

XLV Академические чтения по космонавтике  
посвященные памяти академика С.П. Королёва и других  
выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения  
космического пространства

*30 марта—2 апреля 2021 г.*

# Геометрические методы проектирования WSB-траекторий перелета к Луне

*Целоусова А.А.*

*Трофимов С.П.*

*Широбоков М.Г.*

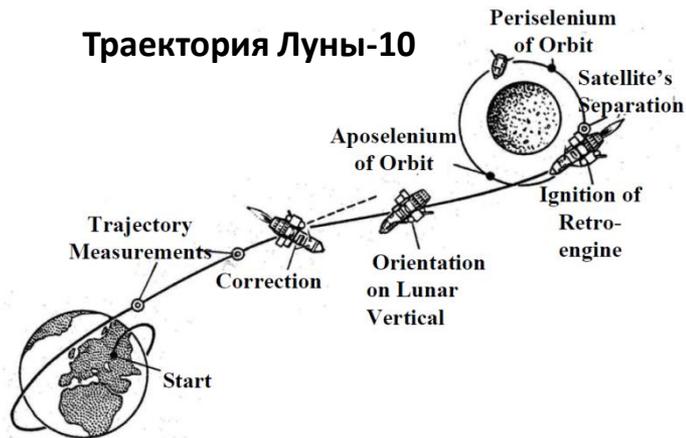


Институт прикладной  
математики  
им. М.В. Келдыша РАН



# От модели сопряженных конических сечений...

## Траектория Луны-10

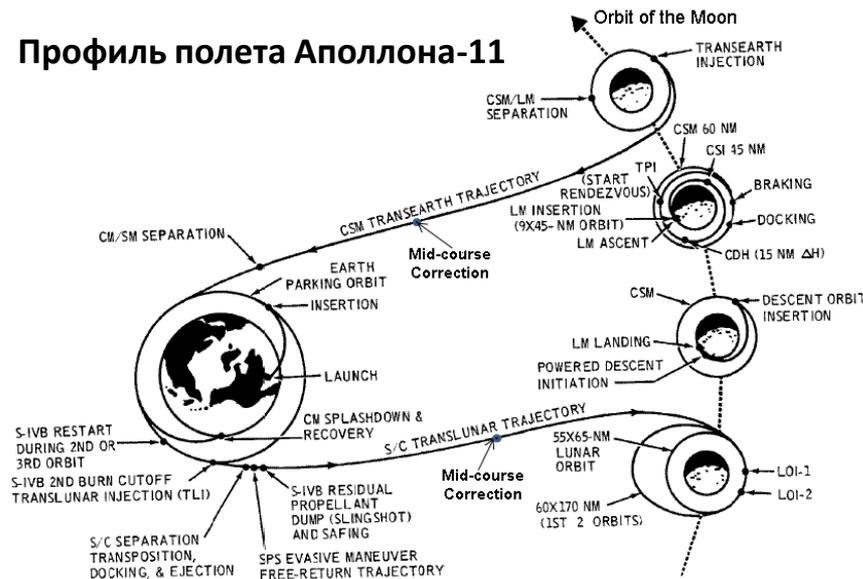


Credit: V.V. Ivashkin. Lunar trajectories of the spacecraft . – 2008.

Чтобы выйти на окололунную орбиту крупные космические корабли такие как Аполлон-11 должны выполнить LOI-маневр с большим  $\Delta V$

Луна-10 (1966) первый искусственный спутник Луны

## Профиль полета Аполлона-11

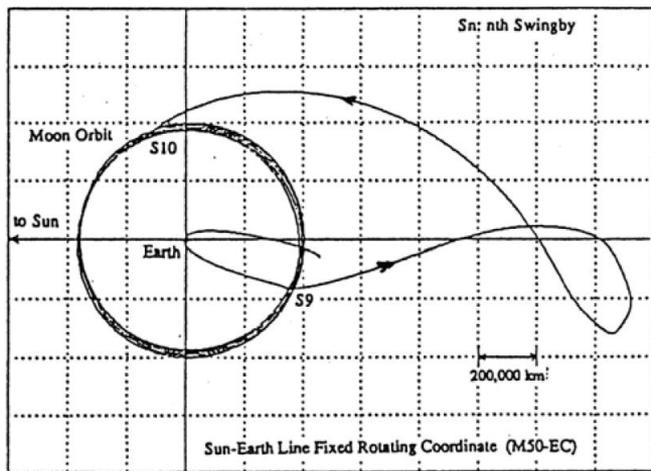


Credit: [https://www.mpoweruk.com/Apollo\\_Moon\\_Shot.htm](https://www.mpoweruk.com/Apollo_Moon_Shot.htm)

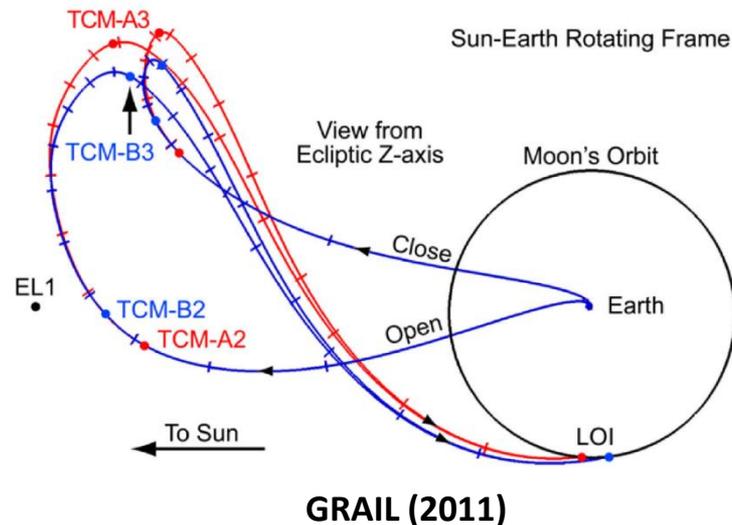


# ...к низкоэнергетическим WSB-траекториям

- По сравнению с высокоэнергетическими перелетами:
  - более низкая стоимость
  - расширенные окна старта
  - увеличенное время перелета



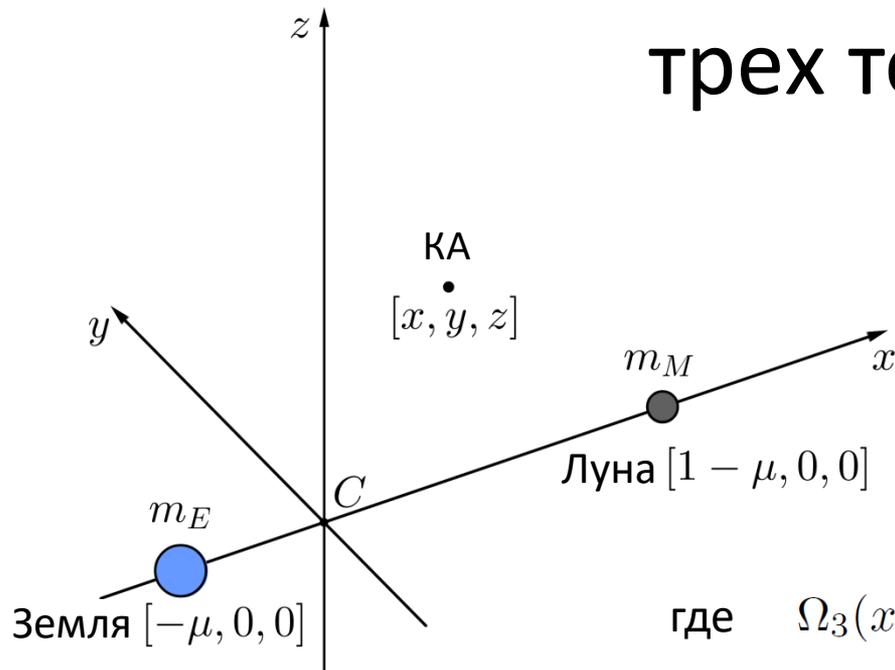
**Миссия Hiten (1991)**



Credit: Anderson R. L., Parker J. S. Targeting low-energy transfers to low lunar orbit. – 2011



# Круговая ограниченная задача трех тел (CR3BP)



Уравнения движения:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x},$$
$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial y},$$
$$\ddot{z} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial z}$$

где  $\Omega_3(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2},$

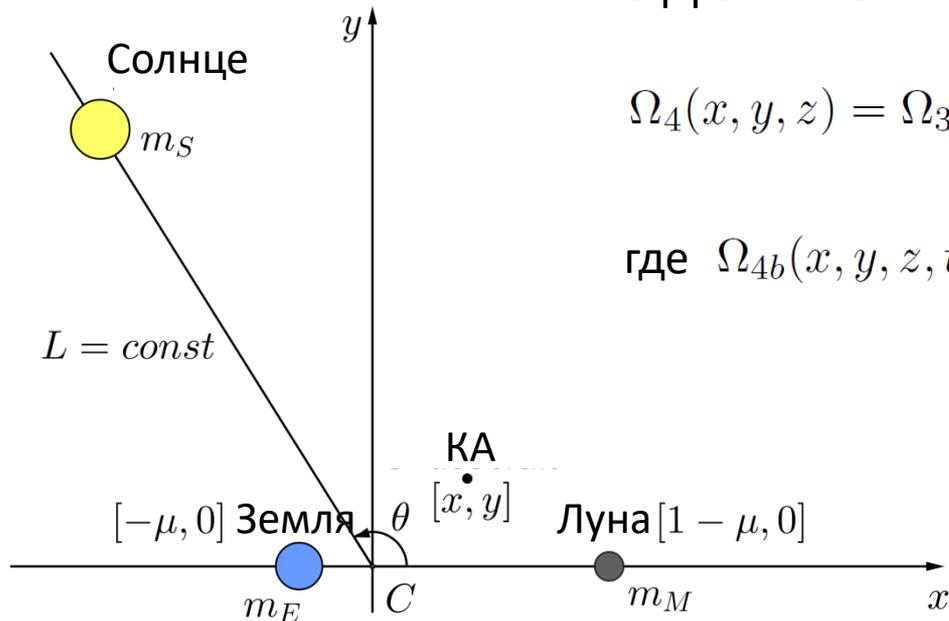
$\mu = m_M / (m_E + m_M)$ ;  $r_1$   $r_2$  — расстояния от КА до Земли и Луны

Интеграл Якоби:

$$J(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 2\Omega_3(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$



# Бикруговая ограниченная задача четырех тел (BR4BP)



Эффективный потенциал:

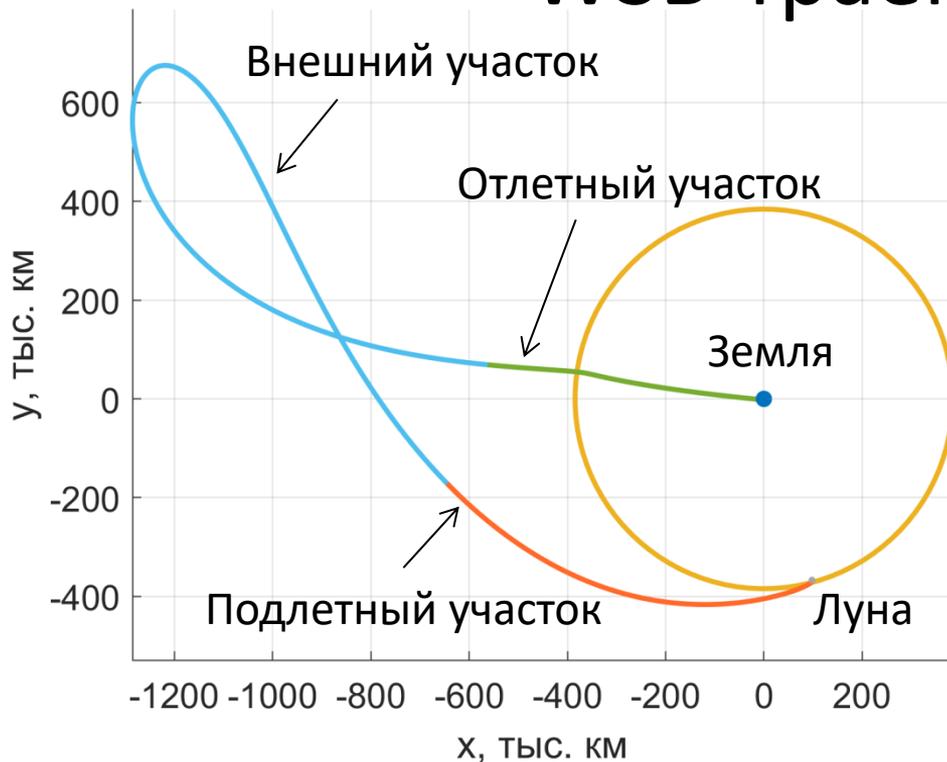
$$\Omega_4(x, y, z) = \Omega_3(x, y, z) + \Omega_{4b}(x, y, z, t)$$

где  $\Omega_{4b}(x, y, z, t) = \frac{Gm_S}{r_3(t)} - \frac{Gm_S}{L^2}(x \cos \theta(t) + y \sin \theta(t)),$

$r_3(t)$  — расстояние от КА до Солнца



# Структура проектируемых WSB-траекторий

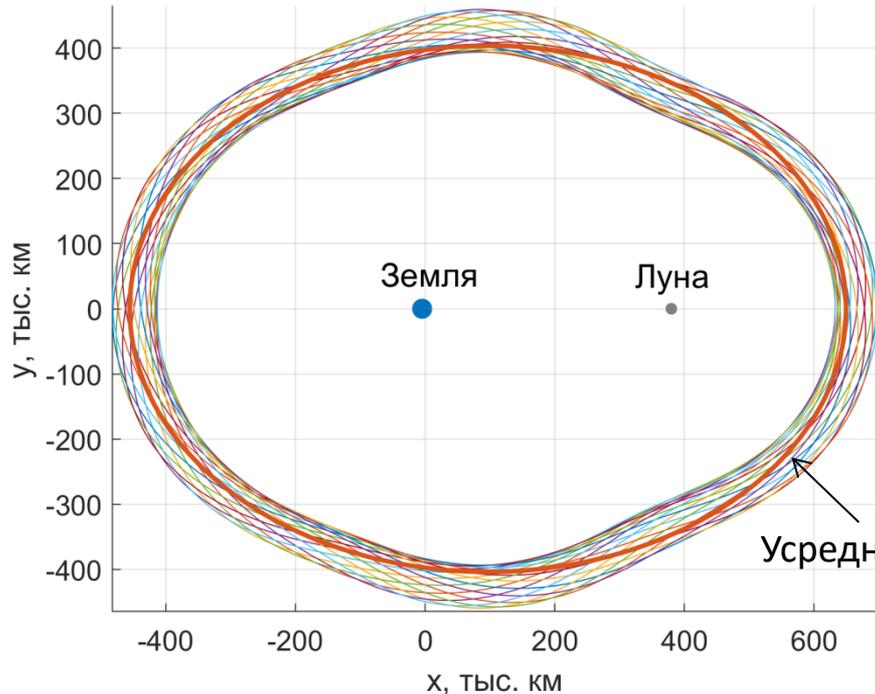


- *Отлетный и подлетный участки: CR3BP*
- *Внешний участок: BR4BP*

Пример плоской WSB-траектории



# Регион преобладания системы Земля-Луна

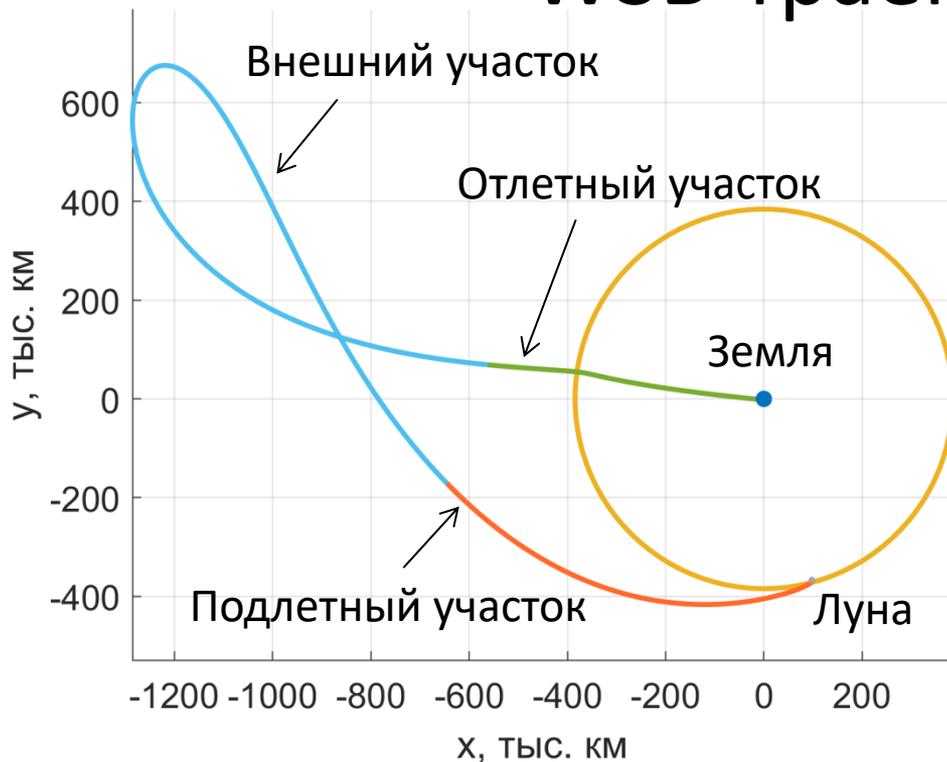


- Граница региона преобладания\*: точки конфигурационного пространства, где ошибка в правых частях уравнений движения КА будет одинаковой независимо от того влиянием какого тела, Солнца или Луны, пренебречь в системе Земля-Луна-Солнце

\* R. Castelli, "Regions of Prevalence in the Coupled Restricted Three-Body Problems Approximation," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 17, No. 2, 2012, pp. 804–816.



# Структура проектируемых WSB-траекторий

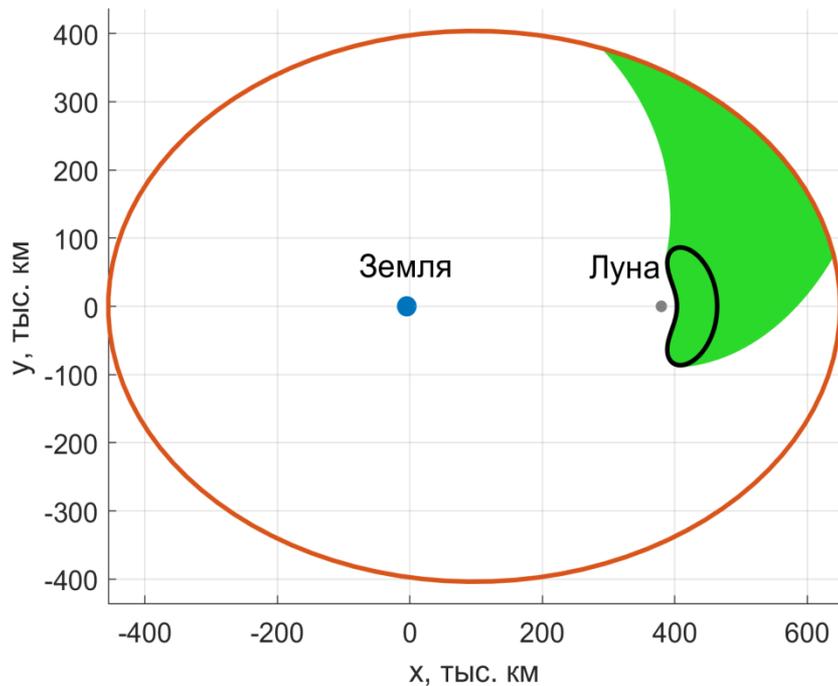


- *Отлетный и подлётный участки: CR3BP*
- *Внешний участок: BR4BP*

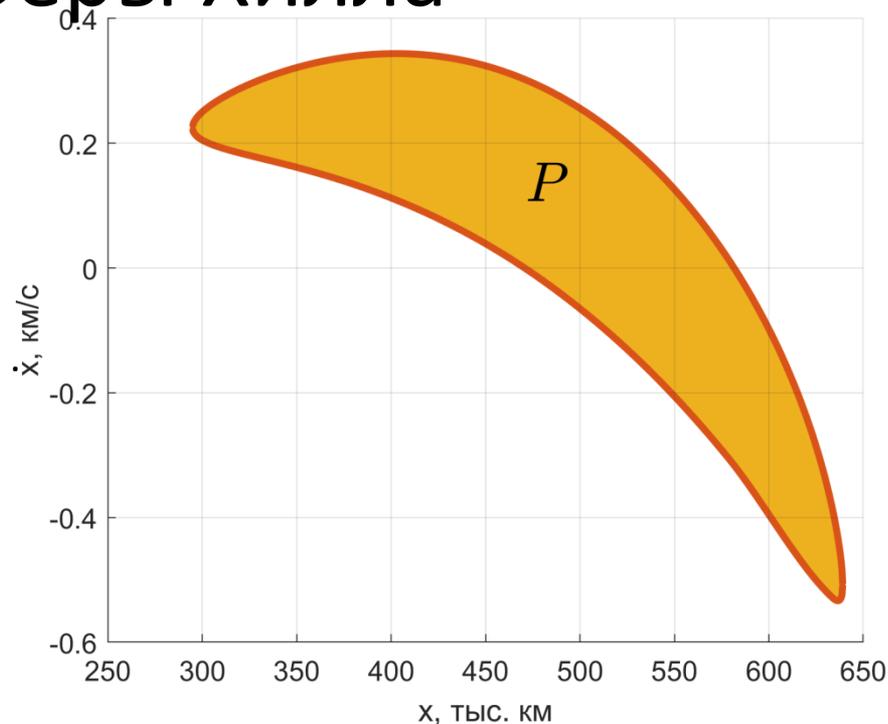
Пример плоской WSB-траектории



# Траектории, проходящие внутрь лунной сферы Хилла



Устойчивое многообразие плоской орбиты Ляпунова с  $J_{EM} = 3.06$

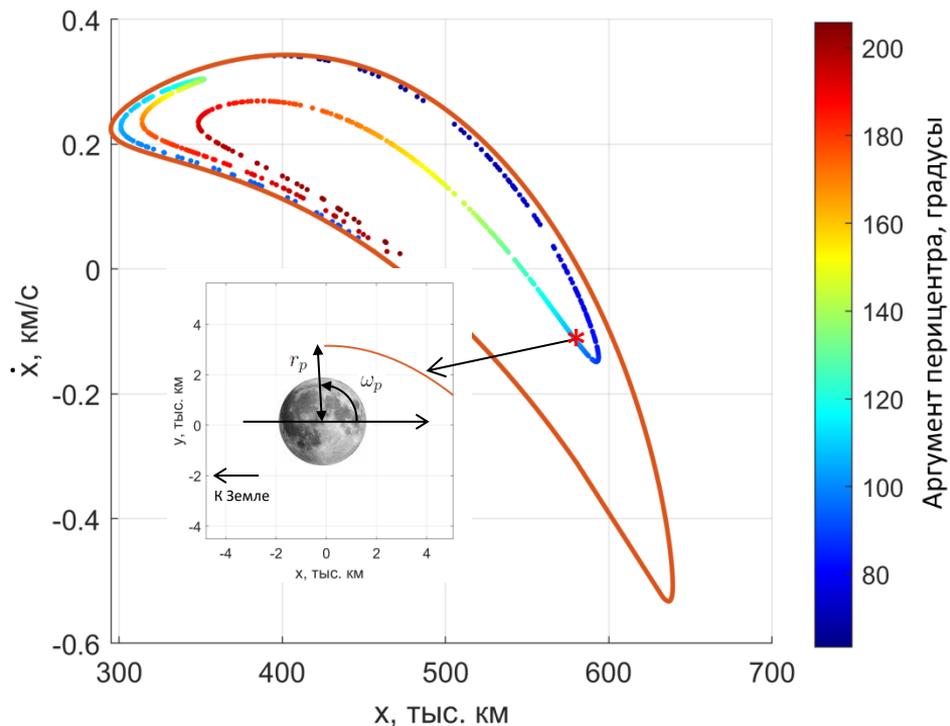


Лунный  $L_2$  «портал»  $P$  на плоскости  $(x, \dot{x})$



# Проектирование подлетного участка

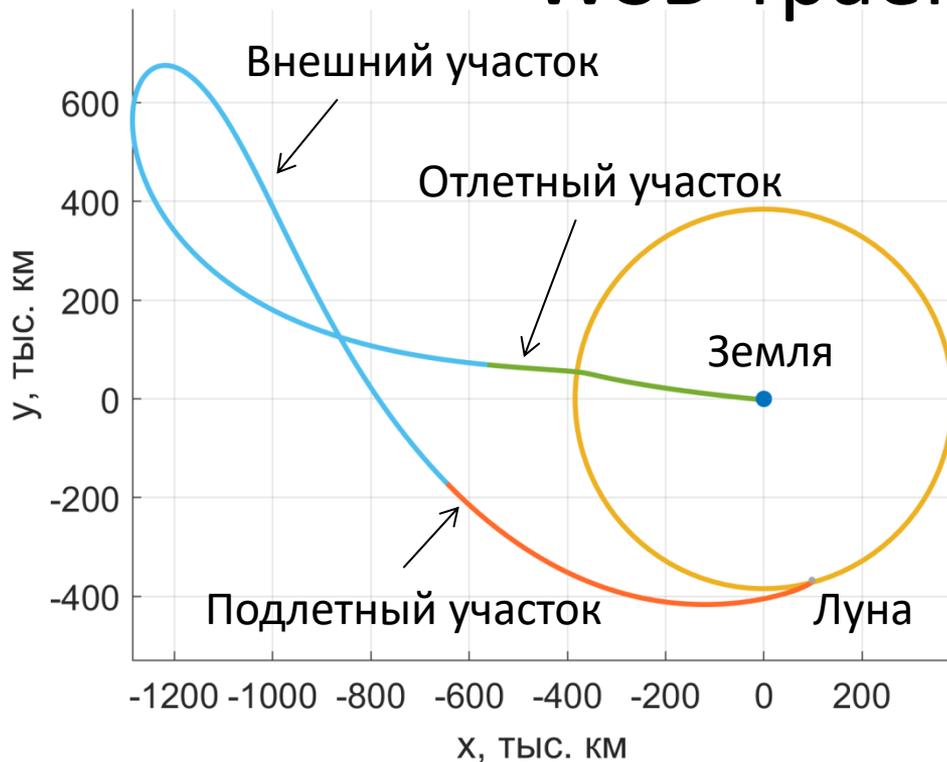
- Для любой точки  $P$  и  $[x_P, \dot{x}_P]$ ,  $\dot{y}_P$  определяется из выражения  $J(x_P, y_P, \dot{x}_P, \dot{y}_P) = J_{EM}$ ,  $y_P$  принадлежит границе региона преобладания
- $P$  схлопывается в точку при  $J_{EM} \approx 3.18$
- Необходимый LOI-импульс в перигентре может быть оценен из выражения  $\Delta J_{EM} \approx \Delta v^2 + 2v\Delta v$



Изолиния высоты перигентра 1403 км  
(соответствует NRHO 9:2)



# Структура проектируемых WSB-траекторий

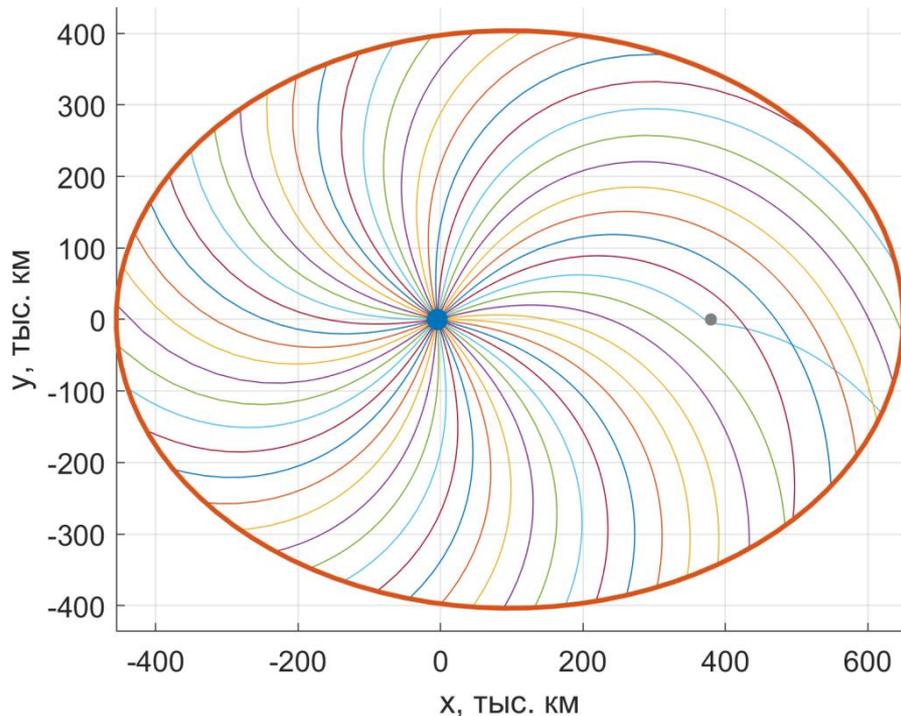


- *Отлетный и подлетный участки: CR3BP*
- *Внешний участок: BR4BP*

Пример плоской WSB-траектории



# Траектории, столкновительные с Землей



Столкновительные траектории с  $J_{EM} = 3.06$

- Преобразование Леви-Чивиты:

$$x + \mu + iy = (u + iv)^2, i^2 = -1$$

$$dt = r d\tau$$

- Уравнения движения

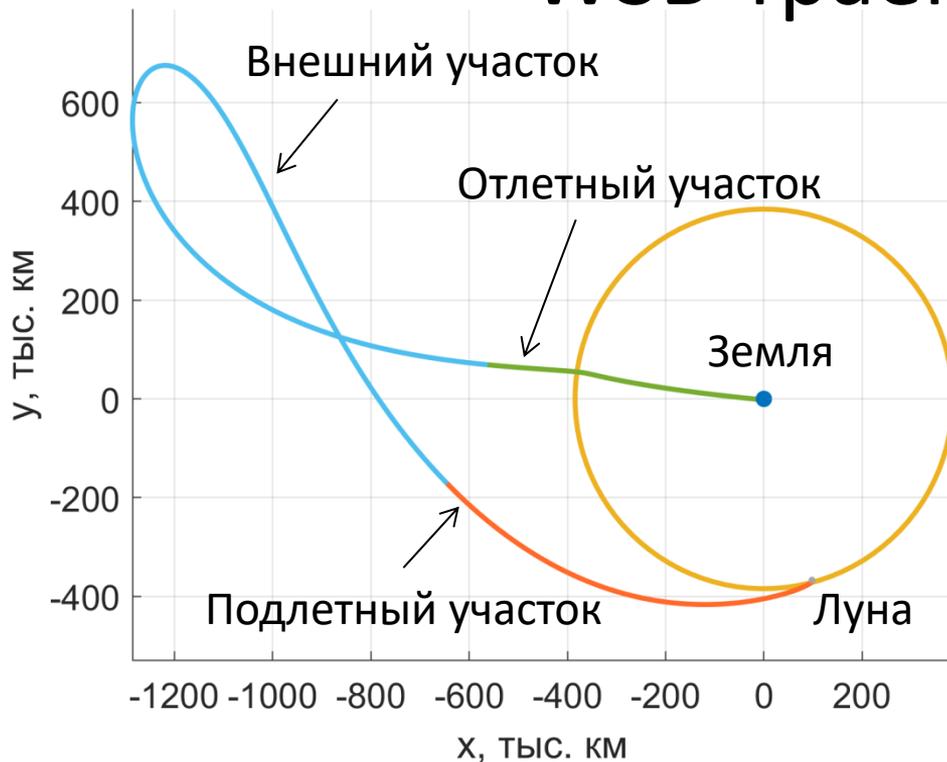
$$u'' = \frac{f_1(u, v)}{4} + 2(u^2 + v^2)v',$$

$$v'' = \frac{f_2(u, v)}{4} - 2(u^2 + v^2)u'$$

- Столкновительные траектории зависят от двух параметров: угла вылета  $\varphi$  и константы Якоби  $J_{EM}$



# Структура проектируемых WSB-траекторий

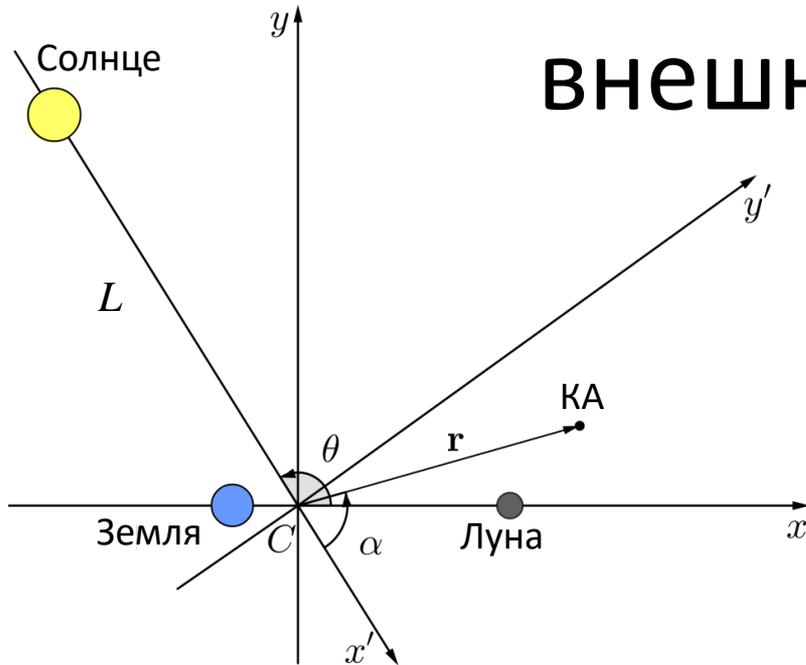


- *Отлетный и подлетный участки: CR3BP*
- *Внешний участок: BR4BP*

Пример плоской WSB-траектории



# Изменение интеграла Якоби на внешнем участке



$$J_{EM} \simeq 3(1 - \mu) + 2W_Z - 2E_2$$

$E_2, W_Z$  — кеплерова энергия и z-компонента орбитального момента КА относительно Луны

$$\Delta E_2 \rightarrow \min \Rightarrow \Delta J_{EM} \rightarrow \max \Rightarrow \Delta J_{EM} > 0$$

$$\Delta J_{EM} = -2\Delta\Omega_{4b} + 2 \int \frac{\partial\Omega_{4b}}{\partial\theta} \omega_s dt, \quad \omega_s = \frac{d\theta}{dt} < 0$$

$$\Omega_{4b} \approx \frac{Gm_S}{L} - \frac{1}{2} \frac{Gm_S}{L^3} r^2 (1 - 3 \cos^2 \alpha)$$

$$r/L \ll 1:$$

$$\frac{\partial\Omega_{4b}}{\partial\theta} \approx \frac{3}{2} \frac{Gm_S}{L^3} r^2 \sin 2\alpha,$$

 $\Rightarrow$ 

$\sin 2\alpha < 0 \quad \text{при} \quad r = r_{max}$



# Построение плоских траекторий

➤ *Переменные оптимизации:*  $J_{EM}^0, \varphi, \theta_0$

➤ *В граничной точке*  $\mathbf{x}_p = [x_p, y_p, \dot{x}_p, \dot{y}_p]$ :

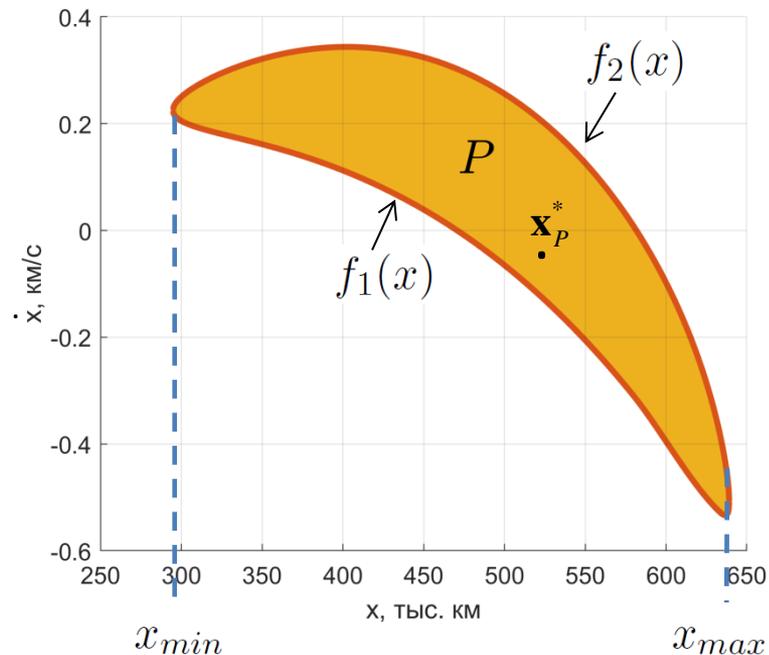
$$f_1(x_p) \leq \dot{x}_p \leq f_2(x_p), \quad x_{min} \leq x_p \leq x_{max}, \quad y_p > 0,$$

$$J_{EM}(\mathbf{x}_p) = J_{EM}^f,$$

$$t_p = t^*,$$

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p^*$$

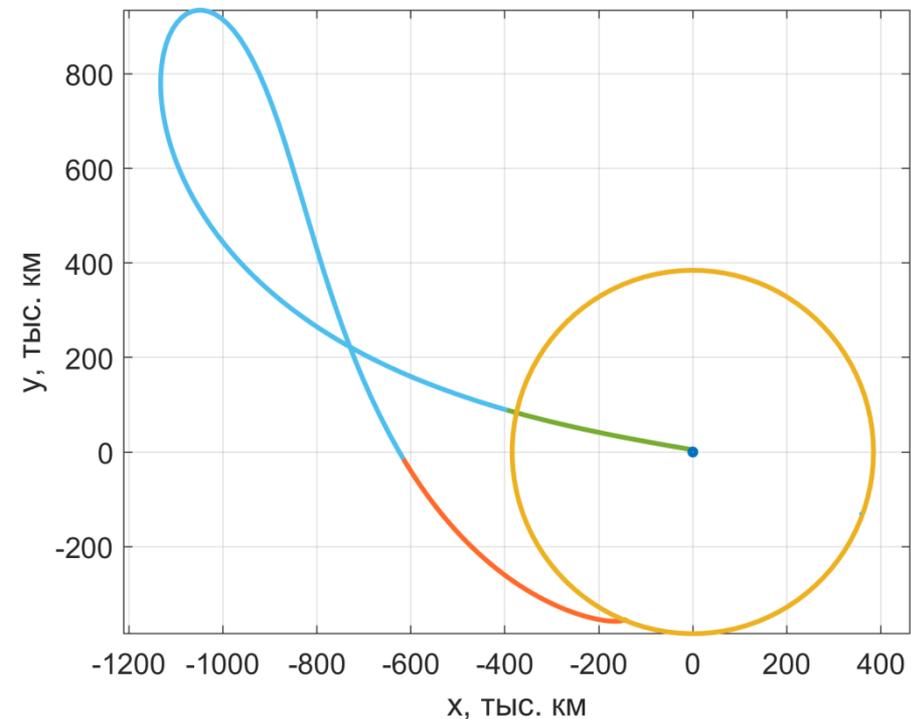
➤ *Апогей траектории должен находиться во II или IV квадранте системы  $Cx'y'$*



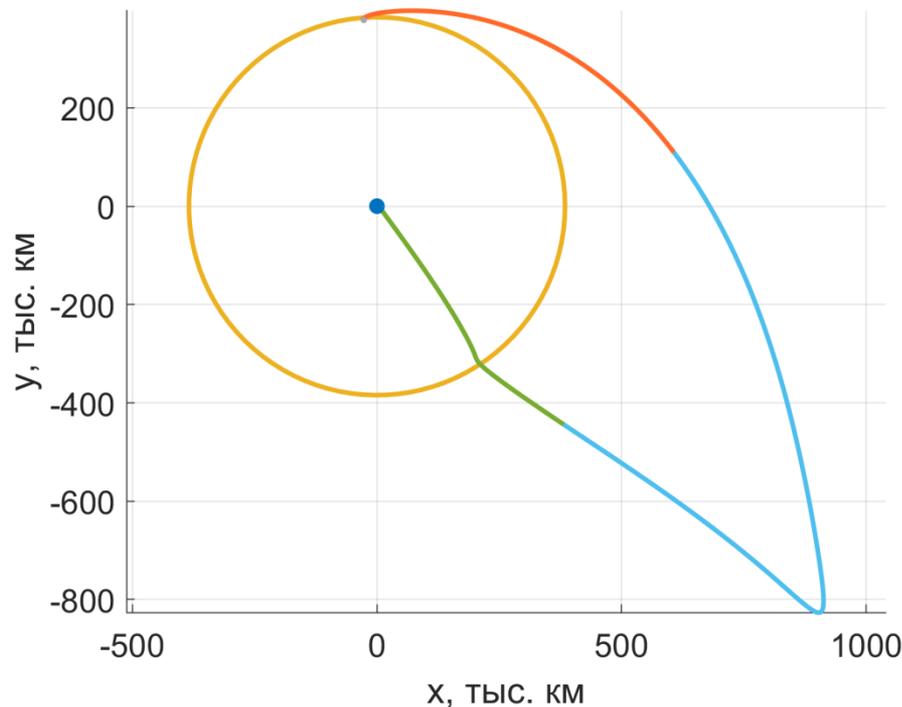
Портал  $P$ ,  
соответствующий  $J_{EM}^f$



# Примеры плоских WSB-траекторий



$J_{EM}^f = 3.06$ ,  $r_p = 3141$  km,  $\omega_p = 119^\circ$ , время полета 87 дней



$J_{EM}^f = 3.06$ ,  $r_p = 3141$  km,  $\omega_p = 92^\circ$ , время полета 74 дня

➤ Траектории получены в программе MATLAB (fmincon solver, опция sqp)

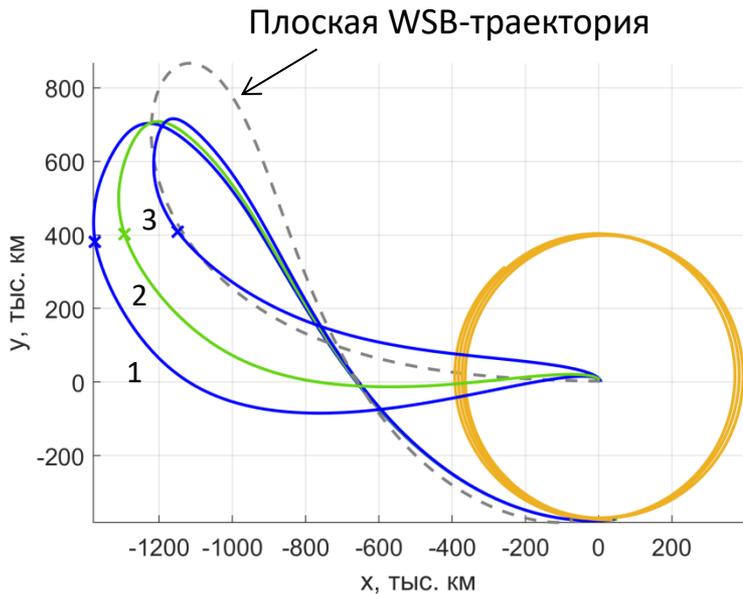


# Адаптация к эфемеридной модели

- *Высокоточная модель:* центральные гравитационные поля Земли и Луны, гравитационные возмущения от Солнца и планет Солнечной системы, давление солнечного излучения, гармоника GRGM1200A (8x8) для гравитационного ускорения Луны, эфемериды JPL DE430
- *Метод адаптации:* параллельная пристрелка
- *Переменные оптимизации:*
  - эпохи и векторы состояния КА,
  - финальный LOI-импульс,
  - маневр коррекции траектории (TCM -маневр)
- *Целевая функция:*
$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_{LOI}^2 + \Delta V_{TCM}^2 \rightarrow \min$$
- *Ограничения* включают требования на
  - высоту, наклонение и эксцентриситет стартовой околоземной орбиты,
  - время старта,
  - величину отлетного импульса ( $\leq 3.2$  км/с),
  - гладкость сшивки фазового вектора в узлах метода,
  - условия выхода на целевую орбиту.
- *Получение окна старта:* продолжение по дате старта



# WSB-траектории в эфемеридной модели



Перелет с круговой орбиты  $h = 200$  км,  
 $i = 51.6^\circ$  на южную NRHO 9:2

Окно старта определяется как  $\Delta V_\Sigma \leq 100$  м/с

1: открытие окна старта,  
 $\Delta V_\Sigma = 32.876$  (TCM) +  $67.176$  (LOI) =  $100.052$  м/с,  
дата старта 13 апреля, 2028, 12:00

2: оптимальная траектория,  
 $\Delta V_\Sigma = 9.980$  (TCM) +  $66.734$  (LOI) =  $76.714$  м/с,  
дата старта 20 апреля, 2028, 7:00

3: закрытие окна старта,  
 $\Delta V_\Sigma = 33.937$  (TCM) +  $66.096$  (LOI) =  $100.034$  м/с,  
дата старта 28 апреля, 2028, 4:00

Время прибытия фиксировано: 29.07.2028, 08:13:29

- Траектории получены в программе MATLAB (`fmincon` solver, опция `sqr`)
- Сходимость с начального приближения ~ 40 мин; шаг метода продолжения в 1 час по дате старта  $\leq 10$  с



# Заключение

- С использованием представленных геометрических и аналитических инструментов получены плоские WSB-траектории перелета в модели BR4BP, соответствующие различным датам старта и времени перелета
- Адаптация плоских траекторий к эфемеридной модели продемонстрирована на примере перелета с космодрома Байконур на южную NRHO 9:2 для даты старта в апреле 2028 года. Сходимость с плоского начального приближения составляет не более 40 мин
- Семейство WSB-траекторий для окна старта с  $\Delta V_{\Sigma} \leq 100$  м/с получено методом продолжения по времени старта с шагом в 1 час. Один шаг метода продолжения составил около 10 с