



Методы стабилизации орбит вокруг точек либрации

Широбоков М.Г.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН

Содержание

- Задача поддержания орбит
- Классификация методов поддержания
- Динамика в окрестности коллинеарных точек либрации
- Методы общего назначения
- Заключение

Задача поддержания орбит

- 1) Конкретная космическая миссия со всеми своими целями и ограничениями
- 2) Одна из возникающих в реализации миссии подзадач – поддержание орбиты
- 3) Метод поддержания
- 4) Постановка оптимизационной задачи
- 5) Метод решения оптимизационной задачи

Два класса методов поддержания

- Методы общего назначения (не используют свойства конкретной динамической системы, не основаны на теории Флоке)

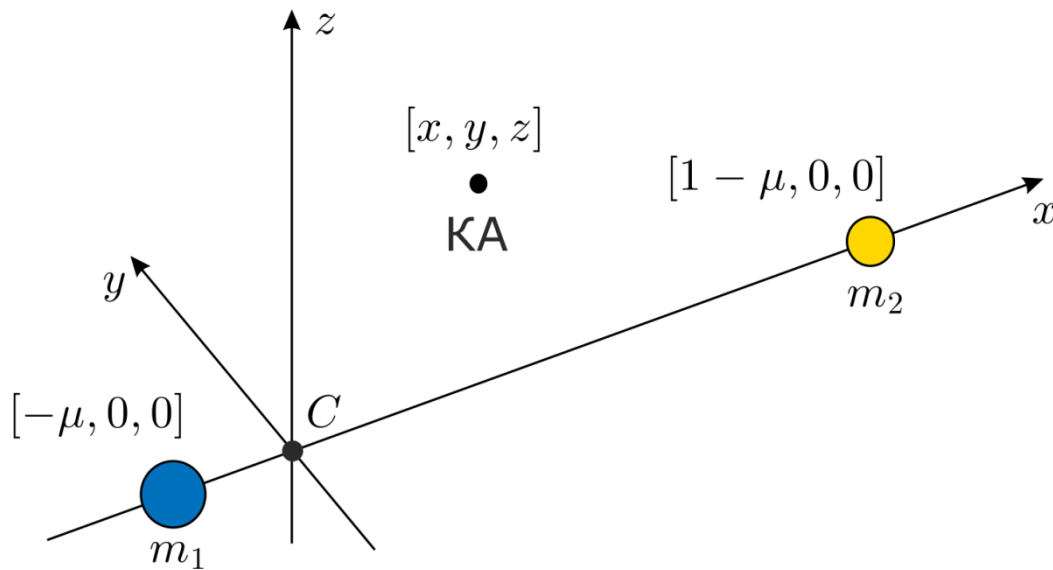
Пионеры исследований: Farquhar R. W., Breakwell J. V.

- Методы специального назначения (используют свойства конкретной динамической системы и основаны на теории Флоке)

Пионеры исследований: Лидов М. Л., Вашковьяк М.А., Коган А.Ю.

Shirobokov, M., Trofimov, S., Ovchinnikov, M. "Survey of Station-Keeping Techniques for Libration Point Orbits," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017, Vol. 40, No. 5, pp. 1085–1105. URL: <http://dx.doi.org/10.2514/1.G001850>

Круговая ограниченная задача трех тел (CR3BP)



Массовый параметр

$$\mu = m_2 / (m_1 + m_2)$$

Безразмерные единицы:

$$m_1 = 1 - \mu \quad x_{m_1} = -\mu$$

$$m_2 = \mu \quad x_{m_2} = 1 - \mu$$

$$\omega_0 = 1$$

Для системы Земля-Луна

$$\mu = 1.2150668 \cdot 10^{-2}$$

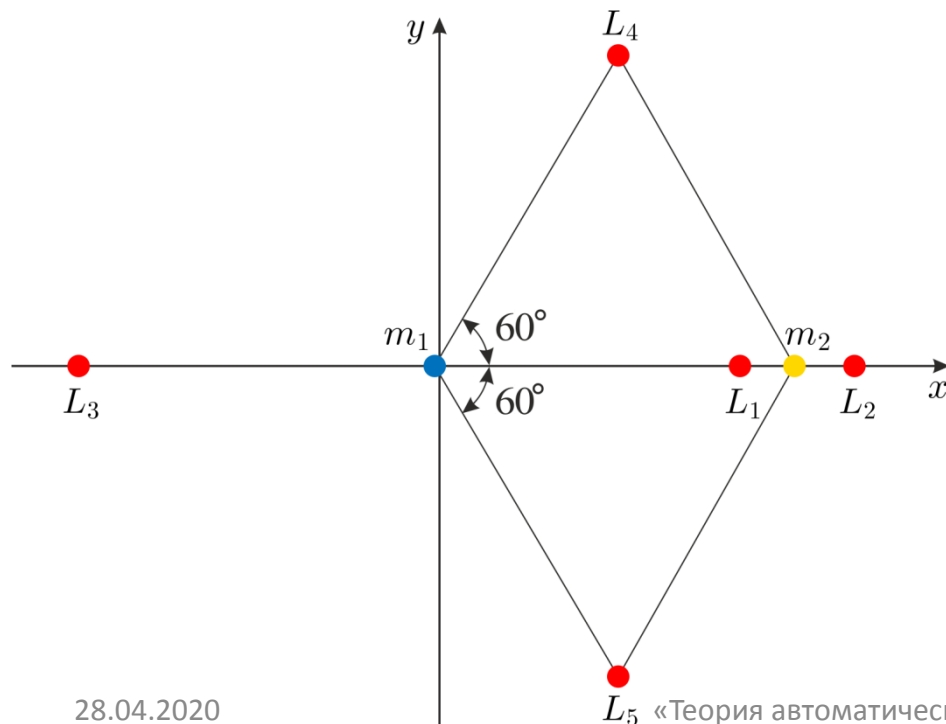
Для системы Солнце-Земля

$$\mu = 3.0393890 \cdot 10^{-6}$$

Уравнения движения

Уравнения движения: $\ddot{x} - 2\dot{y} = U_x$, $\ddot{y} + 2\dot{x} = U_y$, $\ddot{z} = U_z$

где
$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2}$$



Положения равновесия
соответствуют условиям

$$U_x = U_y = U_z = 0$$

и называются *точками
либрации*

Линеаризованные уравнения движения вблизи коллинеарных точек либрации

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, 2\dot{y} + U_x, -2\dot{x} + U_y, U_z)^T$$

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_L$$

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_L} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ U_{rr} & -2\mathbf{\Omega}_{3 \times 3} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_L}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{(\bar{\mu} - 2 + \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}})/2}$$

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda > 0$$

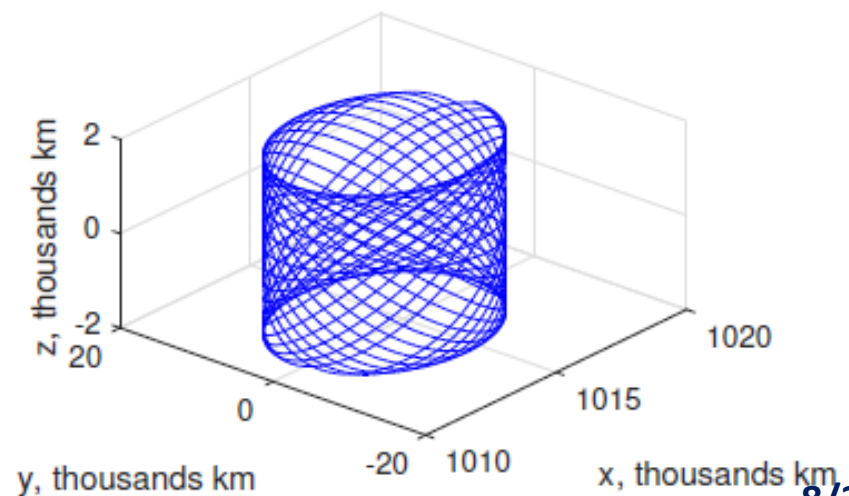
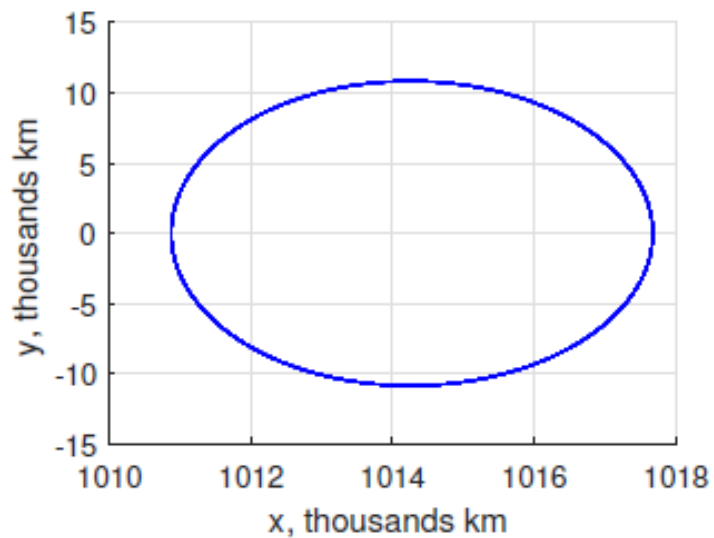
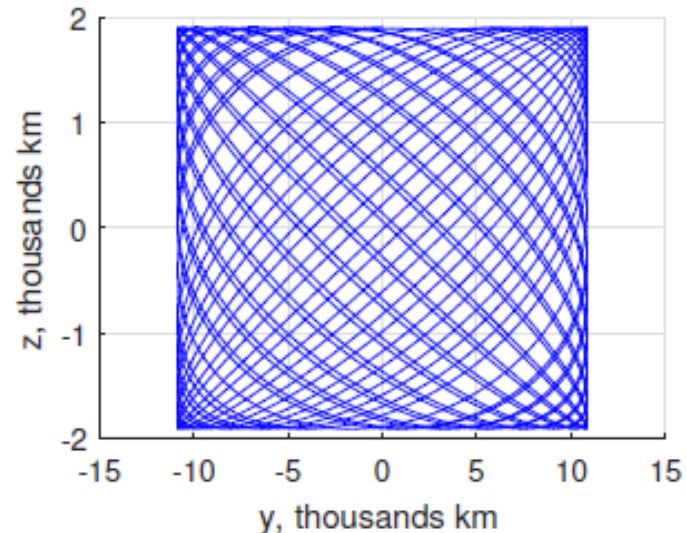
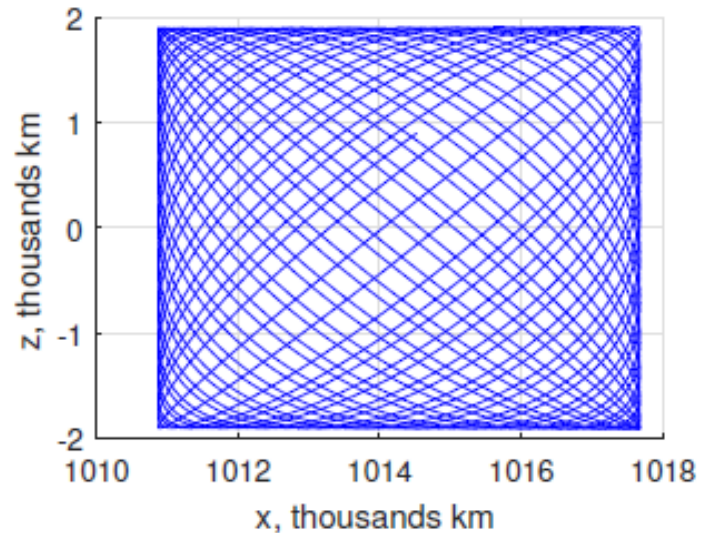
$$\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{(2 - \bar{\mu} + \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}})/2}$$

$$\lambda_3 = -\lambda_4 = i\omega_p$$

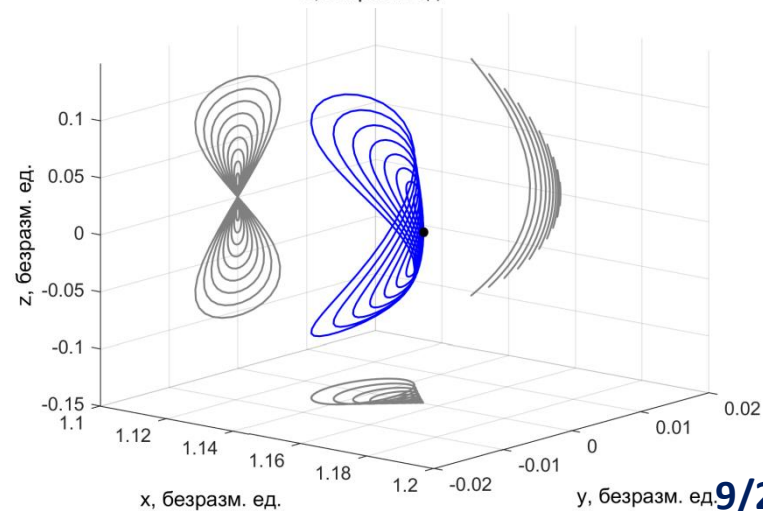
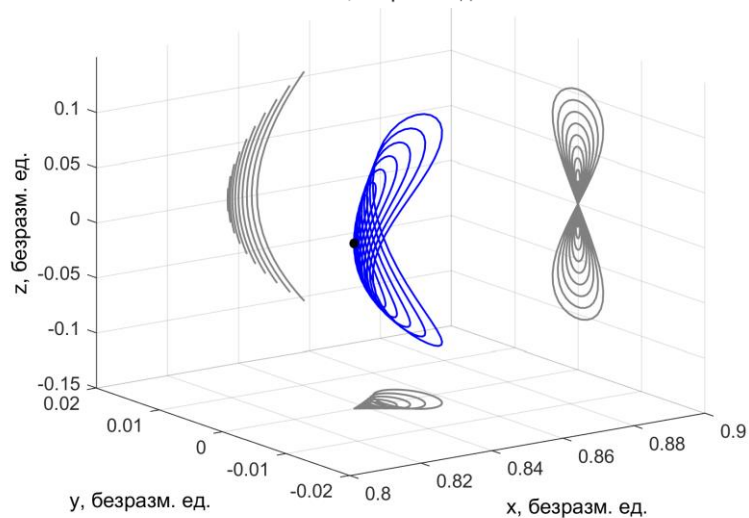
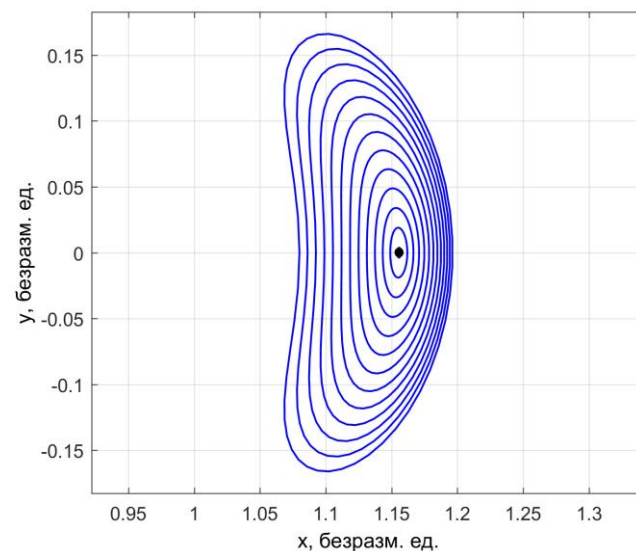
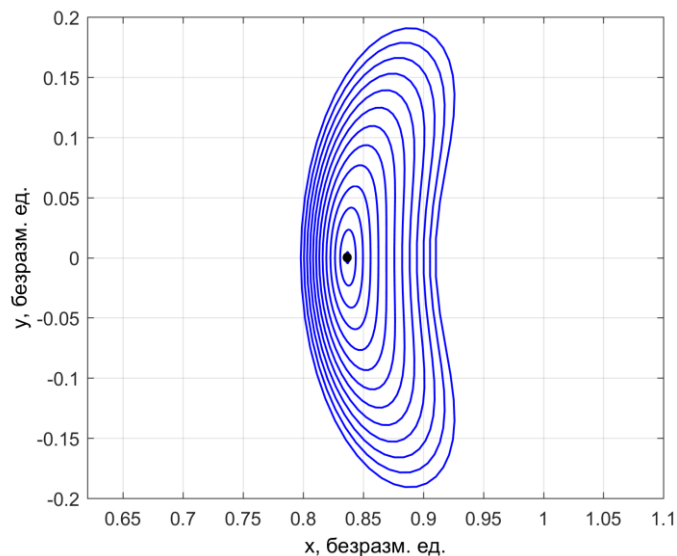
$$\lambda_{5,6} = \pm i\sqrt{\bar{\mu}}$$

$$\lambda_5 = -\lambda_6 = i\omega_v$$

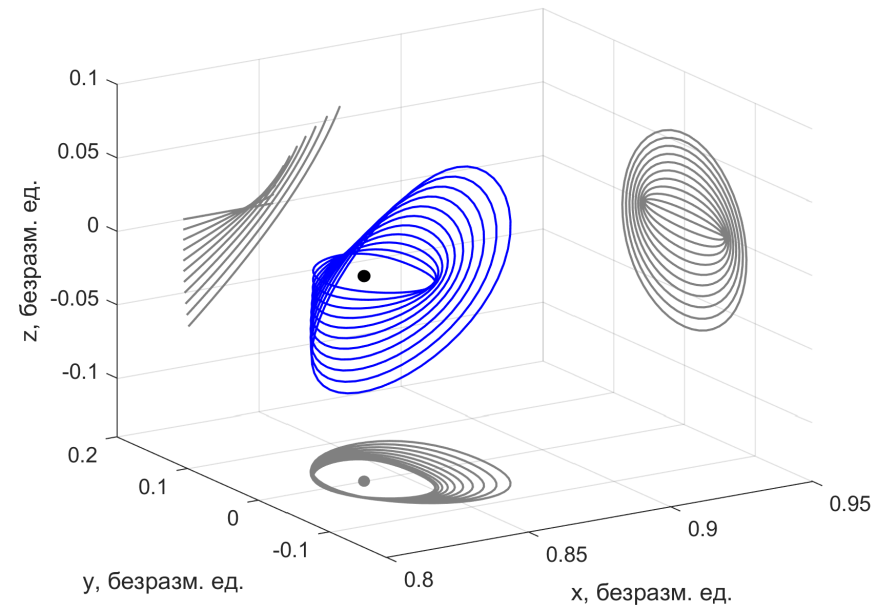
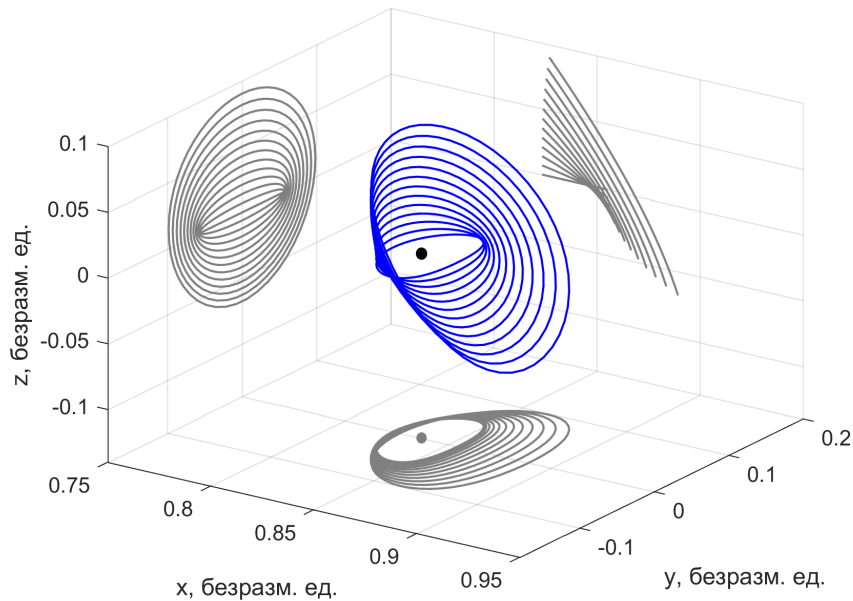
Орбита Лиссажу в системе Солнце—Венера



Плоские и вертикальные орбиты Ляпунова вокруг точек L1 и L2 системы Земля—Луна



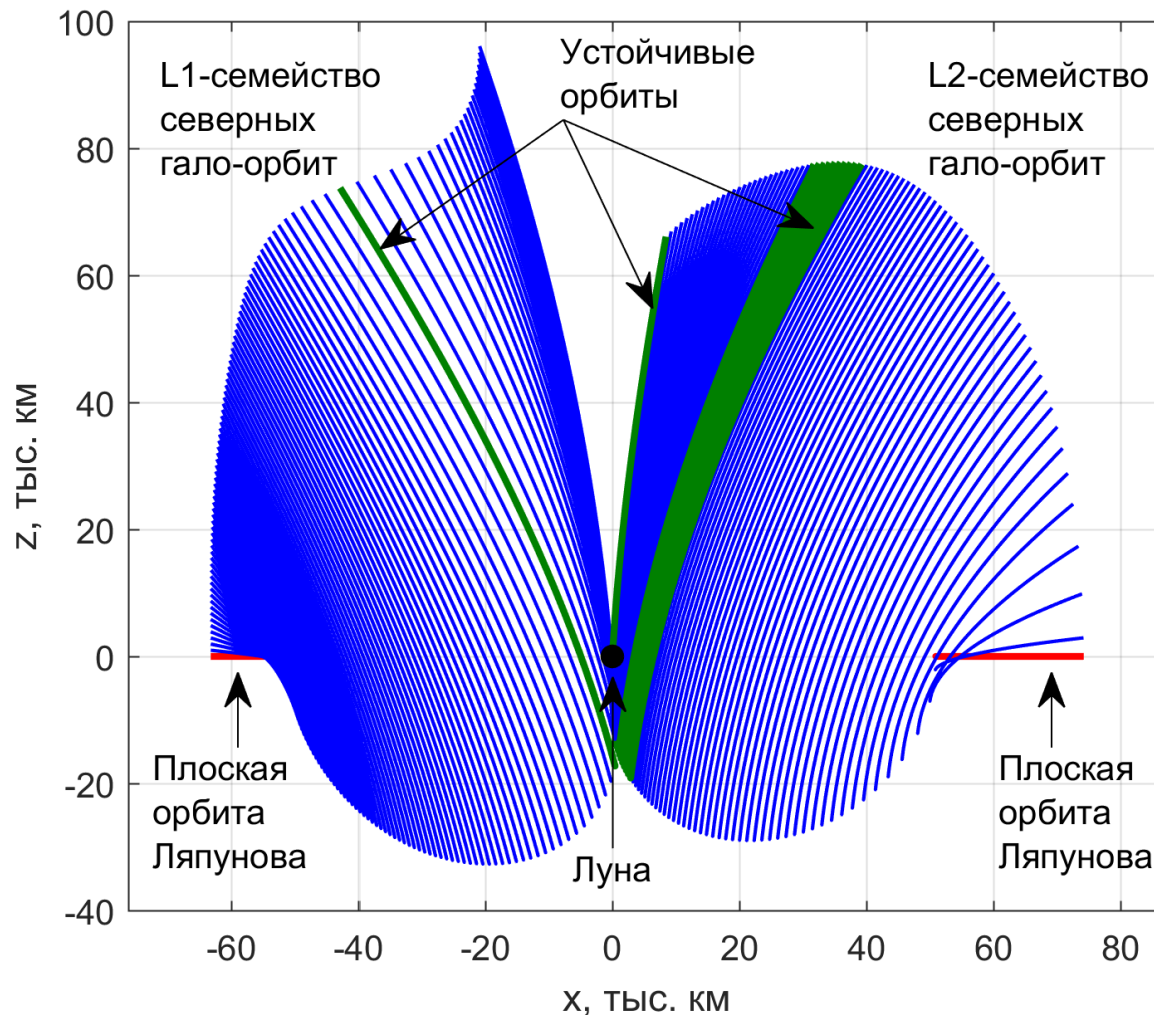
Северные и южные гало-орбиты вокруг точки L1 системы Земля—Луна



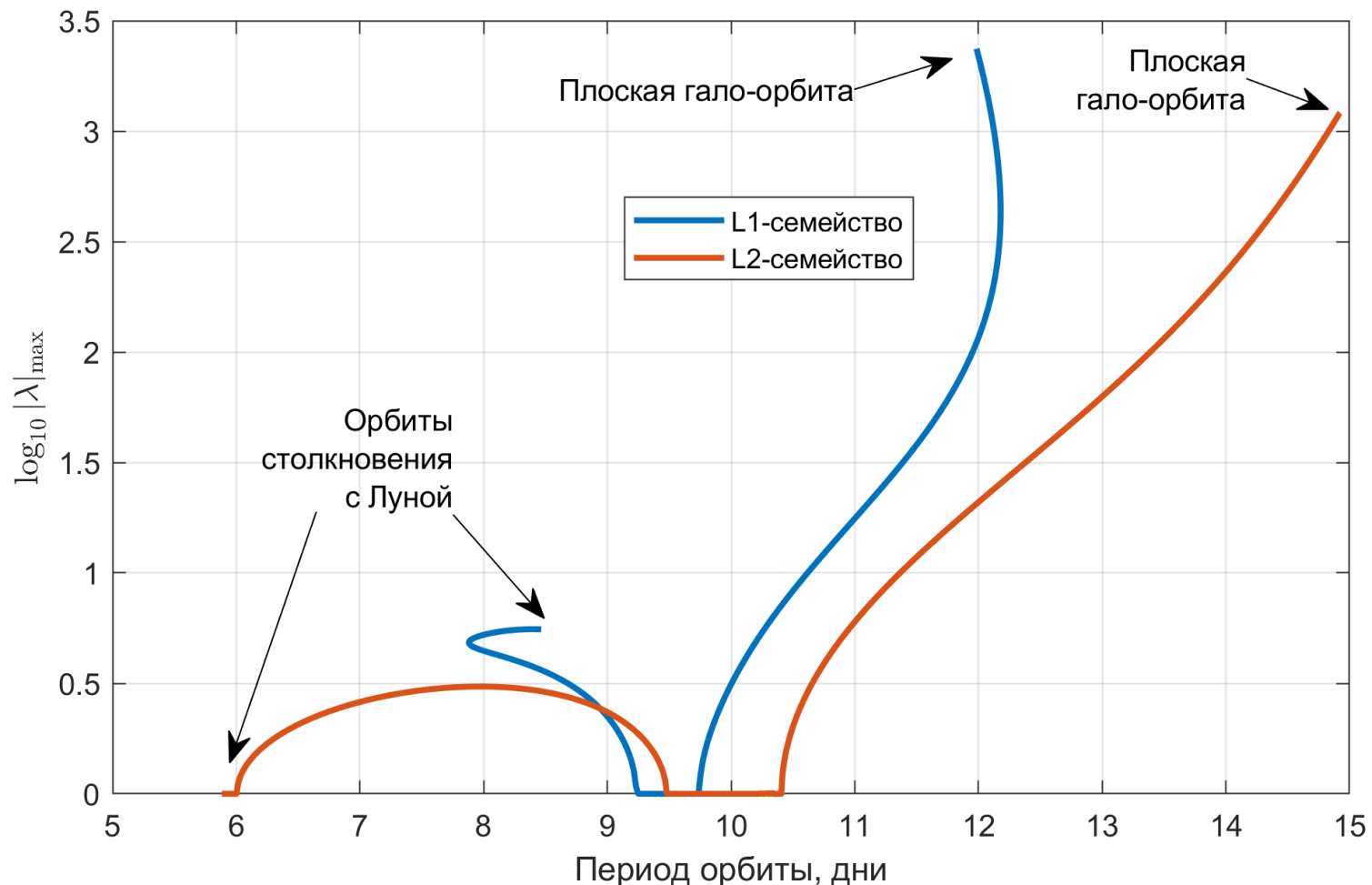
Существуют и другие семейства периодических орбит вокруг точек либрации:

Doedel, E. J. et al., “Elemental Periodic Orbits Associated with the Libration Points in the Circular Restricted 3-Body Problem,” International Journal of Bifurcation and Chaos, 2007, Vol. 17, Is. 8, pp. 2625–2677

Семейства гало-орбит в системе Земля—Луна (в проекции на оси xz , «вид сбоку»)



Устойчивость гало-орбит из L2-семейства системы Земля-Луна



Время жизни типичных либрационных орбит

В любой системе трех тел время жизни неустойчивой орбиты составляет где-то 1-2 витка, поэтому, например, время жизни либрационных орбит

- в системе Земля-Луна: 15-20 дней
- в системе Солнце-Земля: 180-300 дней

Методы общего назначения, которые будут затронуты в этом докладе

- Линейно-квадратичный регулятор
- Бэкстеппинг
- Прогнозирующее управление
- Задача линейного программирования
- Итерации Чебышева—Пикара
- Методы целевых точек и целевых величин

Линейно-квадратичный регулятор

Постановка оптимизационной задачи: поиск функции управления $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$ такой, что

$$\min_u \frac{1}{2} \int_0^\infty (\delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \delta \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{u}) dt, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} k\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\delta \mathbf{x} + \mathbf{E}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

[34] Breakwell, J. V. et al., 1974.

где $\delta \mathbf{x}$ – отклонение относительно выбранной траектории, $\mathbf{Q}$ – постоянная матрица, $\mathbf{E}(t)$ – невязка ускорений при движении вдоль траектории

Бэкстеппинг (backstepping technique)

Предлагается перейти к новым переменным

$$z_1 = \delta r, \quad z_2 = \delta v - K \delta r$$

и тогда можно вывести уравнение

$$\dot{z}_2 = (-2\Omega_{3 \times 3} - K)z_2 + u_2$$

для которого легко удастся вывести выражение для функции управления, чтобы движение в окрестности выбранной орбиты было линейно устойчивым

[70] Nazari, M. et al. 2014

Прогнозирующее управление (model predictive control)

- Ищем оптимальное (в каком-либо смысле) управление на участке $[0, T]$, но применяем его на участке $[0, \delta]$, где $\delta < T$
- Затем оптимальное управление ищется на участке $[\delta, \delta + T]$, но применяется на участке $[\delta, 2\delta]$, и так далее
- В работе ([86] Li, C. et al., 2015) задача поддержания ставится как задача оптимального управления, которая дискретизируется и решается методами решения нелинейных задач программирования

[86] Li, C. et al. 2015

Сведение к задаче линейного программирования

- 1) Задача поддержания орбиты дискретизируется с очень мелким шагом
- 2) Перемещение аппарата между узлами дискретизации рассматривается в линейном приближении
- 3) Функция управления аппроксимируется кусочно-постоянной функций

В таком случае получается задача линейного программирования с порядка 10^5 переменных

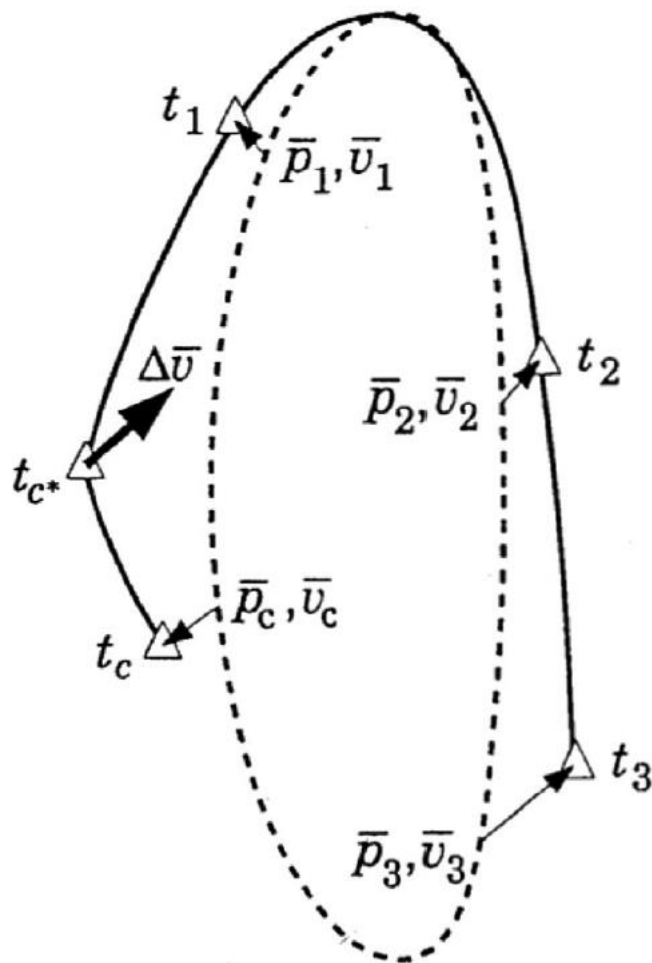
[77] Ulybyshev, Y. 2015

Итерации Чебышева—Пикара

- Этот метод вообще используется для решения задач Коши и краевых задач
- Решение раскладывается в сумму ортогональных полиномов Чебышева
- Задача поддержания формулируется как краевая задача, где правый конец находится на выбранной орбите, с импульсами коррекции в промежуточных точках
- Траектории уточняются итерациями Пикара
- В этом методе не нужно вычислять градиенты и переходную матрицу (в отличие от предыдущих методов), метод эффективно распараллеливается

[100] Bai, X., and Junkins, J. L. 2012

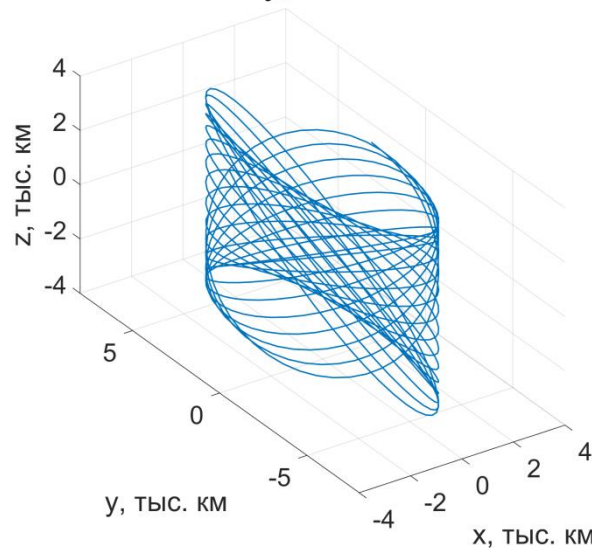
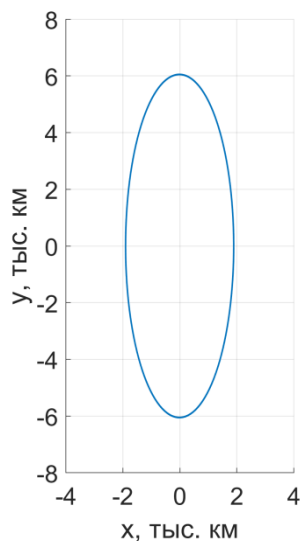
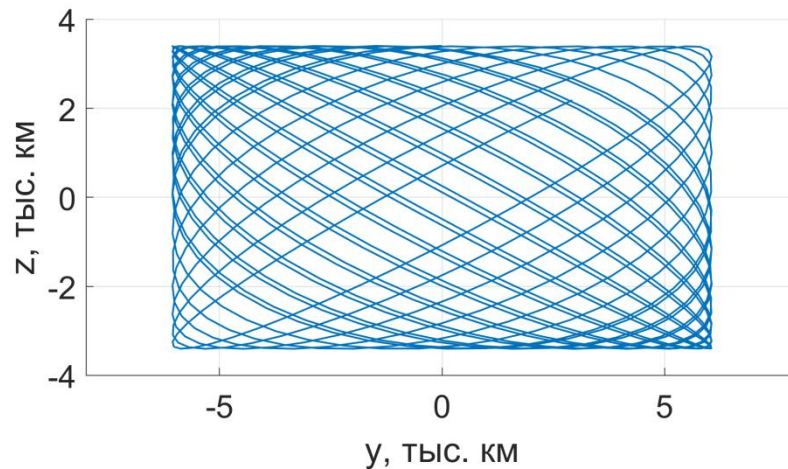
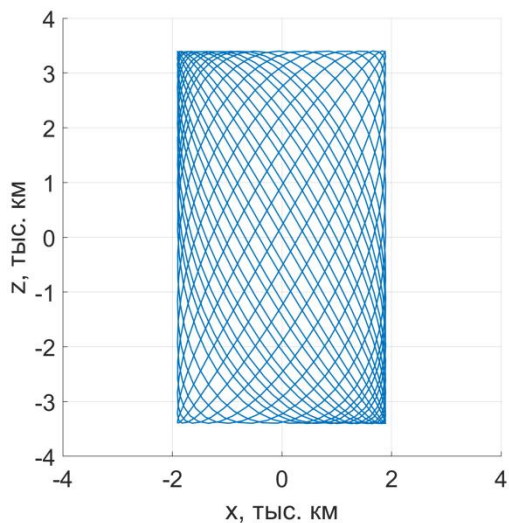
Метод целевых точек (targeting point approach)



$$J = \Delta v^T \mathcal{Q} \Delta v + \sum_{k=1}^n (p_k^T \mathcal{R}_k p_k + v_k^T \mathcal{T}_k v_k) \rightarrow \min$$

[67] Keeter, T.M. 1994

Орбита Лиссажу вокруг точки L2 системы Солнце—Венера, $A_y = 6050$ км, $A_z = 3400$ км



Поддержание орбиты Лиссажу вокруг L2 Солнце—Венера

- Спроектировать орбиту в высокоточной модели и определить целевые векторы

$$\mathbf{x}_r(t_0), \mathbf{x}_r(t_1), \dots, \mathbf{x}_r(t_{N_p})$$

в моменты $t_0 < t_1 < \dots < t_{N_p}$

- Смоделировать ошибки выведения

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_r(t_0) + \boldsymbol{\xi}_{\text{ins}}$$

где

$$\boldsymbol{\xi}_{\text{ins}} \in \mathcal{N} \left(\mathbf{0}_{6 \times 1}, \begin{bmatrix} \sigma_R^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \sigma_V^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \right)$$

Метод целевых точек, два типа управления

- **х-управление:** найти Δv : после применения импульса $\mathbf{v}(t_0) \leftarrow \mathbf{v}(t_0) + \Delta v \cdot \mathbf{e}_x$

$$J(\Delta v) = \sum_{i=1}^m |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}_r(t_i)|^2$$

минимален

- **3d-управление:** найти $\Delta \mathbf{v}$: после применения импульса $\mathbf{v}(t_0) \leftarrow \mathbf{v}(t_0) + \Delta \mathbf{v}$

$$J(\Delta \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}_r(t_i)|^2$$

минимален

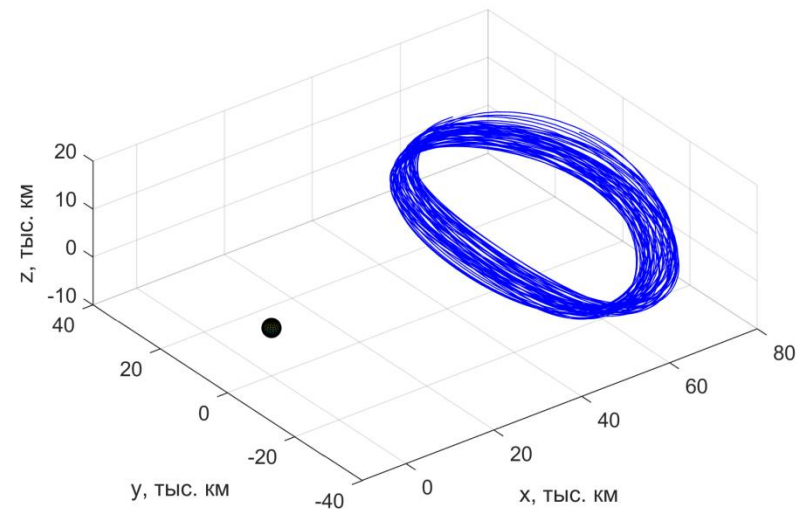
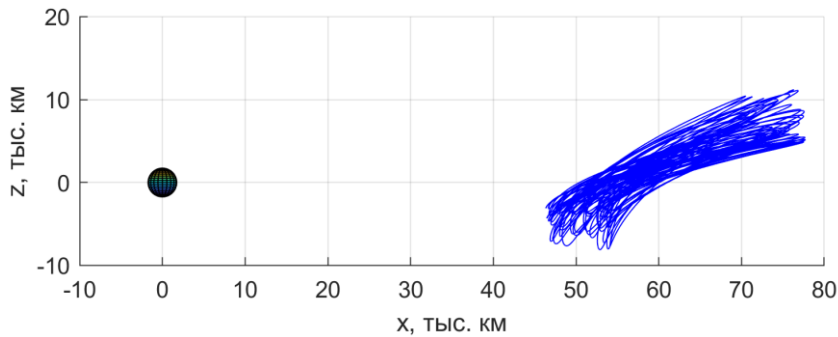
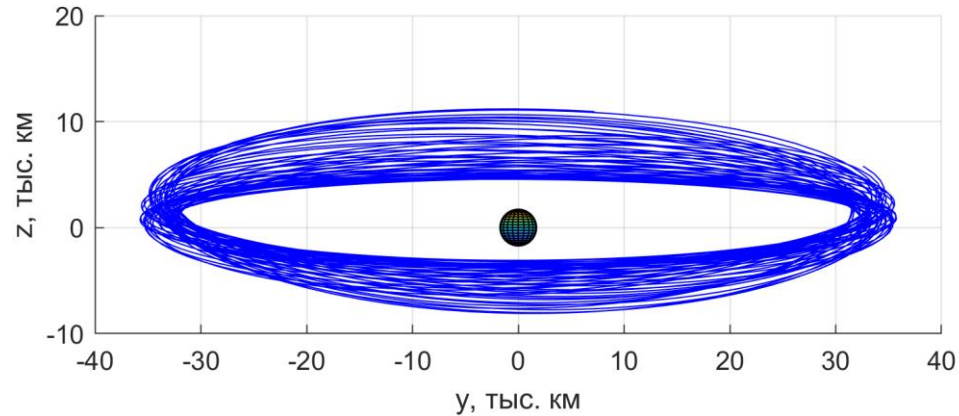
Используемые численные методы

- Для оптимизации используется метод Левенберга—Марквардта, сходимость достигается за несколько итераций
- Уравнения движения интегрируются численно в высокоточной модели классическим методом Рунге—Кутты 4 порядка с постоянным шагом
- Градиент функционала рассчитывается с помощью уравнений в вариациях, которые интегрируются совместно с уравнениями движения

Средние годовые затраты на поддержание орбиты Лиссажу в системе Солнце–Венера

- В результате проведения серии испытаний Монте—Карло при моделировании в высокоточной модели получилось следующие затраты:
- x-управление:
1.15 м/с в год ($\max \Delta r = 627$ км)
- 3d-управление:
1.22 м/с в год ($\max \Delta r = 374$ км)

Гало-орбита в системе Земля—Луна, $A_z = 10$ тыс. км



Оптимизационная задача и ее решение

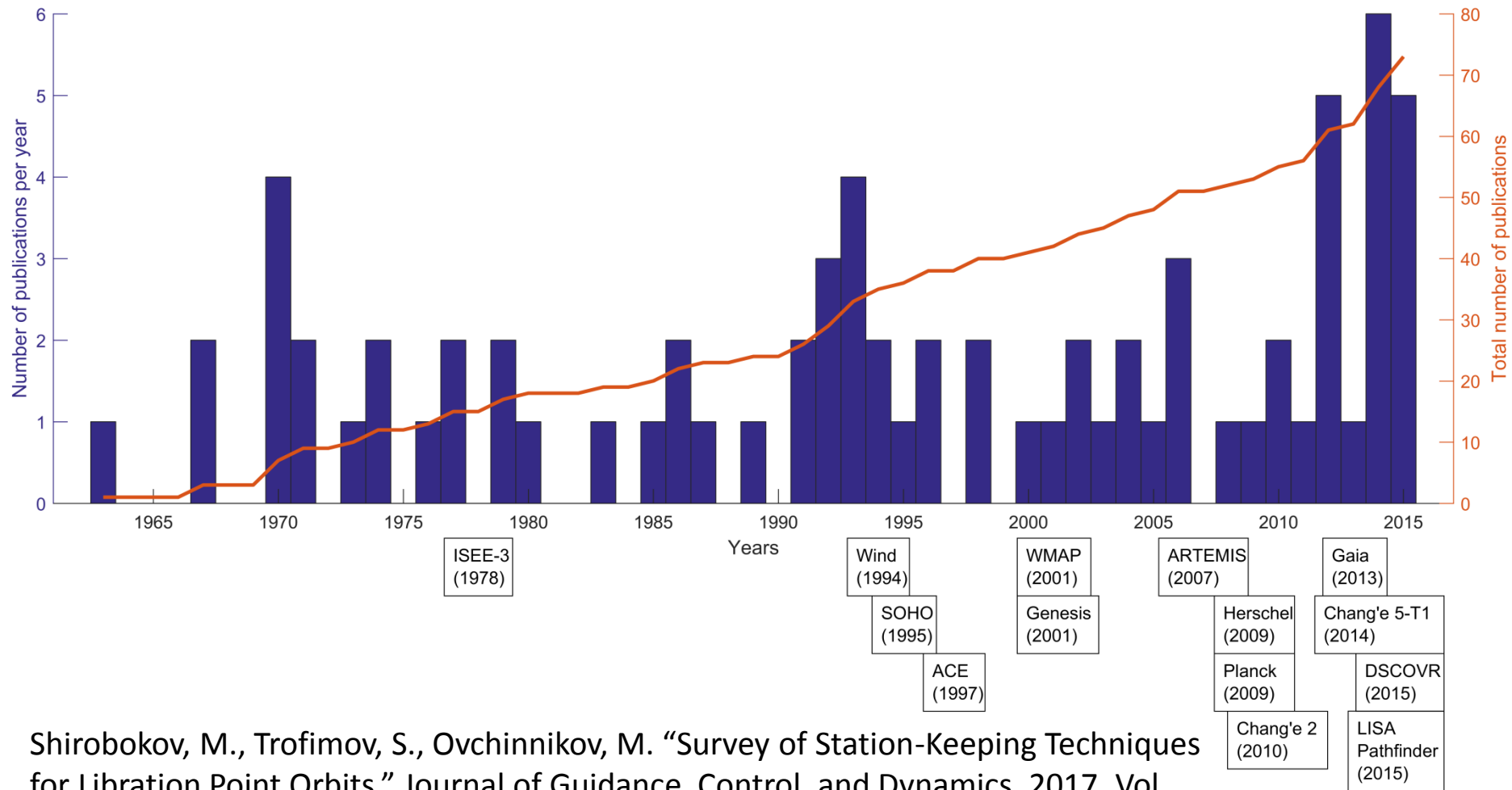
- Переменные: вектор Δv
- Функционал: $|\Delta v|^2 \rightarrow \min$
- Ограничения: $x(t_i) = x_i, i = 1, 2, 3$
- Коррекция производится 1 раз на период
- Для решения используется метод последовательного квадратичного программирования и используемый им метод активных множеств (опция *sqr* в матлабовской функции *fmincon*)
- Средние затраты: 8.784 м/с в год

Заключение

- Стабилизировать движение следует не в окрестности точки либрации, а в окрестности либрационной орбиты. Это отвечает практике и более того, чем больше гало-орбита, тем «более устойчивая»
- Непрерывные функции управления непрактичны, а кусочно-непрерывные функции управления практичны только если время стабилизации меньше витка (меньше 15 дней в системе Земля—Луна и меньше полугода в системе Солнце—Земля)
- Если планируется кусочно-непрерывное управление, то реактивное ускорение ориентировочно должно быть около $0.1—0.2 \text{ мм/с}^2$
- Сравнивать новые методы нужно не с LQR, а с методами целевых точек и целевых величин, потому как они простые и надежные, ориентировать можно на Δv порядка 10 м/с для Земля—Луна и 1 м/с для Солнце—Земля

Backup

Публикации по методам поддержания орбит и миссии к точкам либрации до 2015 г.



Shirobokov, M., Trofimov, S., Ovchinnikov, M. "Survey of Station-Keeping Techniques for Libration Point Orbits," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017, Vol. 40, No. 5, pp. 1085–1105. URL: <http://dx.doi.org/10.2514/1.G001850>

Все миссии к точкам либрации и затраты на поддержание

Mission	Agency	Launch date	Libration point(s)	Type of orbit	A_Y, A_Z , 1000 km	Δv m/s/year
ISEE-3	NASA/ESA	12 Aug 1978	SE L_1	Halo	666.67, 120.0	8.5
Wind	NASA	01 Nov 1994	SE L_1	Quasi-halo	640.0, 170.0	1.0
SOHO	ESA/NASA	02 Dec 1995	SE L_1	Halo	666.67, 120.0	2.4
ACE	NASA	25 Aug 1997	SE L_1	Lissajous	264.0, 157.41	1.0
WMAP	NASA	30 Jun 2001	SE L_2	Lissajous	264.0, 264.0	1.2
Genesis	NASA	08 Aug 2001	SE L_1	Quasi-halo	800.0, 450.0	9.0
ARTEMIS	NASA	17 Feb 2007	EM L_2	Quasi-halo	63.52, 35.20 (P1)	7.39 (P1)
			EM L_1	Quasi-halo	58.82, 2.39 (P1)	5.28 (P1)
			EM L_1	Quasi-halo	67.71, 4.68 (P2)	5.09 (P2)
Herschel	ESA/NASA	14 May 2009	SE L_2	Halo	700.0, 400.0	1.0
Planck	ESA	14 May 2009	SE L_2	Lissajous	300.0, 300.0	1.0
Chang'e 2	CNSA	01 Oct 2010	SE L_2	Lissajous	918.0, 400.0	(N/A)
Gaia	ESA	19 Dec 2013	SE L_2	Lissajous	350.0, 100.0	2.0
Chang'e 5-T1	CNSA	23 Oct 2014	EM L_2	Lissajous	40.0, 35.0	(N/A)
DSCOVR	NASA/NOAA	11 Feb 2015	SE L_1	Lissajous	264.1, 157.4	2
LISA Pathfinder	ESA	03 Dec 2015	SE L_1	Quasi-halo	800.0, 600.0	1.8
Queqiao	CNSA	20 May 2018	EM L_2	Halo	35.0, 16.0	18.0
Spektr-RG	Roscosmos	13 Jul 2019	SE L_2	Lissajous	800, 600	(N/A)

Shirobokov, M., Trofimov, S., Ovchinnikov, M. On the design of a space telescope orbit around the Sun–Venus L_2 point // Advances in Space Research, 2020, Vol. 65, Is. 6, pp. 1591-1606, <https://doi.org/10.1016/j.asr.2019.12.022>