



# Исследование влияния дисбаланса маховиков на точность ориентации и стабилизации наноспутников

Я.В. Маштаков, С.С. Ткачёв

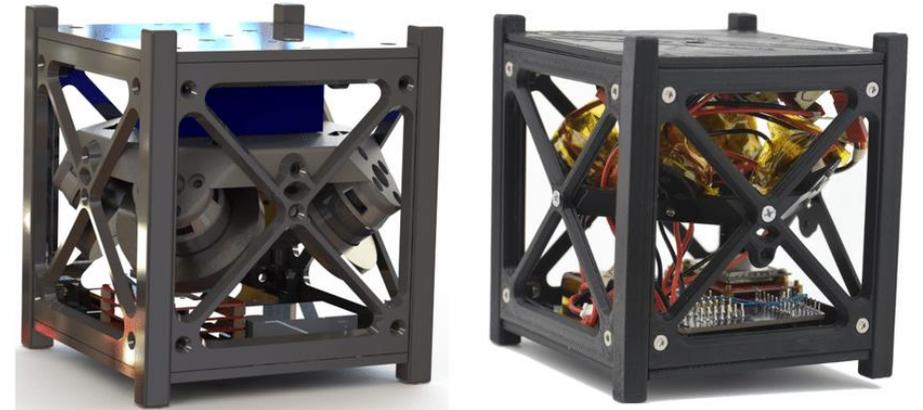
Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

# Введение

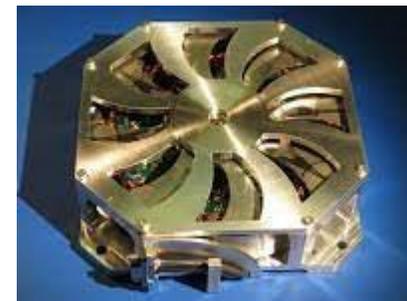
Маховики – элемент гироскопической системы ориентации

+ высокая точность и быстродействие  
+ не требуют расхода рабочего тела

- насыщение
- вибрации



DOI: [10.2514/6.2016-5346](https://doi.org/10.2514/6.2016-5346)



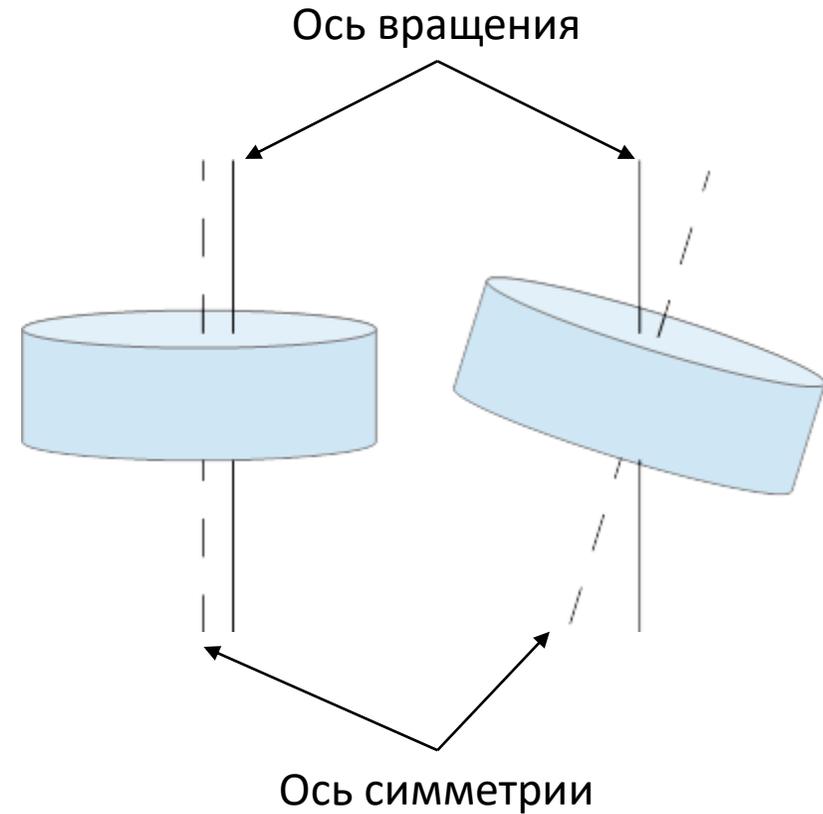
<http://www.sinclairinterplanetary.com/reactionwheels>

# Источники вибраций

Статический дисбаланс

Динамический дисбаланс

Люфт в точках крепления оси вращения

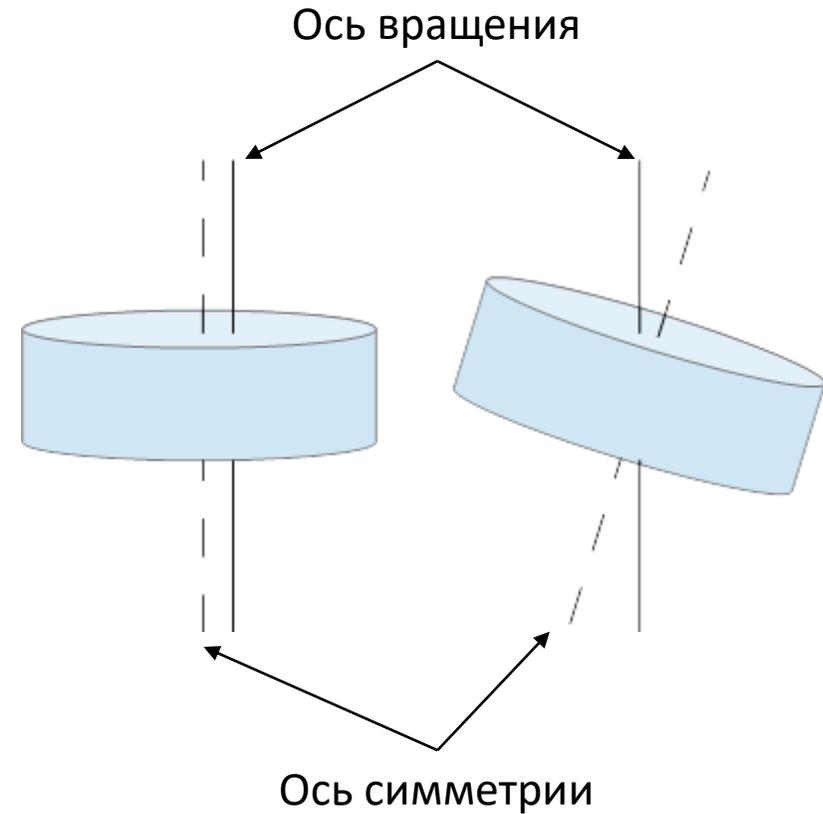


# Источники вибраций

**Статический дисбаланс**

**Динамический дисбаланс**

Люфт в точках крепления оси вращения



# Математическая модель

Спутник – твердое тело с  $n$  маховиками  
Оси маховиков зафиксированы относительно спутника

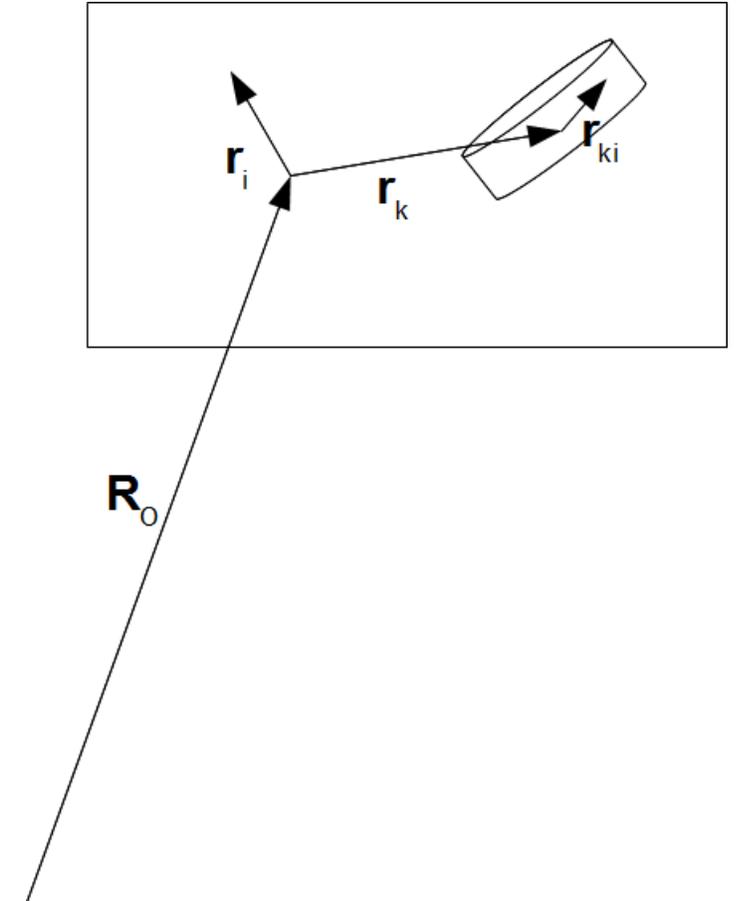
$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_O + \mathbf{r}_i$$

$$\mathbf{R}_{kj} = \mathbf{R}_O + \boldsymbol{\rho}_k + \boldsymbol{\rho}_{kj}$$

$$\delta \mathbf{R}_i = \delta \mathbf{R}_O + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i$$

$$\delta \mathbf{R}_{kj} = \delta \mathbf{R}_O + \delta \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\rho}_k + (\delta \boldsymbol{\theta} + \delta \varphi_k \mathbf{e}_k) \times \boldsymbol{\rho}_{kj}$$

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{R}_i + \sum_k \sum_j (m_{kj} \ddot{\mathbf{R}}_{kj} - \mathbf{F}_{kj}) \delta \mathbf{R}_{kj} = \sum_k M_k \delta \varphi_k$$



# Уравнения движения

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_c \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k \end{pmatrix} = \mathbf{N}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} m\mathbf{E}_{3 \times 3} & -\left[ \sum_k m_k \boldsymbol{\rho}_{kc} \right]_{\times} & -m_1 \boldsymbol{\rho}_{1c} \times \mathbf{e}_1 & \dots & -m_n \boldsymbol{\rho}_{nc} \times \mathbf{e}_n \\ \left[ \sum_k m_k \boldsymbol{\rho}_{kc} \right]_{\times} & \mathbf{J} & (m_1 \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_{1c}) + \mathbf{I}_1) \mathbf{e}_1 & \dots & (m_n \mathbf{K}_n(\boldsymbol{\rho}_n, \boldsymbol{\rho}_{nc}) + \mathbf{I}_n) \mathbf{e}_n \\ -(m_1 \boldsymbol{\rho}_{1c} \times \mathbf{e}_1)^T & \mathbf{e}_1^T (m_1 \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\rho}_{1c}, \boldsymbol{\rho}_1) + \mathbf{I}_1) & \mathbf{e}_1^T \mathbf{I}_1 \mathbf{e}_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ -(m_n \boldsymbol{\rho}_{nc} \times \mathbf{e}_n)^T & \mathbf{e}_n^T (m_n \mathbf{K}_n(\boldsymbol{\rho}_{nc}, \boldsymbol{\rho}_n) + \mathbf{I}_n) & 0 & 0 & \mathbf{e}_n^T \mathbf{I}_n \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_s + \sum_k \mathbf{F}_k - \sum_k m_k (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k) \times \boldsymbol{\rho}_{kc} - \sum_k m_k (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times \boldsymbol{\rho}_{kc} \\ \mathbf{N}_{\boldsymbol{\omega}} \\ M_1 + \mathbf{e}_1^T \mathbf{M}_1 - \mathbf{e}_1^T (m_1 \boldsymbol{\rho}_{1c} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{I}_1 (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_1) + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_1) \times \mathbf{I}_1 (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_1)) \\ \vdots \\ M_n + \mathbf{e}_n^T \mathbf{M}_n - \mathbf{e}_n^T (m_n \boldsymbol{\rho}_{nc} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_n + \mathbf{I}_n (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_n) + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_n) \times \mathbf{I}_n (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_n)) \end{pmatrix}$$

# Упрощенные модели

1. Центр масс маховика лежит на оси вращения  $\rho_{kc} = 0$

$$m\ddot{\mathbf{R}}_C = \mathbf{F}_s + \sum_k \mathbf{F}_k$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_k \mathbf{I}_k \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \sum_k (\mathbf{I}_k (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k) + \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\Omega}_k + \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\Omega}_k) = \mathbf{M}_s + \sum_k \mathbf{M}_{kc}$$

$$\mathbf{e}_k^T (\mathbf{I}_k (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_k) + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k) \times \mathbf{I}_k (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k)) = M_k + \mathbf{e}_k^T \mathbf{M}_k$$

2. Ось вращения – ось симметрии  $\boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\omega} - \mathbf{I}_k (\boldsymbol{\Omega}_k \times \boldsymbol{\omega}) = 0$

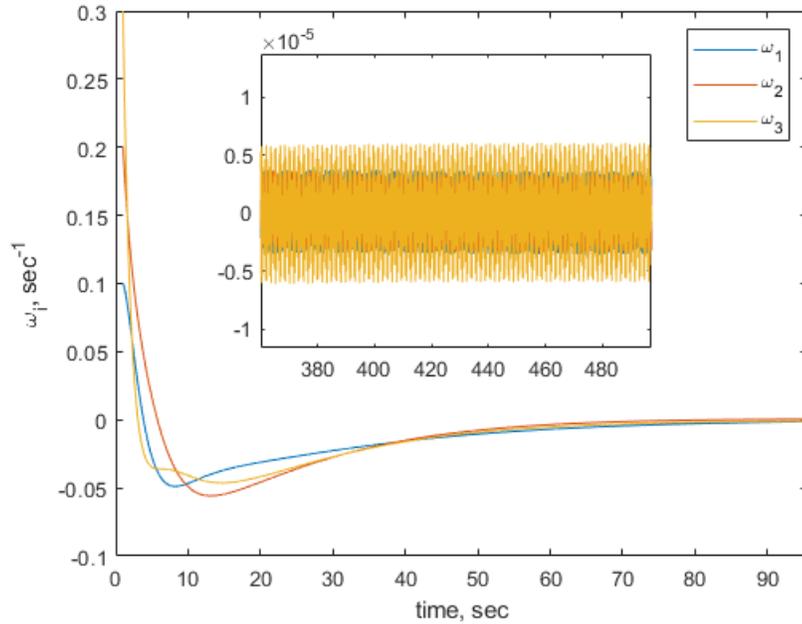
$$\mathbf{I}_k \boldsymbol{\Omega} = I_k \boldsymbol{\Omega}$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_k \mathbf{I}_k \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \sum_k (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_k \boldsymbol{\Omega}_k) = \mathbf{M}_s + \sum_k \mathbf{M}_{kc},$$

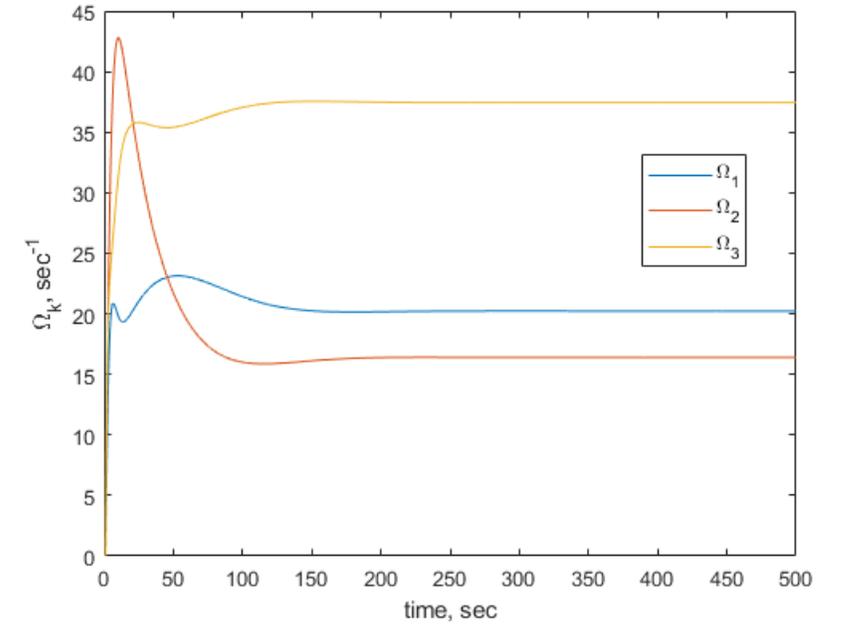
$$\mathbf{e}_k^T \mathbf{I}_k (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k) = M_k + \mathbf{e}_k^T \mathbf{M}_k$$

# Численный пример

Угловая скорость



Угловая скорость маховиков



При большой угловой скорости маховиков требуется  
дробить шаг численного интегрирования  
Контроль точность по вектору кинетического  
момента

# Оценка точности стабилизации

Тензор инерции маховика  $\mathbf{I}_k = \mathbf{I}_k^0 + \varepsilon \mathbf{I}_k^1$

Тензор инерции спутника  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \sum_k \left( m_k K(\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\rho}_{kc}) + m_k K(\boldsymbol{\rho}_{kc}, \boldsymbol{\rho}_k) + m_k K(\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\rho}_k) + \mathbf{I}_k^0 + \varepsilon \mathbf{I}_k^1 \right) = \tilde{\mathbf{J}} + \varepsilon \sum_k \mathbf{I}_k^1$

Система представима в виде  $\left( \tilde{\mathbf{J}} + \varepsilon \sum_k \mathbf{I}_k^1 \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_k \left( \mathbf{I}_k^0 + \varepsilon \mathbf{I}_k^1 \right) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k = \mathbf{a}^0 + \varepsilon \mathbf{a}^1,$

$$\mathbf{e}_k^T \left( \left( \mathbf{I}_k^0 + \varepsilon \mathbf{I}_k^1 \right) \left( \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_k \right) \right) = b_k^0 + \varepsilon b_k^1,$$

Управление  $M_k = \mathbf{e}_k^T \left( \mathbf{A} \mathbf{A}^T \right)^{-1} \left( k_\omega \boldsymbol{\omega} + k_q \mathbf{q} - \boldsymbol{\omega} \times \left( \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} + \sum_k \mathbf{I}_k^0 \boldsymbol{\Omega}_k \right) \right)$

# Оценка точности стабилизации

Решение в виде формального ряда  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0 + \varepsilon \boldsymbol{\omega}^1 + \dots$

$$\boldsymbol{\Omega}_k = \boldsymbol{\Omega}_k^0 + \varepsilon \boldsymbol{\Omega}_k^1 + \dots$$

$$\mathbf{q} \approx \frac{1}{2} (\gamma^0 + \varepsilon \gamma^1 + \alpha^0 + \varepsilon \alpha^1 + \beta^0 + \varepsilon \beta^1)^T = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi}^0 + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}^1 + \dots)$$

Уравнение первого приближения  $\left( \tilde{\mathbf{J}} - \sum_k I_k^0 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \right) \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^1 + k_\omega \dot{\boldsymbol{\varphi}}^1 + \frac{k_q}{2} \boldsymbol{\varphi}^1 = \sum_k \boldsymbol{\Omega}_k^0 \times \mathbf{I}_k^1 \boldsymbol{\Omega}_k^0$

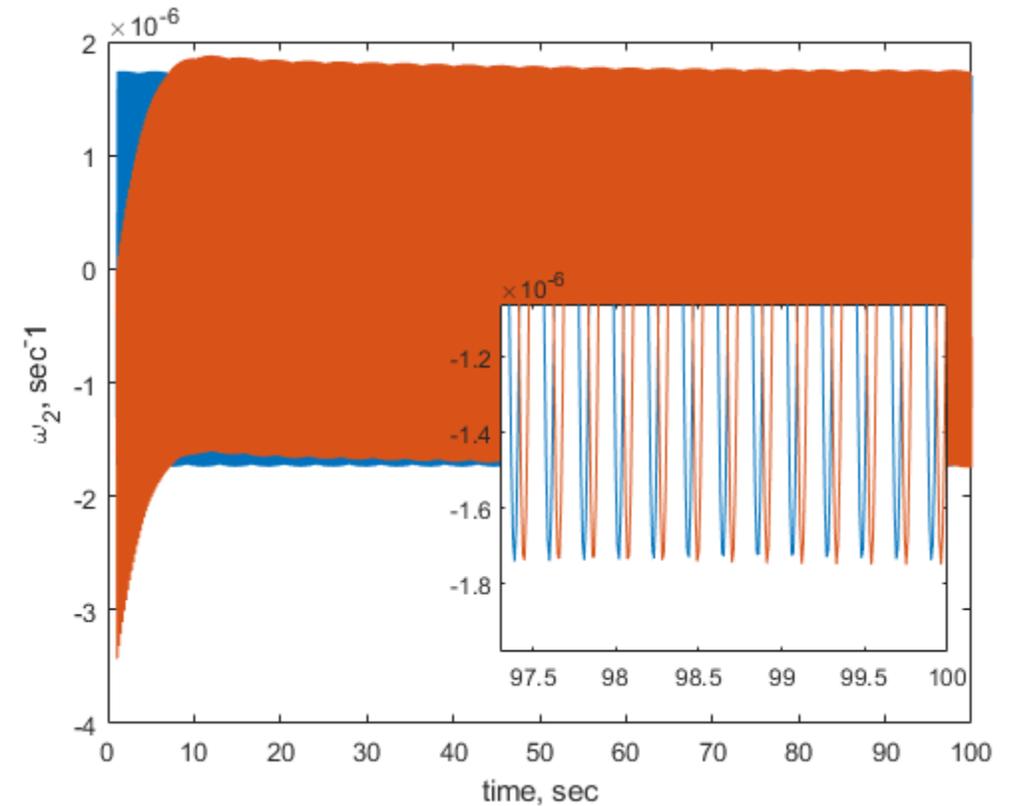
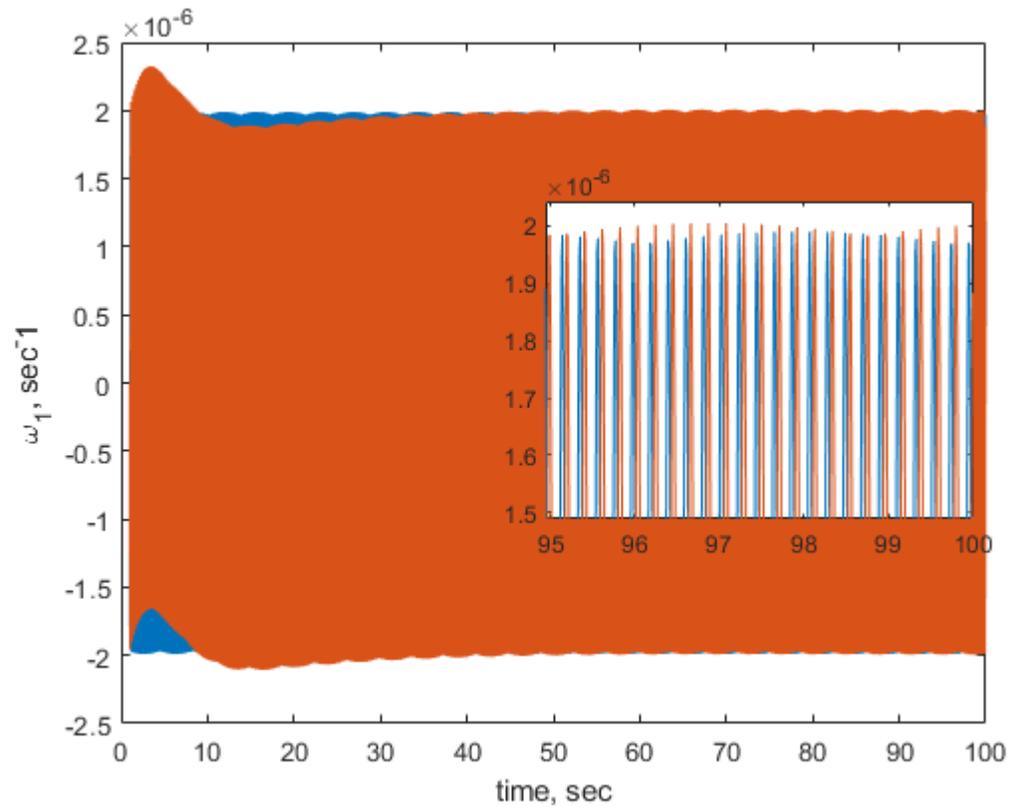
$$\boldsymbol{\varphi}^1 = \sum_k \mathbf{u}_k \cos(\Omega_k t) + \mathbf{v}_k \sin(\Omega_k t)$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$\mathbf{u}_k = \left( \left( \frac{k_a}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} - \tilde{\mathbf{J}} \Omega_k^2 \right)^2 + (k_\omega \Omega_k)^2 \mathbf{E}_{3 \times 3} \right)^{-1} \left( \left( \frac{k_a}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} - \tilde{\mathbf{J}} \Omega_k^2 \right) \mathbf{f}_k + k_\omega \Omega_k \mathbf{g}_k \right)$$

$$\mathbf{v}_k = \left( \left( \frac{k_a}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} - \tilde{\mathbf{J}} \Omega_k^2 \right)^2 + (k_\omega \Omega_k)^2 \mathbf{E}_{3 \times 3} \right)^{-1} \left( \left( \frac{k_a}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} - \tilde{\mathbf{J}} \Omega_k^2 \right) \mathbf{g}_k - k_\omega \Omega_k \mathbf{f}_k \right)$$

# Сравнение оценки с численным результатом



# Заключение

- построена математическая модель спутника с маховиками, учитывающая их статический и динамический дисбаланс
- создана программная реализация разработанной модели
- получены оценки точности стабилизации в конечном виде при наличии динамического дисбаланса