Конференция
"Проблемы и перспективы космических миссий
с электрореактивными двигателями"
09-12 октября 2022 года

КМЭРД
2022

Точное решение усреднённых уравнений возмущённого орбитального движения в задачах оптимального управления

Авторы:
Суслов Кирилл Сергеевич,

Широбоков Максим Геннадьевич,

Трофимов Сергей Павлович,

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Проблематика

Актуальная проблема – **задача оптимизации управления орбитальным движением при многовитковых перелётах:** проектирование траекторий аппаратов с ДУ малой тяги, выход из системы Земля–Луна.

Существующие методы обладают как преимуществами, так и недостатками.

В сложном поле уравнения движения не интегрируются аналитически, что приводит к следующим проблемам:

- вычислительная сложность,
- погрешности построения,
- отсутствие явной связи управления с качественным поведением траекторий.

Цель работы и структура доклада

Предложить метод поиска начального приближения для задачи оптимизации, который не обладает вышеописанными недостатками.

Для этого предлагается найти **модель движения**, **класс функций управления** и **схему усреднения**, которые приводят к системе уравнений движения, имеющей точное решение.

В докладе представлены:

1. Уравнения движения
2. Условия на управляющее ускорение
3. Усреднённые уравнения движения
4. Точное решение усреднённой системы
5. Решение модельной задачи оптимизации

Уравнения движения

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v},\ \dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\mu \boldsymbol{r}}{r^3} + \boldsymbol{f}.$$

- Перейдём к равноденственным элементам орбиты: p, e_x, e_y, i_x, i_y, L.
- Разложим возмущение по компонентам в орбитальной СК: $f_r,\ f_t,\ f_b$.
- Совершим замену независимой переменной по формуле: $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{p/\mu}$.

$$e_x' = \varepsilon \cdot \left(\sigma \sin L \cdot \xi_r + (e_x + (1+\sigma)\cos L) \cdot \xi_t - e_y \eta \cdot \xi_b\right),$$

$$e_y' = \varepsilon \cdot \left(-\sigma \cos L \cdot \xi_r + (e_y + (1+\sigma)\sin L) \cdot \xi_t + e_x \eta \cdot \xi_b\right),$$

$$i_x' = \varepsilon \cdot \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2} \cos L \cdot \xi_b,\ i_y' = \varepsilon \cdot \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2} \sin L \cdot \xi_b,$$

$$p' = \varepsilon \cdot 2p \cdot \xi_t,\ L' = \frac{\mu \sigma^3}{p^2} + \varepsilon \cdot \eta \cdot \xi_b.$$

где $f_i(\boldsymbol{I}(\tau),\ L(\tau),\ \tau) = \varepsilon \cdot \xi_i(\boldsymbol{I}(\tau),\ L(\tau),\ \tau)$, $\varepsilon = \dfrac{\max_{\tau \in [\tau_0,\ \tau_0 + T_f]} f(\boldsymbol{I}(\tau),\ L(\tau),\ \tau)}{(1 - e(\tau_0))^2 \mu / p^2(\tau_0)}$

Условия на возмущающее ускорение

Рассматривается множество функций возмущающего ускорения, компоненты которого в орбитальной системе координат

- являются периодическими функциями истинной долготы,
- совпадают со своими тригонометрическими рядами Фурье с постоянными коэффициентами.

$$\xi_i(L) = \alpha_0^i + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^i \cos kL + \beta_k^i \sin kL),\; i \in \{r,\, t,\, b\},$$

$$\alpha_0^i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi_i dL,\; \alpha_k^i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \xi_i \cos{(kL)} dL,\; \beta_k^i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \xi_i \sin{(kL)} dL.$$

Усреднение уравнений движения

Медленные переменные: $\boldsymbol{I} = (p,\ e_x,\ e_y,\ i_x,\ i_y)^T$, быстрая переменная: L.

Схема усреднения: $\overline{\boldsymbol{I}}' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{I}'(\overline{\boldsymbol{I}}, L)dL$

$$\overline{p}' = \varepsilon \cdot 2\overline{p}\alpha_0^t,\ \overline{i_x}' = \varepsilon \cdot \frac{1+\overline{i_x}^2+\overline{i_y}^2}{4}\alpha_1^b,\ \overline{i_y}' = \varepsilon \cdot \frac{1+\overline{i_x}^2+\overline{i_y}^2}{4}\beta_1^b$$

$$\overline{e_x}' = \varepsilon \cdot \left(\overline{e_x}\frac{6\alpha_0^t+\alpha_2^t+\beta_2^r}{4} + \overline{e_y}\frac{\beta_2^t-\alpha_2^r+2\alpha_0^r-2(\overline{i_x}\beta_1^b-\overline{i_y}\alpha_1^b)}{4} + \frac{\beta_1^r}{2} + \alpha_1^t\right),$$

$$\overline{e_y}' = \varepsilon \cdot \left(\overline{e_x}\frac{\beta_2^t-\alpha_2^r-2\alpha_0^r+2\left(\overline{i_x}\beta_1^b-\overline{i_y}\alpha_1^b\right)}{4} + \overline{e_y}\frac{6\alpha_0^t-\alpha_2^t-\beta_2^r}{4} - \frac{\alpha_1^r}{2} + \beta_1^t\right).$$

Коэффициенты, влияющие на уравнения

движения: $\alpha_0^r,\ \alpha_1^r,\ \beta_1^r,\ \alpha_2^r,\ \beta_2^r,\ \alpha_0^t,\ \alpha_1^t,\ \beta_1^t,\ \alpha_2^t,\ \beta_2^t,\ \alpha_1^b,\ \beta_1^b$

Точное решение усреднённой системы

$$\overline{p}(\tau) = \overline{p}(\tau_0)\exp\left(2\varepsilon\alpha_0^t(\tau-\tau_0)\right),$$

$$\overline{i_x}(\tau) = \frac{1}{(\alpha_1^b)^2+(\beta_1^b)^2}\left(\alpha_1^b\rho\,\mathrm{tg}\Big(\gamma+\frac{\varepsilon\rho}{4}(\tau-\tau_0)\Big)+\beta_1^b k\right),$$

$$\overline{i_y}(\tau) = \frac{1}{(\alpha_1^b)^2+(\beta_1^b)^2}\left(\beta_1^b\rho\,\mathrm{tg}\Big(\gamma+\frac{\varepsilon\rho}{4}(\tau-\tau_0)\Big)-\alpha_1^b k\right),$$

$$\begin{pmatrix}\overline{e_x}(\tau)\\ \overline{e_y}(\tau)\end{pmatrix} = e^{\varepsilon M\tau}\left(\begin{pmatrix}\overline{e_x}(\tau)\\ \overline{e_y}(\tau)\end{pmatrix}+M^{-1}\boldsymbol{m}\right)-M^{-1}\boldsymbol{m},$$

где

$$k=\beta_1^b\overline{i_x}(\tau_0)-\alpha_1^b\overline{i_y}(\tau_0),\ \rho=\sqrt{(\alpha_1^b)^2+(\beta_1^b)^2+k^2},\ \gamma=\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha_1^b\overline{i_x}(\tau_0)+\beta_1^b\overline{i_y}(\tau_0)}{\rho}\right),$$

$$\boldsymbol{m}=\begin{pmatrix}\alpha_1^t+\frac{\beta_1^r}{2}\\ \beta_1^t-\frac{\alpha_1^r}{2}\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}a+b & c+d\\ c-d & a-b\end{pmatrix},\ a=\frac{3\alpha_0^t}{2},\ b=\frac{\alpha_2^t+\beta_2^r}{4},\ c=\frac{\beta_2^t-\alpha_2^r}{4},\ d=\frac{\alpha_0^r-k}{2}.$$

Модельная задача оптимизации управления

Рассматривается задача оптимального перелёта между двумя кеплеровыми орбитами за конечное время.

Оптимальное управление ищем в виде:

$$\xi_r(L) = \alpha_0^r + \alpha_1^r \cos L + \beta_1^r \sin L + \alpha_2^r \cos 2L + \beta_2^r \sin 2L,$$

$$\xi_t(L) = \alpha_0^t + \alpha_1^t \cos L + \beta_1^t \sin L + \alpha_2^t \cos 2L + \beta_2^t \sin 2L,$$

$$\xi_b(L) = \alpha_1^b \cos L + \beta_1^b \sin L,$$

Оптимизируемый функционал:

$$J(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}^2(L)dL = \frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\xi_r^2(L) + \xi_t^2(L) + \xi_b^2(L)\right) dL =$$
$$= \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\boldsymbol{\alpha}^2 + (\alpha_0^r)^2 + (\alpha_0^t)^2\right),$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \left[\alpha_0^r,\, \alpha_1^r,\, \beta_1^r,\, \alpha_2^r,\, \beta_2^r,\, \alpha_0^t,\, \alpha_1^t,\, \beta_1^t,\, \alpha_2^t,\, \beta_2^t,\, \alpha_1^b,\, \beta_1^b\right]^{\mathrm{T}}.$

Условия задачи

Классические элементы начальной и целевой орбит

τ, безразм. ед.	a, безразм. ед.	e	i, рад.	Ω, рад.	ω, рад.
0	1	0.03	0.8	0	0
$20 \cdot 2\pi$	1.2	0.01	0.6	$\pi - 0.1$	0

Равноденственные элементы начальной и целевой орбит

τ, безразм. ед.	p, безразм. ед.	e_x	e_y	i_x, рад.	i_y, рад.
0	0.9991	0.03	0	0.423	0
$20 \cdot 2\pi$	1.1999	-0.01	0.001	-0.308	0.031

Ограничения-равенства

$$\overline{p}(\tau) = \overline{p}(\tau_0)\exp\left(2\varepsilon\alpha_0^t(\tau-\tau_0)\right),$$

$$\overline{i_x}(\tau) = \frac{1}{(\alpha_1^b)^2+(\beta_1^b)^2}\left(\alpha_1^b\rho\,\mathrm{tg}\left(\gamma+\frac{\varepsilon\rho}{4}(\tau-\tau_0)\right)+\beta_1^b k\right),$$

$$\overline{i_y}(\tau) = \frac{1}{(\alpha_1^b)^2+(\beta_1^b)^2}\left(\beta_1^b\rho\,\mathrm{tg}\left(\gamma+\frac{\varepsilon\rho}{4}(\tau-\tau_0)\right)-\alpha_1^b k\right),$$

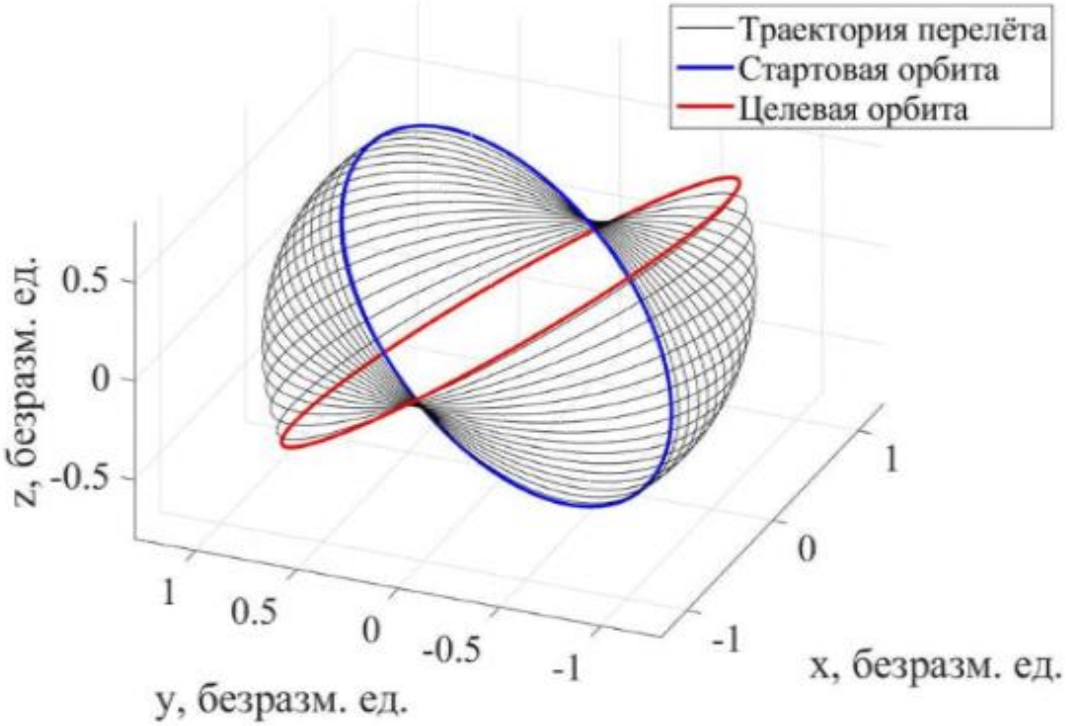
$$\begin{pmatrix}\overline{e_x}(\tau)\\ \overline{e_y}(\tau)\end{pmatrix} = e^{\varepsilon M\tau}\left(\begin{pmatrix}\overline{e_x}(\tau)\\ \overline{e_y}(\tau)\end{pmatrix}+M^{-1}\boldsymbol{m}\right)-M^{-1}\boldsymbol{m},$$

Начальное приближение: $\boldsymbol{\alpha} = 0$.

Оптимальное управление

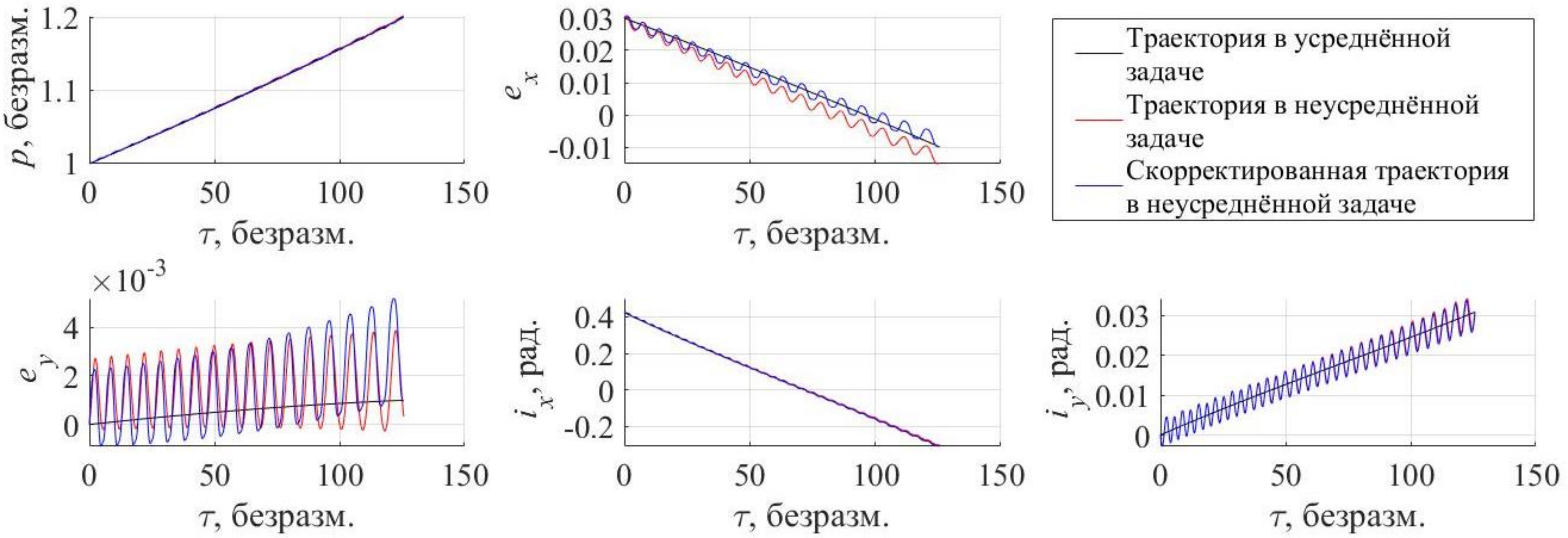
Коэффициенты рядов Фурье оптимального управляющего ускорения в усреднённой задаче

α_0^r	$-1.3\,10^{-8}$	α_0^t	$7.3\,10^{-4}$		
α_1^r	$-2.1\,10^{-6}$	α_1^t	$-2.6\,10^{-4}$	α_1^b	$-2.2\,10^{-2}$
β_1^r	$-1.3\,10^{-4}$	β_1^t	$4.2\,10^{-6}$	β_1^b	$9.4\,10^{-4}$
α_2^r	$1.2\,10^{-8}$	α_2^t	$-7.1\,10^{-7}$		
β_2^r	$-7.1\,10^{-7}$	β_2^t	$-1.2\,10^{-8}$		



Коррекция начального приближения

Результат коррекции оптимального управления.



Сравнение начального приближения и скорректированного управления

α_0^r	α_1^r	β_1^r	α_2^r	β_2^r	α_0^t	α_1^t	β_1^t	α_2^t	β_2^t	α_1^b	β_1^b
$-1.3\,10^{-8}$	$-2.1\,10^{-6}$	$-1.3\,10^{-4}$	$1.2\,10^{-8}$	$-7.1\,10^{-7}$	$7.3\,10^{-4}$	$-2.6\,10^{-4}$	$4.2\,10^{-6}$	$-7.1\,10^{-7}$	$-1.2\,10^{-8}$	$-2.2\,10^{-2}$	$9.4\,10^{-4}$
$-8.1\,10^{-5}$	$6.3\,10^{-5}$	$-1.1\,10^{-4}$	$-3.1\,10^{-4}$	$2.4\,10^{-5}$	$7.2\,10^{-4}$	$-2.3\,10^{-4}$	$6.1\,10^{-5}$	$1.4\,10^{-5}$	$6.1\,10^{-4}$	$-2.2\,10^{-2}$	$9.2\,10^{-4}$

Заключение

Результаты:

- Разработан метод усреднения возмущённой ограниченной задачи двух тел, при периодическом управлении приводящий к системе с точным решением.
- На основе точного решения разработан метод поиска начального решения для задачи оптимизации перелёта с орбиты на орбиту за конечное время.

Возможное применение полученных результатов:

- оптимизация многовитковых перелётов;
- проектирование миссий с малой тягой;
- анализ орбитального движения в задачах, близких к задаче двух тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №19-11-00256).