



XLVII Академические чтения по космонавтике, посвященные
памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся
отечественных ученых — пионеров освоения космического
пространства
24–27 января 2023 г.



ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УСРЕДНЁННЫХ УРАВНЕНИЙ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Авторы:

*Суслов Кирилл Сергеевич, Ширококов Максим Геннадьевич,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,*

Трофимов Сергей Павлович.

Проблематика работы

Аналитические приближенные модели позволяют:

- анализировать динамику движения,
- оценивать время манёвра,
- оценивать затраты топлива,
- строить начальные приближения для итерационных схем в задачах поиска оптимальных траекторий.

Возмущённая задача двух тел

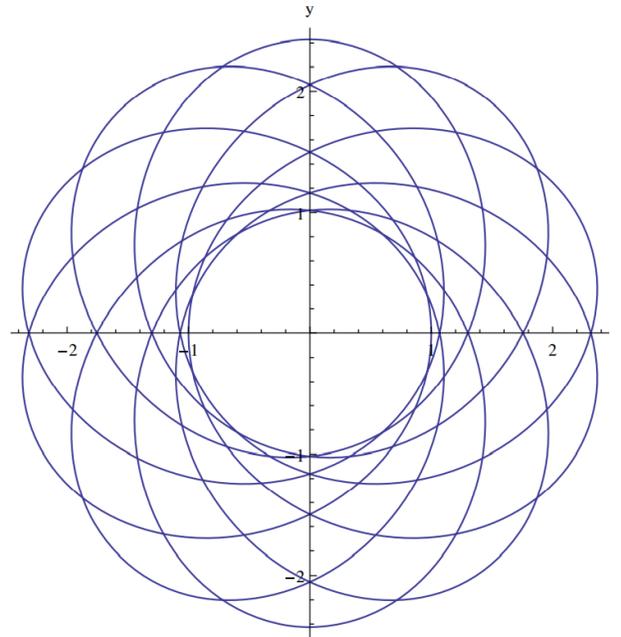
Уравнения движения:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$$

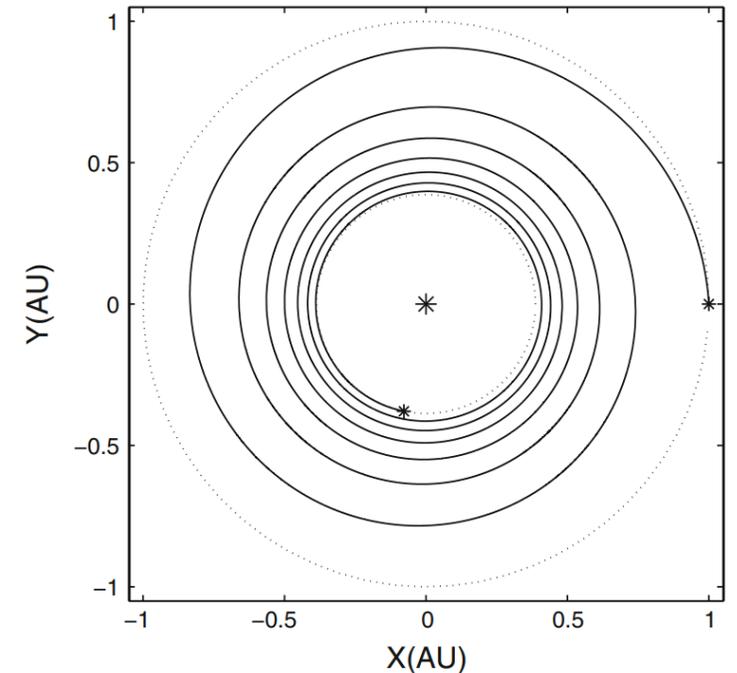
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f} = f_r \hat{\mathbf{r}} + f_n \hat{\mathbf{w}} + f_c[\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{r}}]$$

Аналитические решения:



Постоянное радиальное
ускорение



Постоянное тангенциальное
ускорение

Усреднённые уравнения Хадсон и Ширса

Периодическое возмущение

$$F_R = \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha_k^R \cos kE + \beta_k^R \sin kE]$$

$$F_W = \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha_k^W \cos kE + \beta_k^W \sin kE]$$

$$F_S = \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha_k^S \cos kE + \beta_k^S \sin kE]$$

Усреднённые уравнения

$$\bar{a} = 2 \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[\frac{1}{2} e \beta_1^R + \sqrt{1-e^2} \alpha_0^S \right]$$

$$\bar{e} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sqrt{1-e^2} \left[\frac{1}{2} \sqrt{1-e^2} \beta_1^R + \alpha_1^S - \frac{3}{2} e \alpha_0^S - \frac{1}{4} e \alpha_2^S \right]$$

$$\bar{i} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left[\frac{1}{2} (1+e^2) \cos \omega \alpha_1^W - \frac{3}{2} e \cos \omega \alpha_0^W - \frac{1}{2} \sqrt{1-e^2} \sin \omega \beta_1^W - \frac{1}{4} e \cos \omega \alpha_2^W + \frac{1}{4} e \sqrt{1-e^2} \sin \omega \beta_2^W \right]$$

...

Замена координат и независимой переменной

- Равноденственные элементы орбиты: p, e_x, e_y, i_x, i_y, L
- Новая независимая переменная τ :

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \quad \sigma = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L$$

- Разложение возмущения в ряд Фурье: $i = \{r, c, n\}$,

$$f_i(L) = \alpha_0^i + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^i \cos kL + \beta_k^i \sin kL),$$

$$\alpha_0^i = \int_0^{2\pi} \frac{f_i(L) dL}{2\pi}, \quad \alpha_k^i = \int_0^{2\pi} \frac{f_i(L) \cos(kL) dL}{\pi}, \quad \beta_k^i = \int_0^{2\pi} \frac{f_i(L) \sin(kL) dL}{\pi}.$$

Классическая схема усреднения уравнений ДВИЖЕНИЯ

Невозмущённая система: $\mathbf{x} = \mathbf{const}$, $\frac{dy}{d\tau} = Y_0(\mathbf{x}, y)$,

возмущённая система: $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \varepsilon X(\mathbf{x}, y)$, $\frac{dy}{d\tau} = Y(\mathbf{x}, y, \varepsilon) = Y_0(\mathbf{x}, y) + \varepsilon Y_1(\mathbf{x}, y)$.

Стандартная схема усреднения:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\tau}(\bar{\mathbf{x}}) = \varepsilon \bar{X}(\bar{\mathbf{x}}) = \varepsilon \lim_{\Delta\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} X(\bar{\mathbf{x}}, \varphi(\bar{\mathbf{x}}, y_0, \tau_0, \tau)) d\tau$$

Теорема Волосова о методе усреднения:

Для любых $K > 0$, $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, $\tau \in [\tau_0, \tau_0 + K/\varepsilon]$ выполняется $|\mathbf{x}(\tau) - \bar{\mathbf{x}}(\tau)| < \delta$.

Усреднение уравнений движения в работе

Схема усреднения в работе:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\tau}(\bar{\mathbf{x}}) = \varepsilon \tilde{X}(\bar{\mathbf{x}}) = \varepsilon \lim_{\Delta y \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta y} \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} X(\bar{\mathbf{x}}, y) dy = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\bar{\mathbf{x}}, y) dy$$

Аналитические выкладки показывают, что

$$\varepsilon \bar{X}(\bar{\mathbf{x}}) = \varepsilon \tilde{X}(\bar{\mathbf{x}}) + o(\varepsilon) + O(\varepsilon)o(\bar{e}), \quad \bar{e}, \varepsilon \rightarrow 0.$$

При достаточно малых ε разница между $\mathbf{x}(\tau)$ и $\bar{\mathbf{x}}(\tau)$, полученным из решения усреднённым уравнений, также обратно пропорциональна величине возмущения ε .

Система усреднённых уравнений движения

$$\frac{d\bar{p}}{d\tau} = 2\bar{p}\alpha_0^c, \quad \frac{d\bar{i}_x}{d\tau} = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{2} \frac{\alpha_1^n}{2}, \quad \frac{d\bar{i}_y}{d\tau} = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{2} \frac{\beta_1^n}{2},$$

$$\frac{d\bar{e}_x}{d\tau} = \bar{e}_x \frac{6\alpha_0^c + \alpha_2^c + \beta_2^r}{4} + \bar{e}_y \frac{\beta_2^c - \alpha_2^r + 2\alpha_0^r - 2(\bar{i}_x\beta_1^n - \bar{i}_y\alpha_1^n)}{4} + \frac{\beta_1^r}{2} + \alpha_1^c,$$

$$\frac{d\bar{e}_y}{d\tau} = \bar{e}_x \frac{\beta_2^c - \alpha_2^r - 2\alpha_0^r + 2(\bar{i}_x\beta_1^n - \bar{i}_y\alpha_1^n)}{4} + \bar{e}_y \frac{6\alpha_0^c - \alpha_2^c - \beta_2^r}{4} - \frac{\alpha_1^r}{2} + \beta_1^c.$$

Из бесконечного числа коэффициентов Фурье на уравнения влияют только 12: $\alpha_0^r, \alpha_1^r, \beta_1^r, \alpha_2^r, \beta_2^r, \alpha_0^c, \alpha_1^c, \beta_1^c, \alpha_2^c, \beta_2^c, \alpha_1^n, \beta_1^n$

Влияние возмущения на уравнения параметризуется 8 независимыми параметрами: $\alpha_0^r, \alpha_0^c, \alpha_1^n, \beta_1^n, 2\alpha_1^c + \beta_1^r, 2\beta_1^c - \alpha_1^r, \alpha_2^c + \beta_2^r, \beta_2^c - \alpha_2^r$.

Решение усреднённых уравнений

$$\bar{p}(\tau) = \bar{p}(\tau_0) \exp(2\alpha_0^c(\tau - \tau_0)),$$

$$\bar{\mathbf{e}}(\tau) = e^{M(\tau - \tau_0)} \bar{\mathbf{e}}(\tau_0) + M^{-1}(e^{M(\tau - \tau_0)} - E)\mathbf{n}.$$

$$\bar{i}_x(\tau) = \frac{1}{(\alpha_1^n)^2 + (\beta_1^n)^2} \left(\alpha_1^n \rho \tan\left(\gamma + \frac{\rho}{4}(\tau - \tau_0)\right) + \beta_1^n K \right),$$

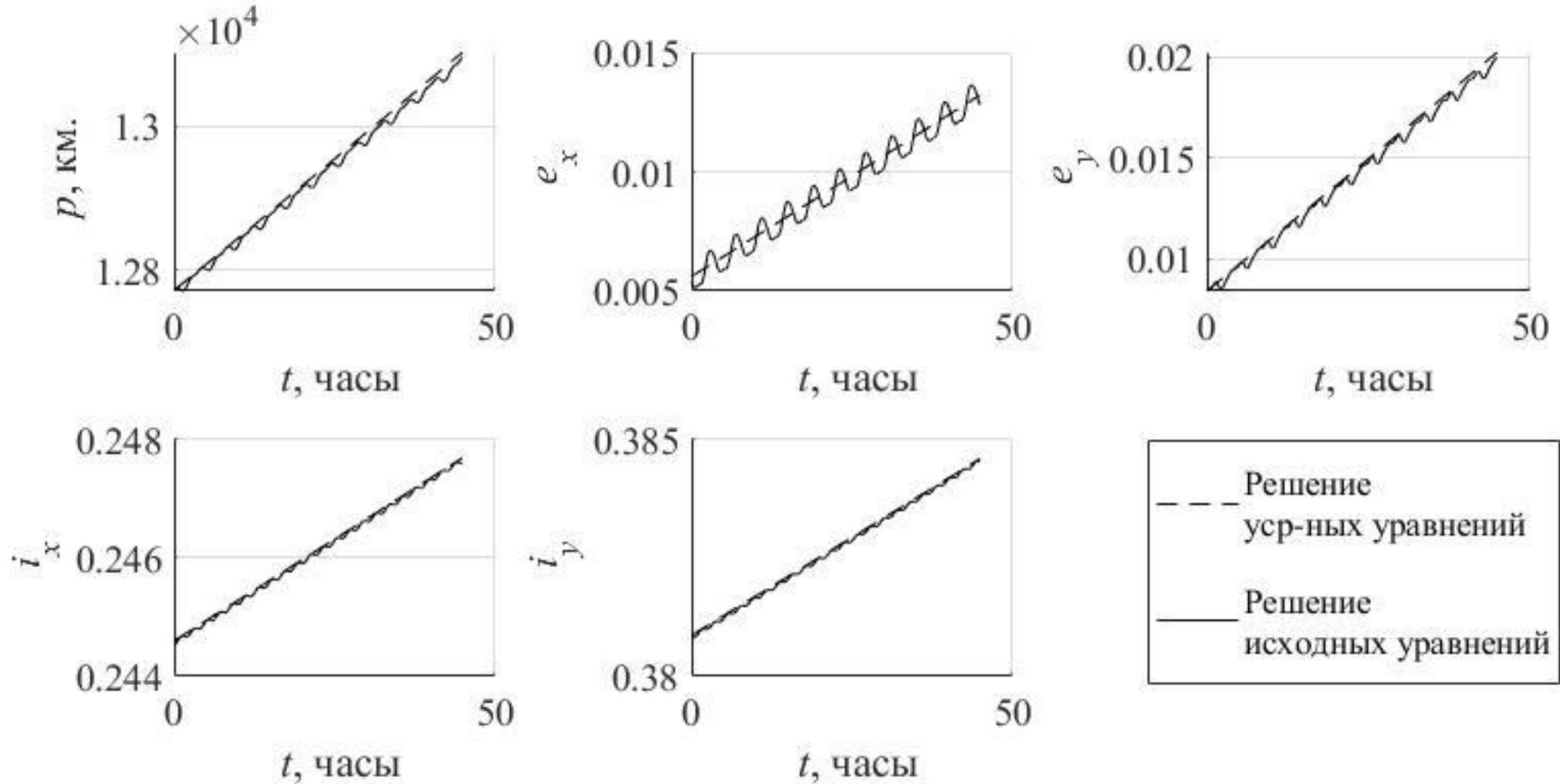
$$\bar{i}_y(\tau) = \frac{1}{(\alpha_1^n)^2 + (\beta_1^n)^2} \left(\beta_1^n \rho \tan\left(\gamma + \frac{\rho}{4}(\tau - \tau_0)\right) - \alpha_1^n K \right),$$

где

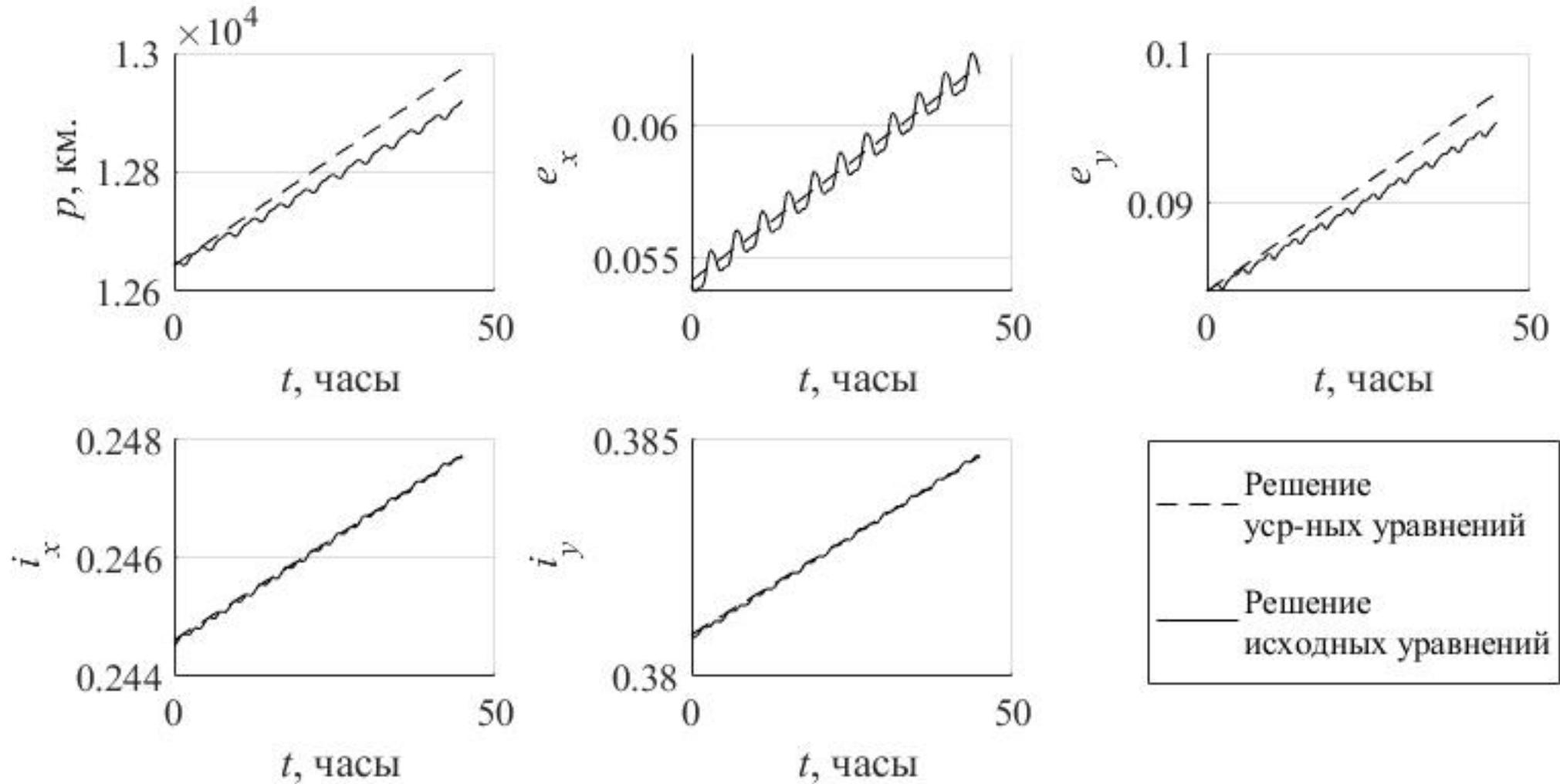
$$K = \beta_1^n \bar{i}_x - \alpha_1^n \bar{i}_y, \quad \rho = \sqrt{(\alpha_1^n)^2 + (\beta_1^n)^2 + K^2}, \quad \gamma = \arctan\left(\frac{\alpha_1^n \bar{i}_x(\tau_0) + \beta_1^n \bar{i}_y(\tau_0)}{\rho}\right),$$

$$\bar{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \bar{e}_x \\ \bar{e}_y \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6\alpha_0^c + \alpha_2^c + \beta_2^r & \beta_2^c - \alpha_2^r + 2\alpha_0^r - 2K \\ \beta_2^c - \alpha_2^r - 2\alpha_0^r + 2K & 6\alpha_0^c - \alpha_2^c - \beta_2^r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\alpha_1^c + \beta_1^r \\ 2\beta_1^c - \alpha_1^r \end{pmatrix}.$$

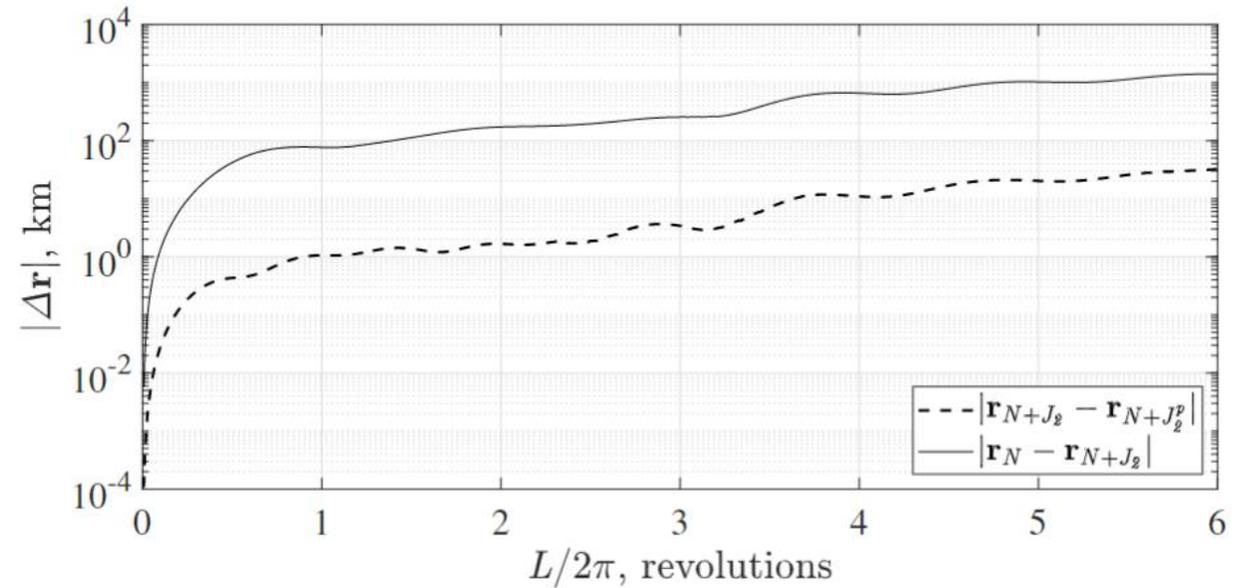
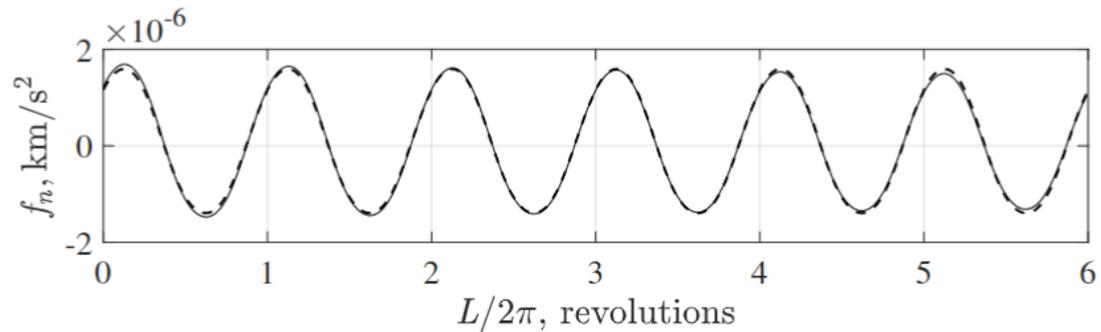
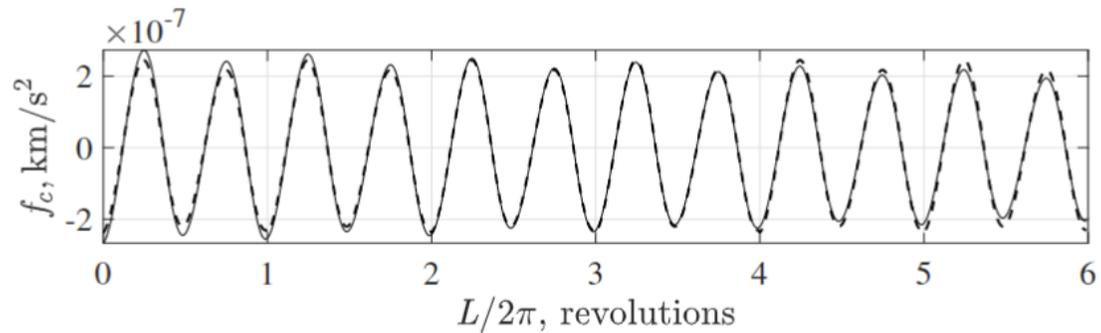
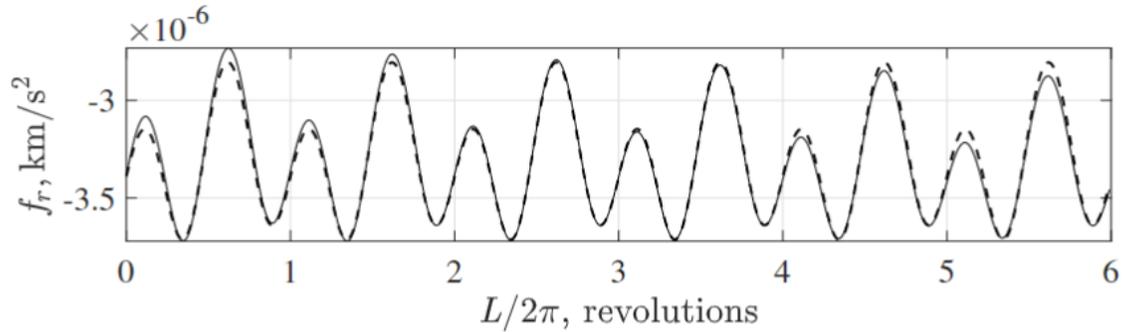
Точное и усреднённое решения ($e_0 = 0.01$)



Случай большего эксцентриситета ($e_0 = 0.1$)



Рассмотрение неперидического возмущения от гармоник J_2



Возможности применения

- Аналитическое решение позволяет быстрее получать траектории.
- В случае периодического реактивного ускорения управление можно параметризовать конечным набором параметров.

Спасибо за внимание!