



# **Движение спутника в окрестности солнечной стабилизации под управлением алгоритма Sdot**

Д.С. Ролдугин, С.С. Ткачев

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

# Алгоритм Sdot

- Предназначен для ориентации панелей солнечных батарей, применен на Чибис-М
- Использует показания солнечного датчика и магнитные катушки

$$\mathbf{m} = k \cos \alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}) \quad \mathbf{m} = -k \cos \alpha \frac{\mathbf{S}_k - \mathbf{S}_{k-1}}{\Delta t}$$

- Было показано, что аппарат выходит на вращение и стремится к требуемому положению
- В этом положении уравнения движения вырождаются
- Вводится другой набор углов и проводится исследование движения в окрестности требуемой ориентации

# Уравнения движения

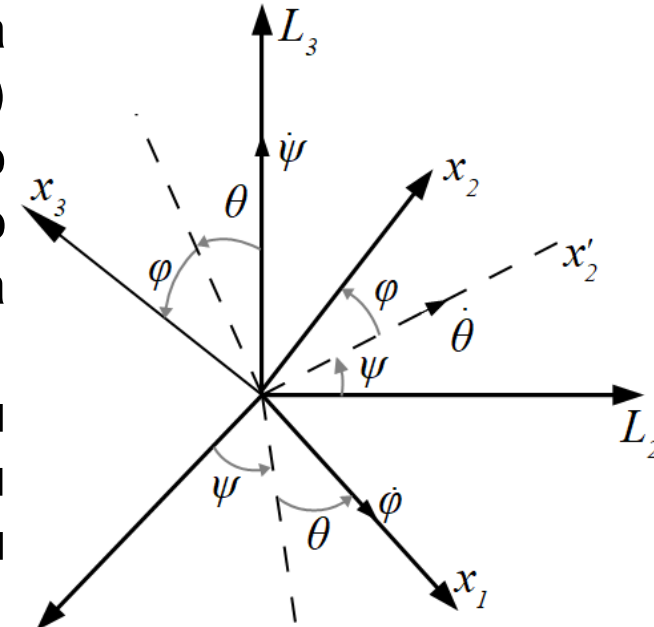
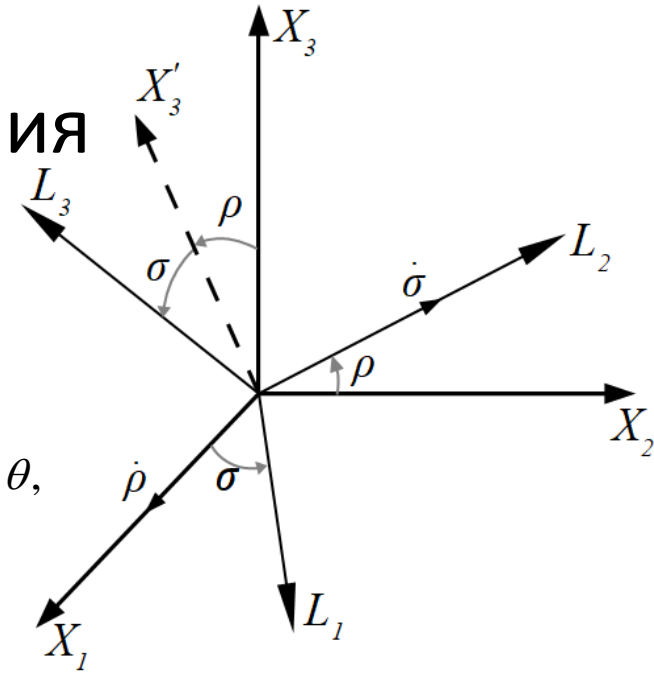
$$\frac{dL}{dt} = M_3, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{L \cos \sigma} M_2, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L} M_1,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = L \sin \theta \left( -\frac{1}{A} + \frac{\sin^2 \varphi}{B} + \frac{\cos^2 \varphi}{C} \right) + \frac{1}{L \cos \theta} (-M_1 \sin \psi + M_2 \cos \psi),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = L \left( \frac{\sin^2 \varphi}{B} + \frac{\cos^2 \varphi}{C} \right) + \frac{1}{L} M_2 (\cos \psi \tan \theta + \tan \sigma) - \frac{1}{L} M_1 \sin \psi \tan \theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = L \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) - \frac{1}{L} (M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi).$$

Ориентация вектора кинетического момента относительно требуемого направления (ось  $X_3$ ) задается двумя углами вместо одного, но отсутствует вырождение в нуле. Аналогично для ориентации оси максимального момента относительно вектора кинетического момента. Связь системы координат с требуемым направлением упрощает уравнения, хотя и усложняет выражение для вектора индукции поля.



# Линеаризованные уравнения

$$\frac{dL}{dt} = kB_0\chi B_3 L \left[ B_1 \left\{ \frac{1}{C}(\sigma + \theta \cos \psi + \varphi \sin \psi) - \frac{1}{A} \theta \cos \psi - \frac{1}{B} \varphi \sin \psi \right\} - \right. \\ \left. B_2 \left\{ \frac{1}{C}(\rho - \theta \sin \psi + \varphi \cos \psi) + \frac{1}{A} \theta \sin \psi - \frac{1}{B} \varphi \cos \psi \right\} \right], \quad \chi(t) = \sqrt{1 + 3 \sin^2 \omega_0 t \sin^2 i}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = kB_0\chi B_3^2 \left[ \frac{1}{C}(-\rho + \theta \sin \psi + \varphi \cos \psi) - \frac{1}{A} \theta \sin \psi + \frac{1}{B} \varphi \cos \psi \right], \quad \cos \alpha = B_3$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -kB_0\chi B_3^2 \left[ \frac{1}{C}(\sigma + \theta \cos \psi + \varphi \sin \psi) - \frac{1}{A} \theta \cos \psi - \frac{1}{B} \varphi \sin \psi \right],$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = L\theta \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + kB_0\chi B_3^2 \left[ \frac{1}{C}(\sigma \sin \psi + \rho \cos \psi) + \varphi \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \right],$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{L}{C}, \quad \leftarrow \text{Вращение вокруг оси макс. момента}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = L\varphi \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) + kB_0\chi B_3^2 \left[ \frac{1}{C}(\sigma \cos \psi - \rho \sin \psi) + \varphi \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \right].$$

# Переход к амплитудам колебаний оси макс. момента инерции

- В свободном движении ось совершает колебания  
$$\varphi = a \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - b \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau), \quad \lambda_\varphi^2 = l(C/A - 1)$$

$$\theta = a \frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) + b \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau), \quad \lambda_\theta^2 = l(C/B - 1)$$

- Считаем, что амплитуды меняются
- Частота меняется из-за изменения кинетического момента

$$\frac{d\lambda_\varphi \lambda_\theta}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( l \sqrt{(C/A - 1)(C/B - 1)} \right) = \varepsilon \xi M_l,$$

$$\xi = \sqrt{(C/A - 1)(C/B - 1)}$$

# Окончательные безразмерные уравнения

$$\dot{l} = \varepsilon \chi l B_3 \left[ B_1 \left\{ \sigma + \theta \cos \psi + \varphi \sin \psi - \frac{C}{A} \theta \cos \psi - \frac{C}{B} \varphi \sin \psi \right\} - B_2 \left\{ \rho - \theta \sin \psi + \varphi \cos \psi + \frac{C}{A} \theta \sin \psi - \frac{C}{B} \varphi \cos \psi \right\} \right],$$

$$\dot{\rho} = \varepsilon \chi B_3^2 \left[ -\rho + \theta \sin \psi + \varphi \cos \psi - \frac{C}{A} \theta \sin \psi + \frac{C}{B} \varphi \cos \psi \right],$$

$$\dot{\sigma} = -\varepsilon \chi B_3^2 \left[ \sigma + \theta \cos \psi + \varphi \sin \psi - \frac{C}{A} \theta \cos \psi - \frac{C}{B} \varphi \sin \psi \right],$$

$$\dot{a} = \varepsilon \xi \tau b \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} M_l + \varepsilon M_a (\psi, \lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) + \varepsilon \chi a B_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \cos^2 (\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \sin^2 (\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \right) + \varepsilon \chi b B_3^2 \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \sin (\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos (\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau),$$

$$\dot{b} = -\varepsilon \xi \tau a M_l + \varepsilon M_b (\psi, \lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) + \varepsilon \chi b B_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \sin^2 (\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \cos^2 (\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \right) + \varepsilon \chi a B_3^2 \frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \sin (\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos (\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau),$$

$$\dot{\psi} = l,$$

Кинетический момент отнесен к невозмущенному

$$l = L/L_0$$

Единица времени – период невозмущенного вращения

$$\tau = \frac{L_0}{C} t$$

Малый параметр – изменение кин. момента на характерном времени

$$\varepsilon = k B_0 / L_0$$

# Усредненные уравнения

$$\dot{l} = \varepsilon \chi l B_3 (B_1 \sigma - B_2 \rho), \quad \dot{\rho} = -\varepsilon \chi B_3^2 \rho, \quad \dot{\sigma} = -\varepsilon \chi B_3^2 \sigma, \quad M_l = \chi l B_3 (B_1 \sigma - B_2 \rho)$$

$$\dot{a} = \varepsilon \xi \tau b \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} M_l + \varepsilon \chi a B_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \cos^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \sin^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \right) +$$

$$\varepsilon \chi b B_3^2 \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau),$$

$$\dot{b} = -\varepsilon \xi \tau a M_l + \varepsilon \chi b B_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \sin^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \cos^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \right) +$$

$$\varepsilon \chi a B_3^2 \frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau).$$

Уравнения, описывающие поведение кинетического момента, отделяются и интегрируются

# Поведение оси макс. момента инерции

$$\dot{a} = \varepsilon\chi a B_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \cos^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \sin^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \right) + \varepsilon\chi b B_3^2 \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau),$$

$$\dot{b} = \varepsilon\chi b B_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \sin^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) - \frac{C}{A} \cos^2(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \right) + \varepsilon\chi a B_3^2 \frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau).$$

$M_l \approx 0$  на большом интервале времени

Вводятся две замены переменных:

$$\alpha = a \sqrt{\frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi}}, \quad \beta = b \sqrt{\frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\theta}}; \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) & \sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \\ -\sin(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) & \cos(\lambda_\varphi \lambda_\theta \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Система приводится к виду

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \varepsilon\chi B_3^2 \left( 1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \varepsilon\chi B_3^2 \left( \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \lambda_\varphi \lambda_\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Функция Ляпунова  $V = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ ,  $\dot{V} = \varepsilon\chi B_3^2 \left( 1 - \frac{C}{B} \right) u^2 + \varepsilon\chi B_3^2 \left( 1 - \frac{C}{A} \right) v^2$ .



# Поведение оси макс. момента инерции

- Можно дополнительно усреднить уравнения по времени
- Входит в компоненту поля  $B_3$  и его величину  $\chi$ , которую нужно разложить в ряд

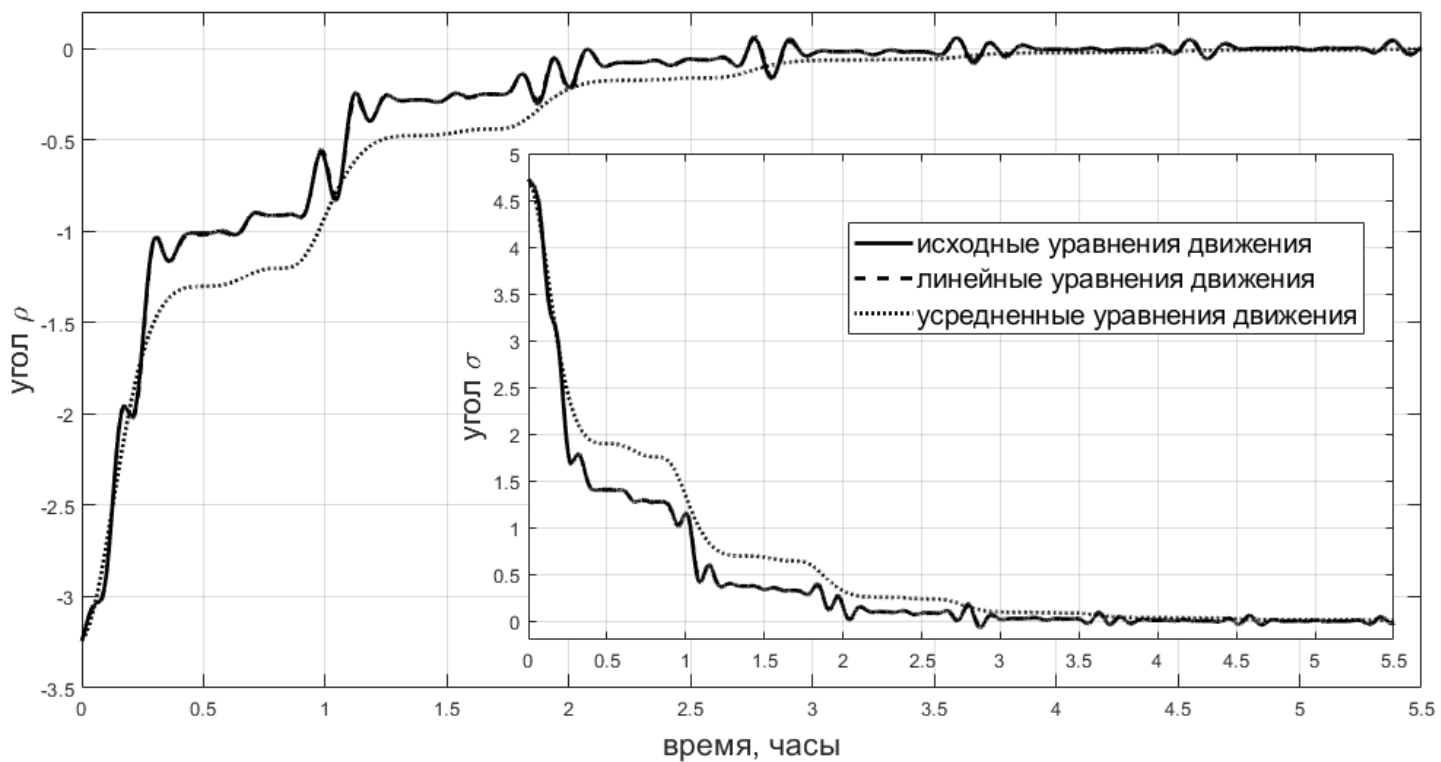
$$\dot{a} = \varepsilon (1 + 3 \sin^2 i)^{-1/4} \left( \beta_0 + \frac{1}{2} \kappa^2 \beta_1 \right) \left( 1 - \frac{C}{2B} - \frac{C}{2A} \right) a,$$

$$\dot{b} = \varepsilon (1 + 3 \sin^2 i)^{-1/4} \left( \beta_0 + \frac{1}{2} \kappa^2 \beta_1 \right) \left( 1 - \frac{C}{2B} - \frac{C}{2A} \right) b.$$

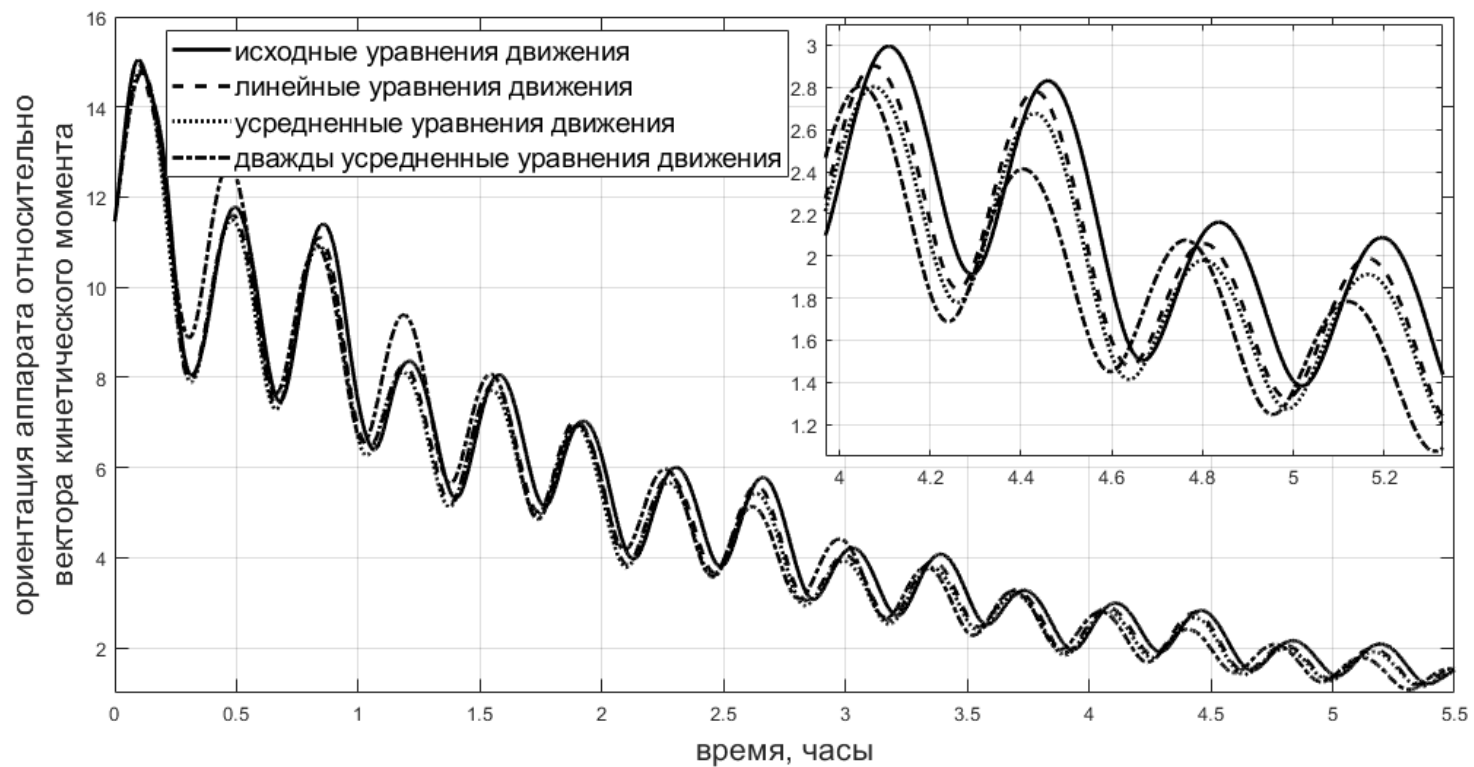
$$\begin{aligned} \beta_0 &= \alpha_0^2 + 1/2 \alpha_1^2 + 1/2 \alpha_2^2, & \alpha_0 &= q_{33}^B \cos i - 1/2 q_{32}^B \sin i, \\ \beta_1 &= 2\alpha_0 \alpha_1, & \alpha_1 &= -3/2 q_{31}^B \sin i, \\ & & \alpha_2 &= 3/2 q_{32}^B \sin i. \end{aligned}$$

$$\kappa = \left( \frac{\sqrt{1 + 3 \sin^2 i} - 1}{\sqrt{3} \sin i} \right)^2$$

# Направление вектора кинетического момента



# Угол между осью максимального момента инерции и вектором кинетического момента



# Заключение

- Введены переменные, пригодные для описания движения КА под управлением алгоритма  $S_{dot}$  в окрестности требуемого режима
- Получены эволюционные уравнения
- Показано поведение вектора кинетического момента в инерциальном пространстве и оси максимального момента инерции относительно вектора кинетического момента