XLIV АКАДЕМИЧЕСКИЕ ЧТЕНИЯ ПО КОСМОНАВТИКЕ

С е к ц и я 5. Прикладная небесная механика и управление движением

Использование линейно-квадратичного управления для разворотов космического аппарата на большие углы

<u>А.И.Шестопёров</u>, С.С.Ткачев

Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН

Москва, Россия,
28-31 января 2020 г.

Содержание

- Постановка задачи
- Линейно-квадратичное управление
- Поиск положительно определенного решения уравнения Риккати
- Обеспечение глобальной асимптотической устойчивости заданного положения равновесия с помощью линейно-квадратичного управления
- Полученные результаты

Постановка задачи

Исследуется угловое движение космического аппарата (КА) под действием управляющего момента $\mathbf{u}$:

$$(1)\ \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u},\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{2}\left(\lambda_0 \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega}\right).$$

Задача: обеспечение глобальной асимптотической устойчивости состояния $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}\ \left(\lambda_0 = 1\right)$.

Стандартное решение: использовать ПД-регулятор $\mathbf{u} = -k_\omega \boldsymbol{\omega} - k_\lambda \boldsymbol{\lambda},$ где $k_\omega > 0$ и $k_\lambda > 0$ – постоянные коэффициенты.

Вопрос: можно ли решить поставленную задачу с помощью $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}^T & \boldsymbol{\lambda}^T\end{pmatrix}^T$ – вектор состояния системы (1), а $\mathbf{K}$ – постоянная матрица?

И как построить эту матрицу обратной связи $\mathbf{K}$?

Линейно-квадратичное управление, как способ формирования стационарной отрицательной обратной связи

Линеаризованные уравнения движения КА имеют вид

$$(2)\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \frac{1}{2}\mathbf{E}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{3\times3} \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Линейно-квадратичное управление (ЛКУ): $\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$.

$\mathbf{P}$ – решение алгебраического уравнения Риккати (АУР):

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0.$$

Минимизирует функционал $J = \int_0^\infty \left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)dt$, где $\mathbf{Q} \geq 0$, $\mathbf{R} > 0$.

Стабилизирующее решения уравнения Риккати

Линейная система (2) является управляемой, а $\mathbf{R} > 0$.

Пусть $\mathbf{Q}$ – положительно определенная матрица $(\mathbf{Q} > 0)$.

Тогда $[1]$ существует единственное положительно определенное решение уравнения Риккати $\mathbf{P} > 0$ (**стабилизирующее** решение).

Причем соответствующее ЛКУ $\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия системы (2).

[1] *Liberzon D. Calculus of Variations and Optimal Control Theory* // *Princeton, NJ* : *Princeton university press.* — 2012. — *P.* 256.

Выбор матриц функционала качества

Задача – построить ЛКУ, обеспечивающее **глобальную** асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия нелинейной системы (1).

Для этого будем искать положительно определенные матрицы **Q** и **R** так, чтобы

- стабилизирующее решение АУР выражалось в явном виде через параметры системы и элементы матриц **Q** и **R**;
- ЛКУ, построенное на основании стабилизирующего решения АУР, обеспечивало глобальную асимптотическую устойчивость системы (1).

Уравнение Риккати в задаче управления угловым движением КА

Ищем $\mathbf{Q}$ в виде $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}$, где $\mathbf{Q}_1 > 0$, $\mathbf{Q}_2 > 0$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix}.$$

Выпишем АУР в явном виде:

$$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{12} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{P}_{22} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{11}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T\mathbf{Z}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12}^T\mathbf{Z}\mathbf{P}_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix} = 0$$

Здесь $\mathbf{Z} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1} > 0$.

Окончательно, АУР представляется как система из трех уравнений:

$$(3)\ \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_{12}^T + \mathbf{P}_{12}\right) - \mathbf{P}_{11}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{11} + \mathbf{Q}_1 = 0,\ \frac{1}{2}\mathbf{P}_{22} = \mathbf{P}_{11}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{12},\ \mathbf{P}_{12}^T\mathbf{Z}\mathbf{P}_{12} = \mathbf{Q}_2.$$

Стабилизирующее решение уравнения Риккати в случае диагонального тензора инерции КА

Пусть $\mathbf{J} = diag\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix}$.

Тогда $\mathbf{Z} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1} = diag\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$, где $z_i = 1\big/\left(r_i J_i^2\right)$, $i = \overline{1,3}$.

Возьмем $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ диагональными, где

$q_i > 0,\ i = \overline{1,6},\ r_i > 0,\ i = \overline{1,3}$ их диагональные элементы.

Покажем, что стабилизирующее решение АУР $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} > 0$

представляется в виде

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{pmatrix} p_1' & 0 & 0 \\ 0 & p_2' & 0 \\ 0 & 0 & p_3' \end{pmatrix} > 0, \mathbf{P}_{12} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} > 0, \mathbf{P}_{22} = \begin{pmatrix} p_1'' & 0 & 0 \\ 0 & p_2'' & 0 \\ 0 & 0 & p_3'' \end{pmatrix} > 0.$$

Поиск стабилизирующего решения уравнения Риккати в явном виде

Решаем АУР (3):

$$p_i = \pm\sqrt{q_{i+3}/z_i} = \pm J_i\sqrt{r_i q_{i+3}},\ i=\overline{1,3}.$$

$$p_i' = \pm\sqrt{\frac{p_i+q_i}{z_i}} = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{q_{i+3}/z_i}+q_i}{z_i}} = \pm J_i\sqrt{r_i\left(\pm J_i\sqrt{r_i q_{i+3}}+q_i\right)},\ i=\overline{1,3}.$$

$$p_i'' = 2z_i p_i' p_i = 2z_i\sqrt{\frac{q_{i+3}}{z_i}\frac{p_i+q_i}{z_i}} = 2\sqrt{q_{i+3}\left(\sqrt{q_{i+3}/z_i}+q_i\right)},\ i=\overline{1,3}.$$

Лемма Шура. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow$

1. $\mathbf{P}_{11} > 0$ и $\mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{12}^T\mathbf{P}_{11}^{-1}\mathbf{P}_{12} > 0$ или
2. $\mathbf{P}_{22} > 0$ и $\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{22}^{-1}\mathbf{P}_{12}^T > 0.$

Из леммы Шура $\Rightarrow$ для того чтобы $\mathbf{P} > 0$ необходимо,

чтобы $p_i' > 0$ и $p_i'' > 0, i=\overline{1,3} \Rightarrow p_i > 0, i=\overline{1,3}$. Выбираем знак $+$.

Проверка положительной определенности найденного решения уравнения Риккати

Проверим выполнение условия $\mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{12}^T \mathbf{P}_{11}^{-1} \mathbf{P}_{12} > 0$ из леммы Шура.

После преобразований: $\sqrt{\dfrac{q_{i+3}}{z_i}} + 2q_i > 0,\ i = \overline{1,3}$

Это неравенство выполняется в силу выбора $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$:

$q_i > 0,\ i = \overline{1,6},\ z_i = 1\big/\left(r_i J_i^2\right) > 0,\ i = \overline{1,3}.$

В итоге найдено стабилизирующее решение АУР

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} diag\left(p_1' \quad p_2' \quad p_3'\right) & diag\left(p_1 \quad p_2 \quad p_3\right) \\ \hline diag\left(p_1 \quad p_2 \quad p_3\right) & diag\left(p_1'' \quad p_2'' \quad p_3''\right) \end{array}\right) > 0.$$

Стабилизирующий линейно-квадратичный закон управления и обеспечение глобальной асимптотической устойчивости заданного положения равновесия

Закон управления обеспечивающий, асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия линеаризованной системы (2):

$$\mathbf{u}_{LQR} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}\mathbf{x} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{P}_{12}\boldsymbol{\lambda}\right) =$$

$$= -diag\left(\sqrt{\left(y_i J_i + q_i / r_i\right)}\right)_{i=1}^{3}\boldsymbol{\omega} - diag\left(y_i\right)_{i=1}^{3}\boldsymbol{\lambda},\ \text{где}\ y_i = \sqrt{q_{i+3}/r_i},\ i = \overline{1,3}.$$

Оно минимизирует $J = \int\limits_0^\infty \sum\limits_{i=1}^{6}\left(q_i\omega_i^2 + q_{i+3}\lambda_i^2 + r_i u_i^2\right)dt.$

Замкнутая система управления имеет вид:

$$\mathbf{Z}^{-1}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{J}\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right) + \mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{P}_{12}\boldsymbol{\lambda} = 0,\ \text{где}\ \mathbf{Z} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1};$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{2}\left(\lambda_0\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega}\right).$$

Обеспечение глобальной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия с помощью второго метода Ляпунова

Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{Z}^{-1}\boldsymbol{\omega} + 2\left(1-\lambda_0\right).$$

Найдем ее первую производную:

$$\dot{V} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{Z}^{-1}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{JR}\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right),$$

где $\mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{JR} = diag\left(\sqrt{\dfrac{r_i}{q_{i+3}}}\right)_{i=1}^{3}.$

Подберем коэффициенты $r_i > 0,\ i=\overline{1,3}$ и $q_i > 0,\ i=\overline{1,6}$

таким образом, чтобы $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{JR}\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right) = 0.$

Ограничения на параметры управления

$$\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{R} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}) = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \left(\frac{(J_3 - J_2)}{y_1} + \frac{(J_1 - J_3)}{y_2} + \frac{(J_2 - J_1)}{y_3} \right) = 0.$$

Здесь $y_i = \sqrt{q_{i+3}/r_i},\ i = \overline{1,3}.$

$$\frac{(J_3 - J_2)}{y_1} + \frac{(J_1 - J_3)}{y_2} + \frac{(J_2 - J_1)}{y_3} = 0.$$

Считаем $J_3 \geq J_2 \geq J_1.$

Ограничение на параметры управления: $(*)\ \dfrac{\vartriangle J_{32}}{y_1} - \dfrac{\vartriangle J_{31}}{y_2} + \dfrac{\vartriangle J_{21}}{y_3} = 0,$

где $\vartriangle J_{32} = J_3 - J_2 > 0,\ \vartriangle J_{31} = J_3 - J_1 > 0,\ \vartriangle J_{21} = J_2 - J_1 > 0.$

Ограничения $(*)$ были получены в работе [2].

[2] *Wie B., Weiss H., Arapostathis A.*
Quaternion Feedback Regulator for Spacecraft Eigenaxis Rotations
// *J. Guid. Control. Dyn.* — 1989. — *Vol.* 12. — № 3. — *P.* 375 – 380.

Глобальная асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия системы при наложении ограничений на коэффициенты управления

При выполнении $(*)$ $\dot{V} = -\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\omega} \le 0.$

Т.к. $\mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{P}_{11} > 0 \Rightarrow \dot{V} = 0$ при $\boldsymbol{\omega} = 0.$

$\boldsymbol{\lambda} = 0 \in \left\{ \dot{V} = 0 \right\}$ – единственная целая траектория.

В силу теоремы Барбашина-Красовского нулевое решение системы является глобально асимптотически устойчивым.

Стабилизирующее решение уравнения Риккати в случае недиагонального тензора инерции КА

Пусть тензор инерции $\mathbf{J}$ имеет недиагональный вид.

$\mathbf{J} = \mathbf{W}\mathbf{J}^{diag}\mathbf{W}^T$, где $\mathbf{W}$ – ортогональная матрица, а $\mathbf{J}^{diag} = diag\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix}$.

Пусть матрицы $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$и $\mathbf{R}$ являются диагональными в том же базисе, что и $\mathbf{J}$, т.е.

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{W}\mathbf{Q}_1^{diag}\mathbf{W}^T = \mathbf{W}\begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix}\mathbf{W}^T,\ \mathbf{Q}_2 = \mathbf{W}\mathbf{Q}_2^{diag}\mathbf{W}^T = \mathbf{W}\begin{pmatrix} q_4 & 0 & 0 \\ 0 & q_5 & 0 \\ 0 & 0 & q_6 \end{pmatrix}\mathbf{W}^T,$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{W}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{W}^T = \mathbf{W}\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix}\mathbf{W}^T,$$

причем $q_i > 0,\ i = \overline{1,6},\ r_i > 0,\ i = \overline{1,3}.$

Сведение задачи к случаю диагонального тензора инерции КА

В этом случае стабилизирующим решением уравнения Риккати

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{W}\mathbf{P}_{11}^{diag}\mathbf{W}^T & \mathbf{W}\mathbf{P}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T\\ \mathbf{W}\mathbf{P}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T & \mathbf{W}\mathbf{P}_{22}^{diag}\mathbf{W}^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{W} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{W}\end{pmatrix}\mathbf{P}^{diag}\begin{pmatrix}\mathbf{W}^T & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{W}^T\end{pmatrix}.$$

где $\mathbf{P}_{12}=\mathbf{W}\mathbf{P}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T$, $\mathbf{P}_{11}=\mathbf{W}\mathbf{P}_{11}^{diag}\mathbf{W}^T$, $\mathbf{P}_{22}=\mathbf{W}\mathbf{P}_{22}^{diag}\mathbf{W}^T$.

Причем матрицы

$$\mathbf{P}_{12}^{diag}=\begin{pmatrix}p_1 & 0 & 0\\ 0 & p_2 & 0\\ 0 & 0 & p_3\end{pmatrix},\mathbf{P}_{11}^{diag}=\begin{pmatrix}p_1' & 0 & 0\\ 0 & p_2' & 0\\ 0 & 0 & p_3'\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_{22}^{diag}=\begin{pmatrix}p_1'' & 0 & 0\\ 0 & p_2'' & 0\\ 0 & 0 & p_3''\end{pmatrix}$$

были получены в задаче с диагональным $\mathbf{J}$. По лемме Шура $\mathbf{P}>0$.

Стабилизирующий закон управления имеет вид:

$$\mathbf{u}_{LQR}=-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{P}_{12}\boldsymbol{\lambda}\right)=-\mathbf{W}\left(\mathbf{R}^{diag}\right)^{-1}\left(\mathbf{J}^{diag}\right)^{-1}\left(\mathbf{P}_{11}^{diag}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\omega}+\mathbf{P}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\lambda}\right).$$

Глобальная асимптотическая устойчивость доказывается

как и в случае диагонального $\mathbf{J}$.

Полученные результаты

- Построены положительно определенные решения АУР и соответствующие им линейно-квадратичные законы управления, обеспечивающие глобальную асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия КА.
- Благодаря выбору положительно определенных матриц в функционале качества, стабилизирующие решения АУР выражаются в явном виде через параметры системы и коэффициенты управления, что позволяет получить аналитические выражения соответствующих функций Ляпунова.
- Полученные законы управления в отличие от классического ПД регулятора обладают пятью независимыми параметрами управления.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17-71-20117.

Спасибо за внимание!