор лучшего набора функционалов

Распределение наихудших значений точности отслеживания опорной траектории для **высоты** орбиты 650 км для различных **возмущений** тензора инерции КА

|                 | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ |
|-----------------|----------|----------|----------|
| прямой диполь   | № 1.0    | № 2.0    | № 3.0    |
| $\delta\beta_1$ | № 1.1    | № 2.1    | № 3.1    |
| $\delta\beta_2$ | № 1.2    | № 2.2    | № 3.2    |
| $\delta\beta_3$ | № 1.3    | № 2.3    | № 3.3    |
| $\delta\beta_4$ | № 1.4    | № 2.4    | № 3.4    |

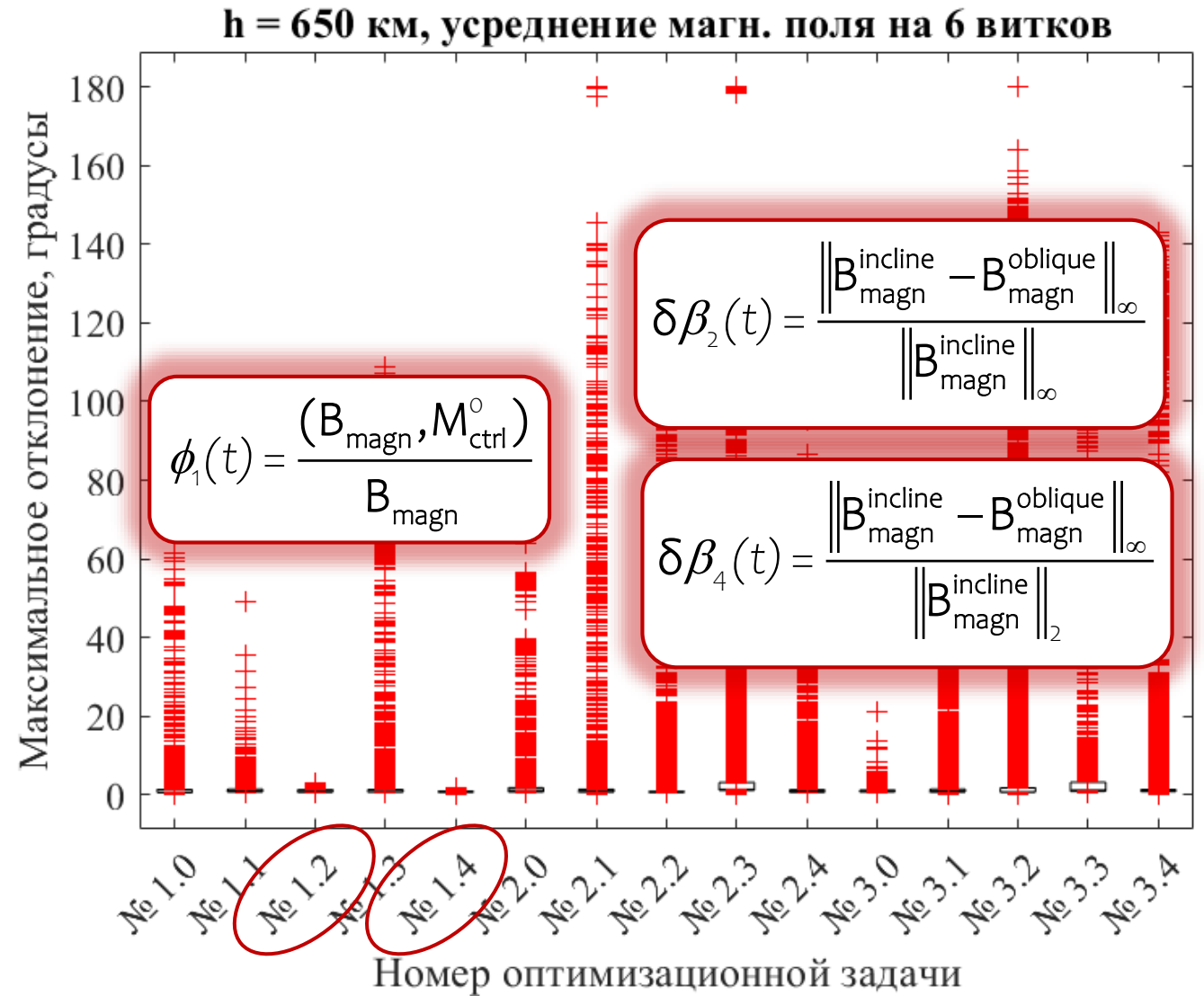




# Подбор лучшего набора функционалов

Распределение наихудших значений точности отслеживания опорной траектории для **высоты** орбиты 650 км для различных **возмущений** тензора инерции КА

|                 | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ |
|-----------------|----------|----------|----------|
| прямой диполь   | № 1.0    | № 2.0    | № 3.0    |
| $\delta\beta_1$ | № 1.1    | № 2.1    | № 3.1    |
| $\delta\beta_2$ | № 1.2    | № 2.2    | № 3.2    |
| $\delta\beta_3$ | № 1.3    | № 2.3    | № 3.3    |
| $\delta\beta_4$ | № 1.4    | № 2.4    | № 3.4    |

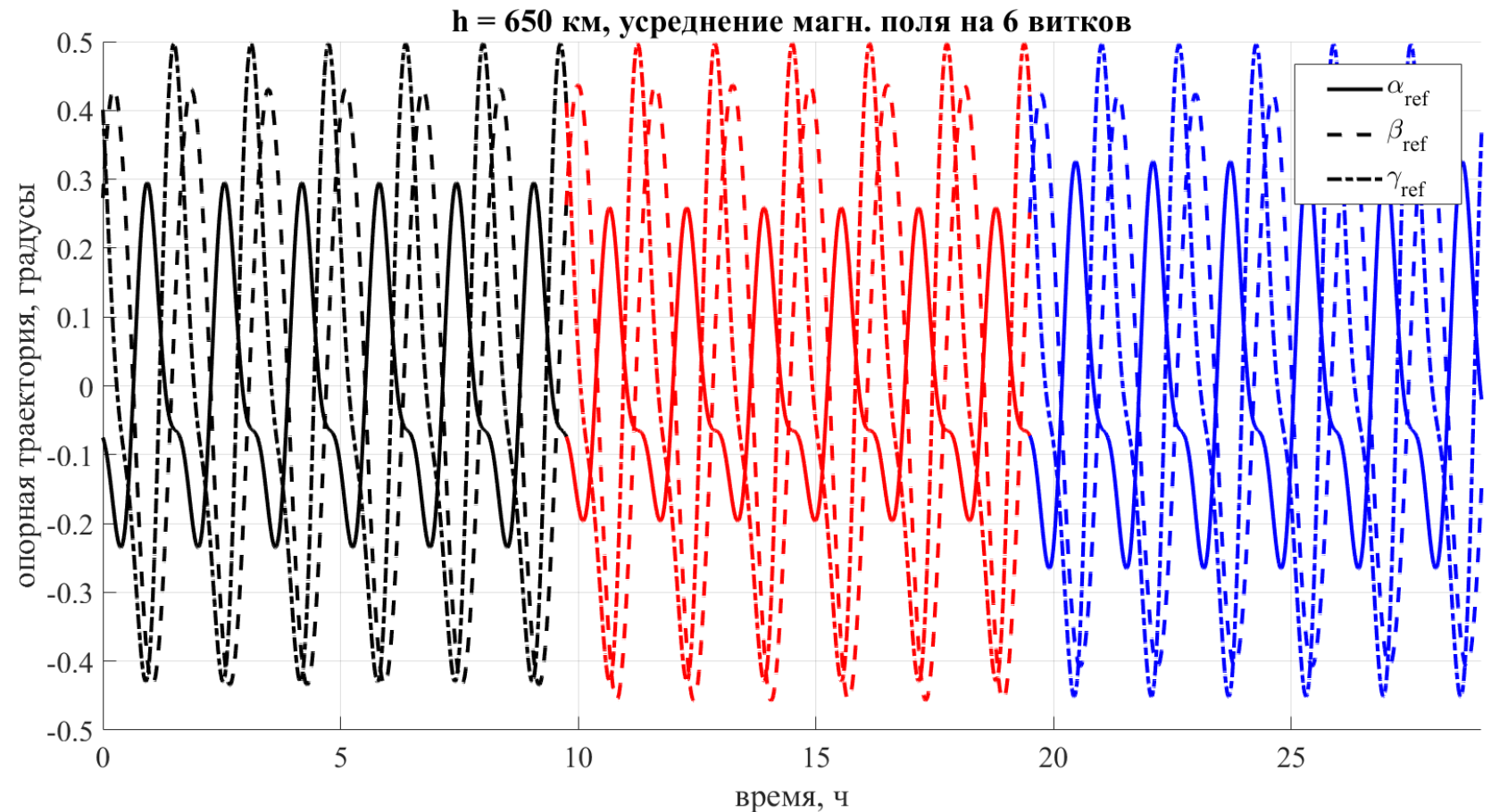


# Опорная траектория

Полученная с помощью процедуры «склейки» опорная траектория  
3 интервала по 6 витков

## Коэффициенты траектории

|       | Интервал 1 | Интервал 2 | Интервал 3 |
|-------|------------|------------|------------|
| $a_1$ | -0.153     | -0.107     | -0.182     |
| $a_2$ | -0.154     | -0.153     | -0.158     |
| $a_3$ | 0.051      | 0.029      | 0.066      |
| $a_4$ | 0.079      | 0.078      | 0.082      |
| $b_1$ | 0.337      | 0.354      | 0.316      |
| $b_2$ | 0.272      | 0.273      | 0.270      |
| $b_3$ | -0.002     | -0.010     | 0.009      |
| $b_4$ | 0.001      | 0.0002     | 0.003      |
| $g_1$ | -0.076     | -0.077     | -0.049     |
| $g_2$ | 0.398      | 0.398      | 0.399      |
| $g_3$ | -0.130     | -0.130     | -0.144     |
| $g_4$ | 0.003      | 0.003      | 0.001      |



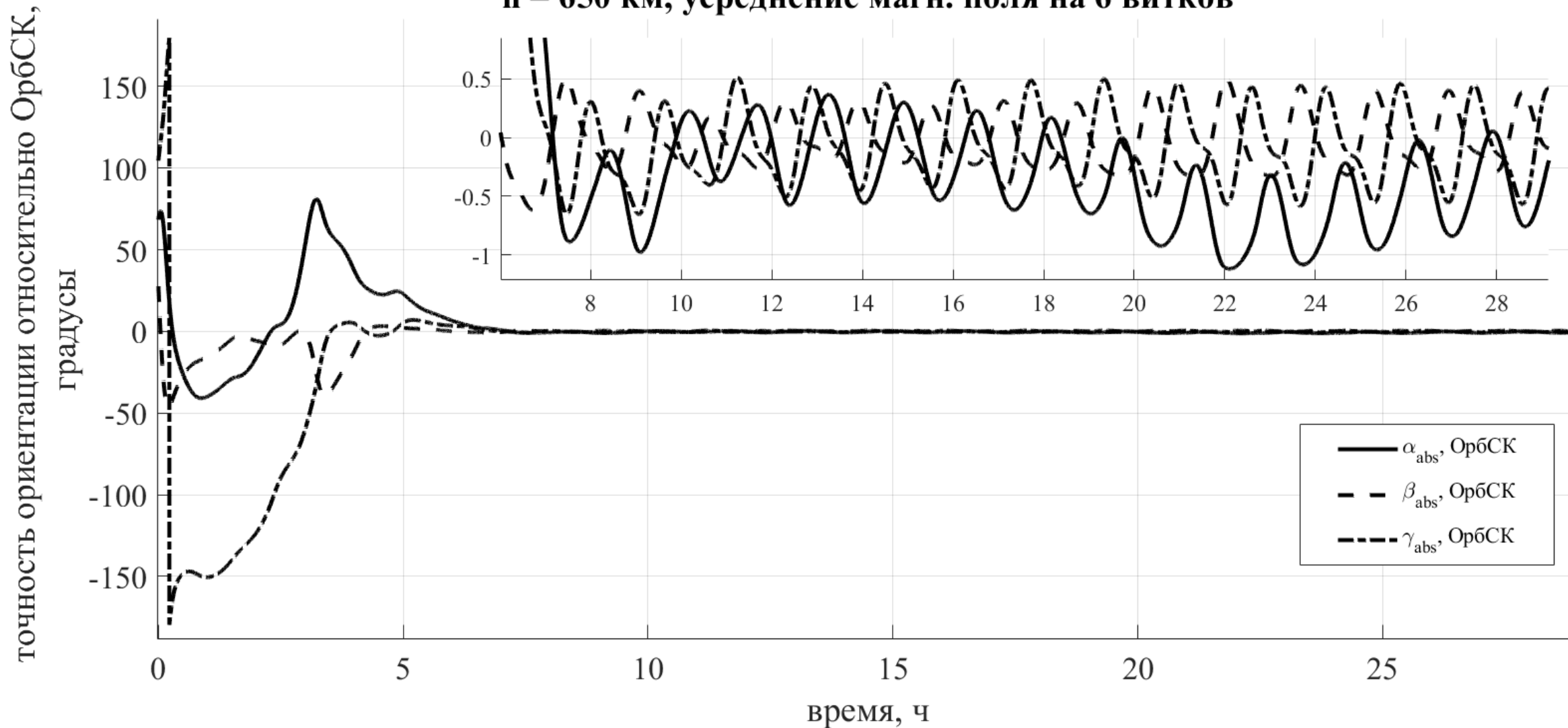
# Численное моделирование

## Параметры численного моделирования

|                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| Время моделирования                   | $T = 3 \cdot 6 \cdot T_0 = 18T_0 \approx 30 \text{ ч}$                             |
| Начальная угловая скорость КА         | $\omega_{abs}^{CCK} = [1, 2, 3] \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}$                       |
| Начальная ориентация КА               | $\alpha_{rel} = 55^\circ$<br>$\beta_{rel} = 55^\circ$<br>$\gamma_{rel} = 55^\circ$ |
| Модель магнитного поля Земли          | наклонный диполь   |
| Неточность знания плотности атмосферы | 20%  |
| Неточность знания тензора инерции КА  | 5%   |
| Внешние неучтенные возмущения         | $M_{dist} \sim 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м}$                                   |

# Численное моделирование

$h = 650$  км, усреднение магн. поля на 6 витков



# Заключение

Разработан и обоснован подход к синтезу алгоритма магнитного трехосного управления, состоящий из трех этапов:

- оптимальная аппроксимация геомагнитного поля;
- построение управляемой траектории;
- поиск коэффициентов управления.

Методика позволяет кратно улучшить точность ориентации при постоянно действующих возмущениях по сравнению с существующими методами

Результаты

- **опубликованы** в журналах и сборниках трудов конференций (из них WoS/Scopus **4** (**2** Q1), РИНЦ **7**);
- **доложены** на всероссийских (**5**) и международной (**1**) конференциях;
- **зарегистрированы** в виде РИД (**2** программных комплексы для ЭВМ).