Построение программных траекторий спутника с нежесткими элементами конструкции

С.С. Ткачёв, А.И. Шестопёров

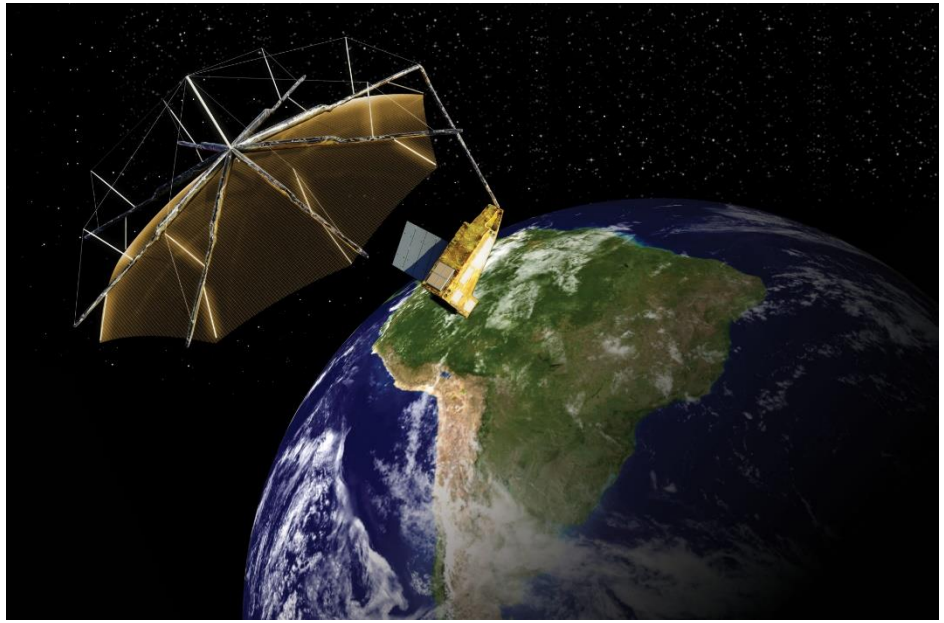
Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

Введение

Спутники с крупногабаритными нежесткими элементами

Особенности
- спутник нельзя считать твердым
- число степеней свободы бесконечно
- число каналов управления существенно конечно (часто как у обычных спутников)

Задачи системы управления
- успокоение колебаний и начальная стабилизация
- стабилизация заданных режимов движения



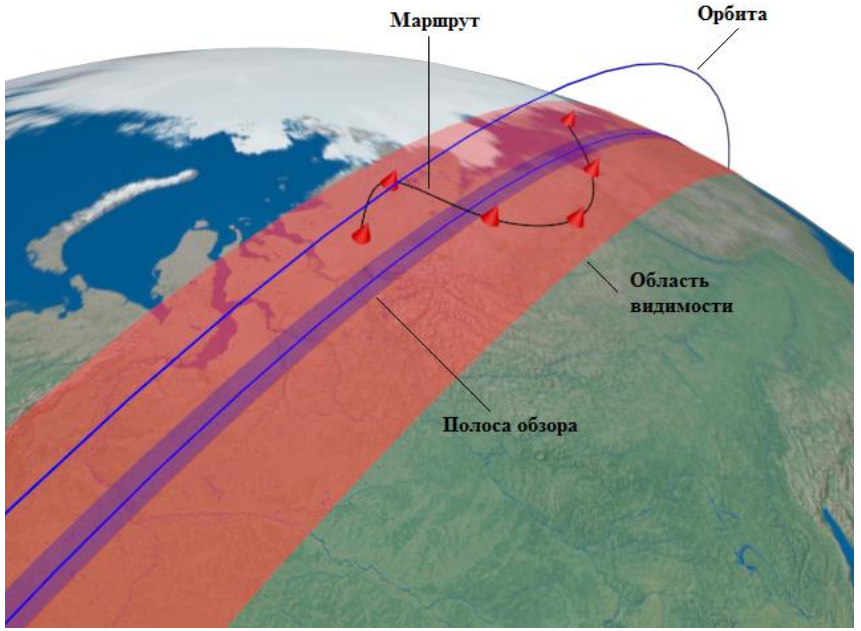
Источник https://spacestructures.de/

Задача отслеживания траектории

$$\mathbf{M}_{упр} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}\left(\mathbf{q}_0, \boldsymbol{\omega}_0, \dot{\boldsymbol{\omega}}_0\right)$$

Стабилизирующая часть

Компенсационная часть



Задача построения программного движения $\mathbf{q}_0(t)$

$$\mathbf{F}_0\left(\mathbf{q}_0, \boldsymbol{\omega}_0, \dot{\boldsymbol{\omega}}_0\right) = \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_0$$

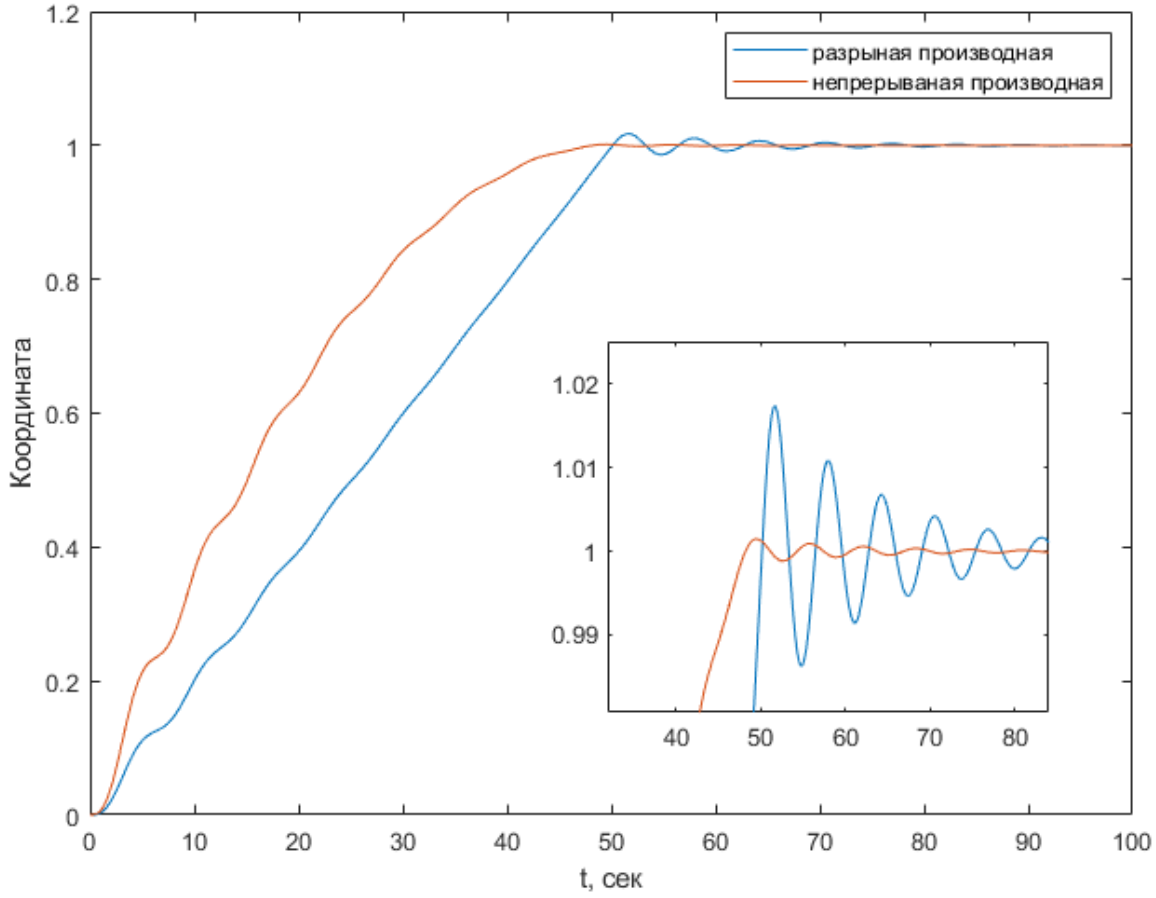
«Рывок»

Рывок – третья производная радиус-вектора

- колебательная часть
- диссипативная часть
- система вышла на установившийся режим

$$\dddot{x} + \alpha_1 \ddot{x} + \alpha_2 \dot{x} = f(t),\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0$$

Нужны непрерывная третья производная $\mathbf{q}_0(t)$



Линейная интерполяция кватерниона

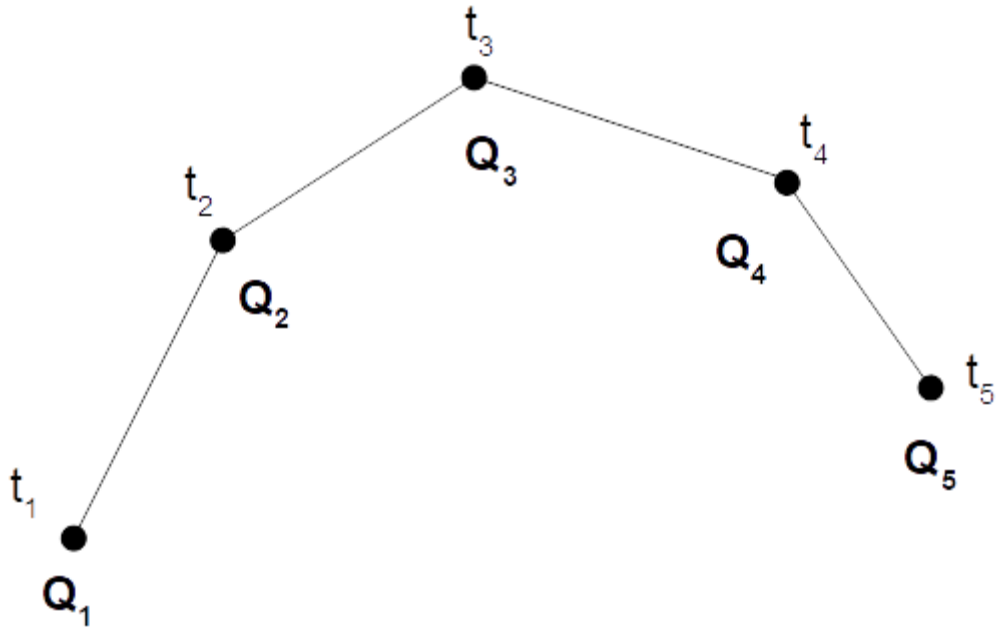
$$\mathbf{q}_i(t) = \mathbf{Q}_i \circ \left(\mathbf{Q}_i^{-1} \circ \mathbf{Q}_{i+1}\right)^{\tilde{\beta}_i(t)}$$ (Dam, Kosh, Lillholm)

$$\tilde{\beta}_i(t_1) = 0$$
$$\tilde{\beta}_i(t_2) = 1$$

Замена $\tau = \dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1}$ $\quad \beta(0) = 0$, $\beta(1) = 1$

$$\ddot{\tilde{\beta}}_i(t) = \ddot{\beta}_i(\tau) = \frac{1}{(t_2 - t_1)^2}\beta_i''(\tau)$$

$$\beta_i''(\tau_0) = (t_2 - t_1)^2 \frac{d}{dt^n}\left(\tilde{\beta}(t)\right)\Big|_{t=t_o}$$



$$\exp(\varphi\mathbf{n}) = \cos\varphi + \mathbf{n}\sin\varphi$$

$$\ln(\mathbf{q}) = \ln(\cos\varphi + \mathbf{n}\sin\varphi) = \varphi\mathbf{n}$$

Интерполяция с угловой скоростью

Пусть на концах интервала задана угловая скорость $\mathbf{q} = \mathbf{Q}_1 \circ \left(\mathbf{Q}_1^{-1} \circ \mathbf{q}_1\right)^{\beta_1(\tau)} \circ \left(\mathbf{q}_1^{-1} \circ \mathbf{q}_2\right)^{\beta_2(\tau)} \circ \left(\mathbf{q}_2^{-1} \circ \mathbf{Q}_2\right)^{\beta_3(\tau)}$ (Kim, Kim)

Дополнительные условия на полиномы

$$\dot{\beta}_1(0) \neq 0 \quad \dot{\beta}_2(0) = 0 \quad \dot{\beta}_3(0) = 0$$
$$\dot{\beta}_1(1) = 0 \quad \dot{\beta}_2(1) = 0 \quad \dot{\beta}_3(1) \neq 0$$

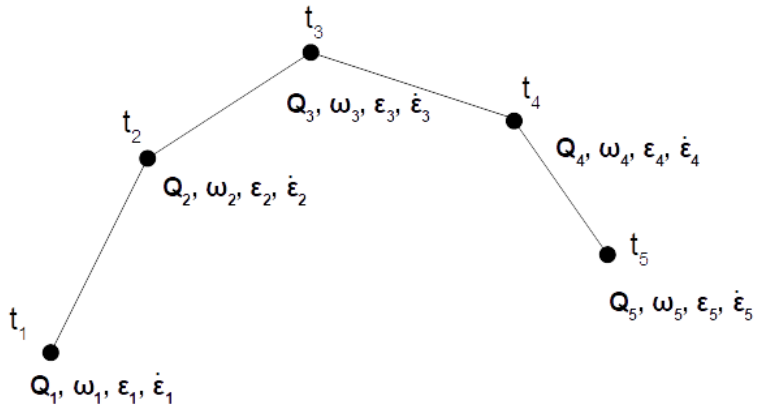
С учетом кинематических соотношений $\boldsymbol{\omega} = 2\tilde{\mathbf{q}} \circ \dot{\mathbf{q}}$

Вспомогательные кватернионы $\mathbf{q}_1 = \mathbf{Q}_1 \circ \exp\left(\frac{\boldsymbol{\omega}(t_1)}{2\dot{\beta}_1(0)}\right) \qquad \mathbf{q}_2 = \mathbf{Q}_2 \circ \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\omega}(t_2)}{2\dot{\beta}_3(1)}\right)$

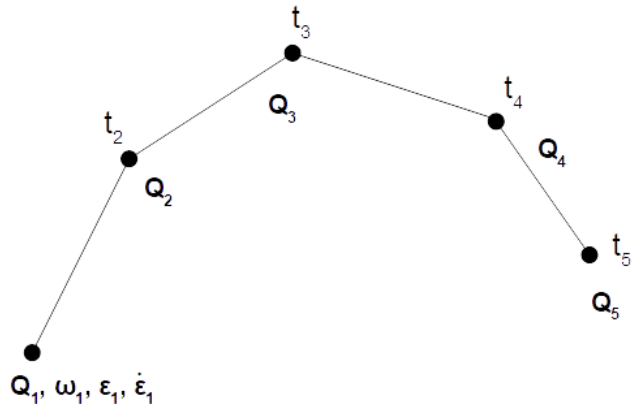
$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}_1 \circ \left(\exp\left(\frac{\boldsymbol{\omega}(t_1)}{2\dot{\beta}_1(0)}\right)\right)^{\beta_1(\tau)} \circ \left(\exp\left(-\frac{\boldsymbol{\omega}(t_1)}{2\dot{\beta}_1(0)}\right) \circ \mathbf{Q}_1^{-1} \circ \mathbf{Q}_2 \circ \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\omega}(t_2)}{2\dot{\beta}_3(1)}\right)\right)^{\beta_1(\tau)} \circ \left(\exp\left(\frac{\boldsymbol{\omega}(t_2)}{2\dot{\beta}_3(1)}\right)\right)^{\beta_1(\tau)}$$

$$\beta_1(\tau) = (t_2 - t_1)\dot{\beta}_1(0)\tau + \left(3 - 2(t_2 - t_1)\dot{\beta}_1(0)\right)\tau^2 + \left((t_2 - t_1)\dot{\beta}_1(0) - 2\right)\tau^3 \qquad \beta_2(\tau) = 2\tau^2 - \tau^3 \qquad \beta_3(\tau) = \left(2 - (t_2 - t_1)\dot{\beta}_3(1)\right)\tau^2 + \left((t_2 - t_1)\dot{\beta}_3(1)\right)\tau^3$$

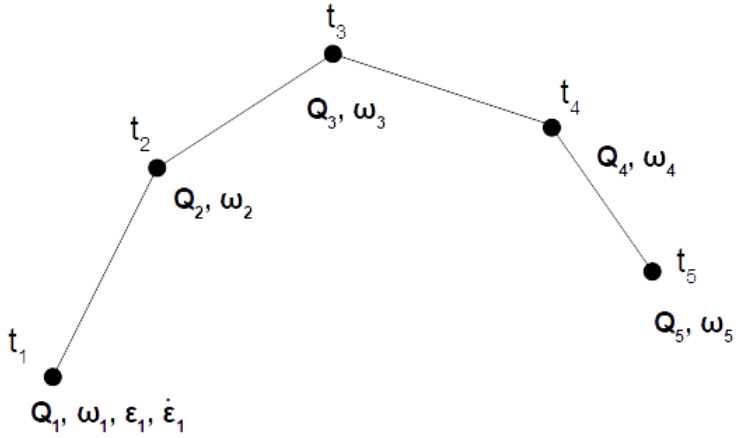
Схемы построения



6 дополнительных кватернионов
7 полиномов 7й степени

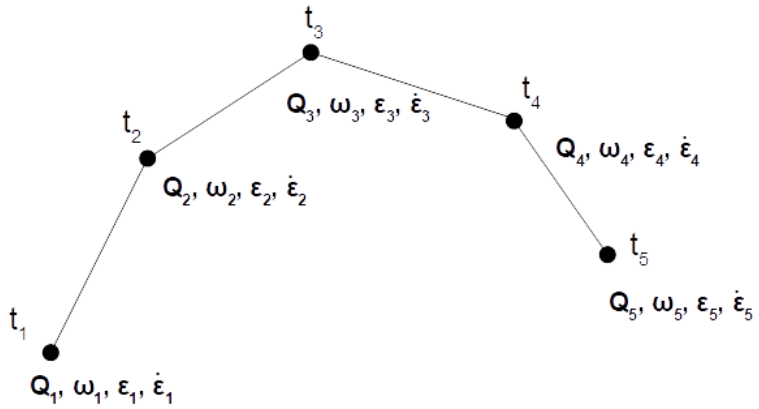


3 дополнительных кватерниона
4 полиномов 4й степени

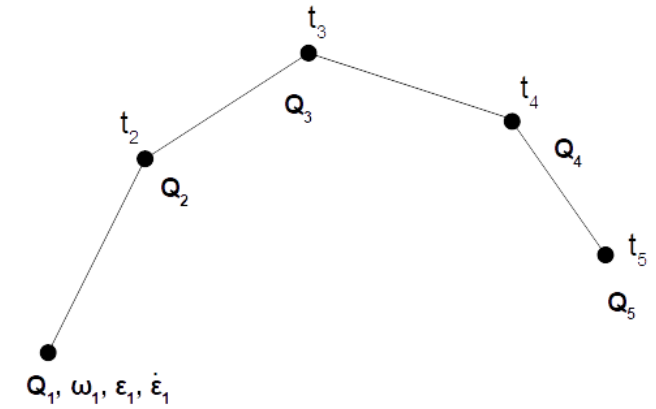


4 дополнительных кватерниона
5 полиномов 5й степени

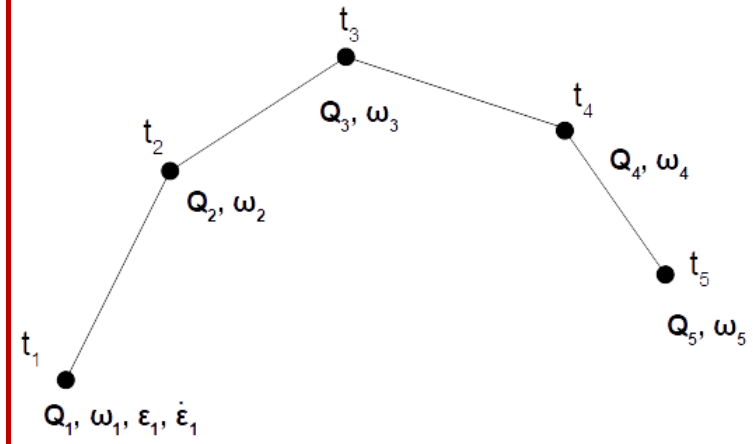
Схемы построения



6 дополнительных кватернионов
7 полиномов 7й степени



3 дополнительных кватерниона
4 полиномов 4й степени



4 дополнительных кватерниона
5 полиномов 5й степени

Как правило известны только ориентация и угловая скорость в узлах

Интерполяционный кватернион

$$\mathbf{q}(\tau)=\mathbf{q}_0\circ\prod_{i=0}^{4}\left(\mathbf{q}_i^{-1}\circ\mathbf{q}_{i+1}\right)^{\beta_{i+1}(\tau)},\ \mathbf{q}_0=\mathbf{Q}_1,\ \mathbf{q}_5=\mathbf{Q}_2$$

$$\mathbf{q}_1=\mathbf{Q}_1\circ\exp\left(\frac{\boldsymbol{\omega}(t_1)}{2\dot{\beta}_1(0)}\right)$$

$$\mathbf{q}_2=\mathbf{Q}_1\circ\exp\left(\frac{\boldsymbol{\omega}(t_1)}{2\dot{\beta}_1(0)}\right)\circ\exp\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(0)}{2\ddot{\beta}_2(0)}\right)$$

$$\mathbf{q}_3=\mathbf{Q}_1\circ\exp\left(\frac{\boldsymbol{\omega}(t_1)}{2\dot{\beta}_1(0)}\right)\circ\exp\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(0)}{2\ddot{\beta}_2(0)}\right)\circ\exp\left(\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(0)-\boldsymbol{\omega}(0)\times\boldsymbol{\varepsilon}(0)}{2\dddot{\beta}_3(0)}\right)$$

$$\mathbf{q}_4=\mathbf{Q}_2\circ\exp\left(-\frac{\boldsymbol{\omega}(t_2)}{2\dot{\beta}_4(1)}\right)$$

Заключение

	Схема 1	**Схема 2**	**Схема 3**
Число кватернионов	6	3	4
Число полиномов	7	4	5
Расчет производных на борту	-	+	+
Исходные данные	Нужно доопределять ускорение и его производную	Только левая граница всего интервала, внутренние точки вычисляются	Только левая граница интервала