



XLVI Академические чтения по космонавтике
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 25—28 января 2022 г.



Проектирование низкоэнергетических перелетов к Луне с промежуточным лунным гравитационным маневром

Целоусова А.А.

Трофимов С.П.

Широбоков М.Г.

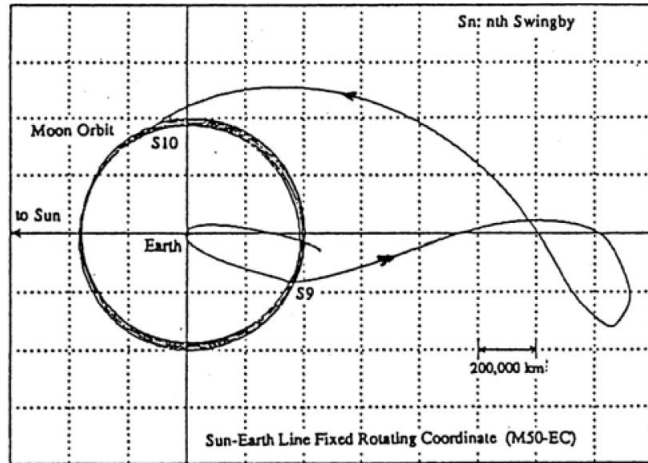
Перепухов Д.Г.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН

Низкоэнергетические WSB-траектории

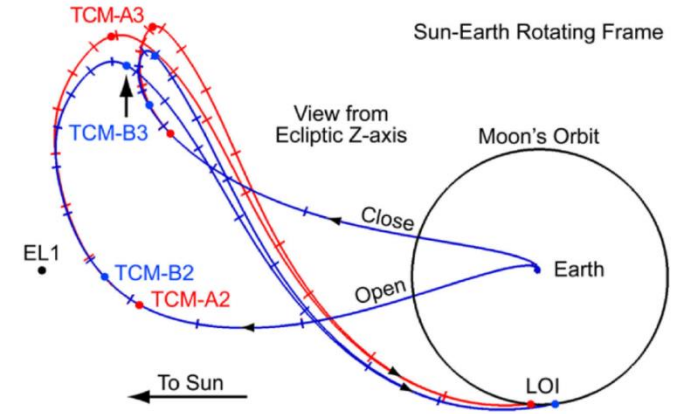
По сравнению с высокоэнергетическими перелетами:

- более низкая стоимость
- расширенные окна старта
- увеличенное время перелета



Миссия Hiten (1991)

Credit: Nishimura T., Kawaguchi J. On the Guidance and Navigation of Japanese Spacecraft "HITEN". – 1993

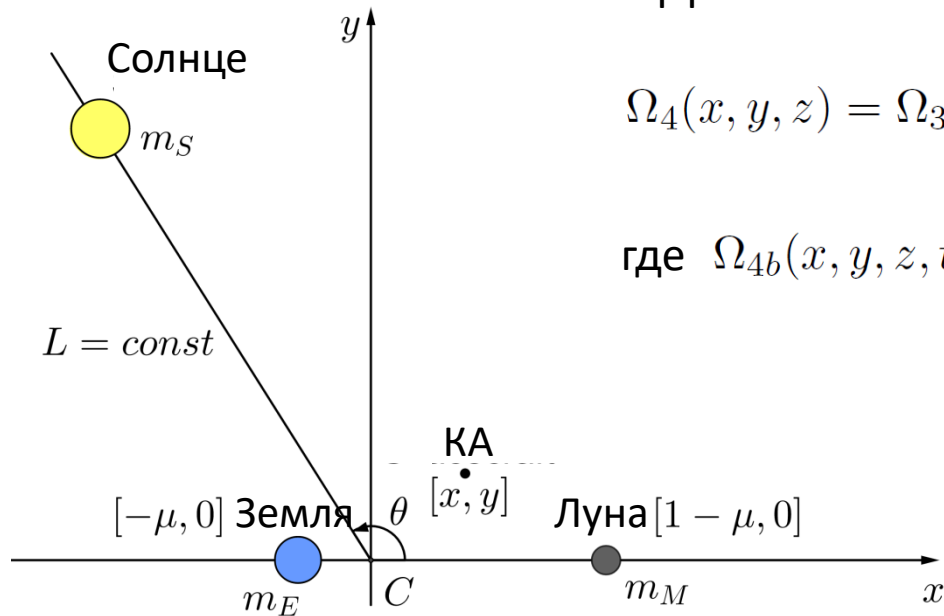


GRAIL (2011)

Credit: Anderson R. L., Parker J. S. Targeting low-energy transfers to low lunar orbit. – 2011

- Гравитационный маневр
- снижает величину отлетного импульса
- может использоваться для поворота плоскости траектории

Бикруговая ограниченная задача четырёх тел



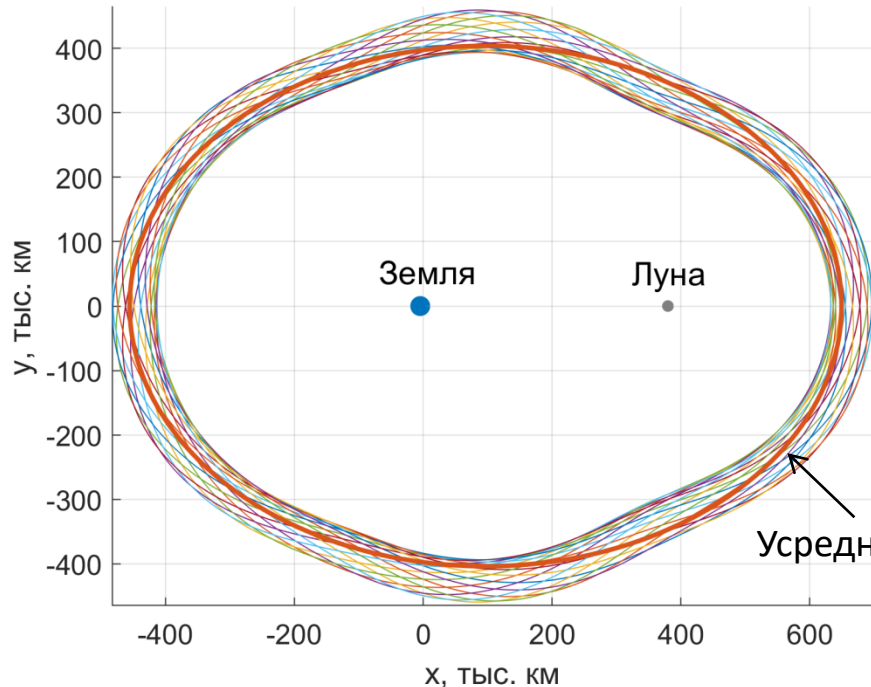
Эффективный потенциал:

$$\Omega_4(x, y, z) = \Omega_3(x, y, z) + \Omega_{4b}(x, y, z, t)$$

где $\Omega_{4b}(x, y, z, t) = \frac{Gm_S}{r_3(t)} - \frac{Gm_S}{L^2}(x \cos \theta(t) + y \sin \theta(t)),$

$r_3(t)$ — расстояние от КА до Солнца

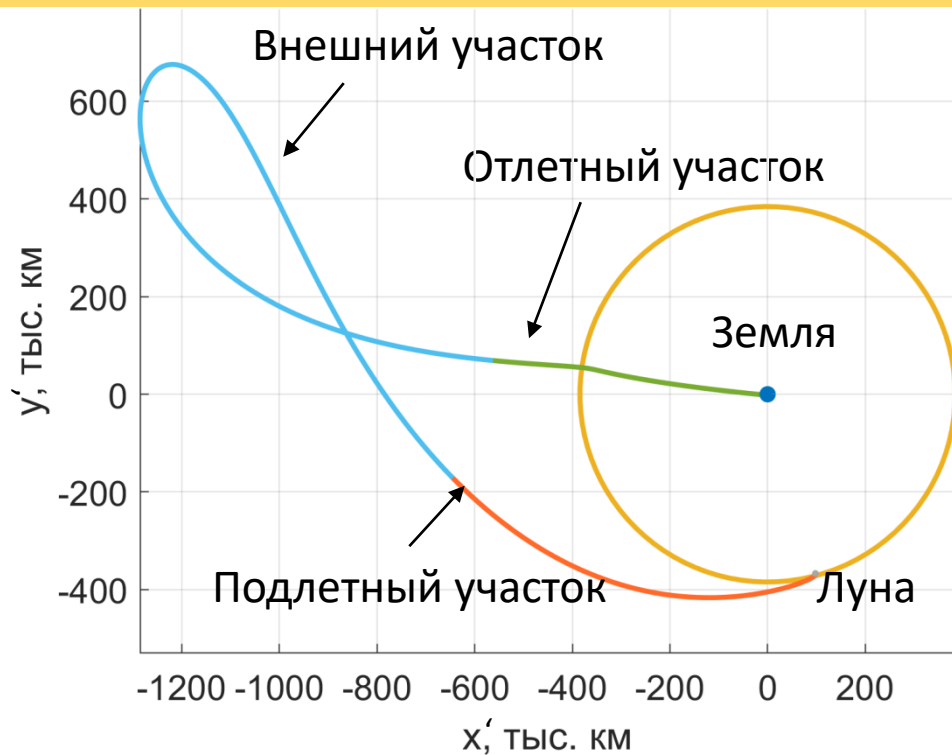
Область преобладания системы Земля-Луна



- Граница области преобладания*: точки конфигурационного пространства, где ошибка в правых частях уравнений движения КА будет одинаковой независимо от того влиянием какого тела, Солнца или Луны, пренебречь в системе Земля-Луна-Солнце

* R. Castelli, "Regions of Prevalence in the Coupled Restricted Three-Body Problems Approximation," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 17, No. 2, 2012, pp. 804–816.

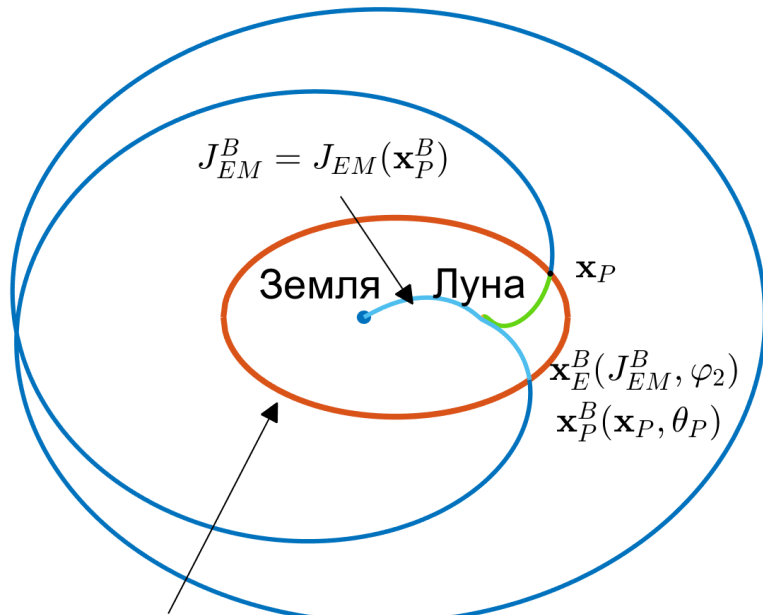
Структура WSB-траекторий



Пример плоской WSB-траектории

- *Отлетный и подлетный участки (внутри области преобладания):* круговая ограниченная задача трех тел Земля-Луна-КА
- *Внешний участок (вне области преобладания):* бикруговая ограниченная задача четырех тел Земля-Луна-Солнце-КА

Проектирование плоских WSB-траекторий



Граница области преобладания

➤ Этап #1:

Для заданных x_P и θ_P :

$$F(\varphi) = |x_E^B(\varphi) - x_P^B| = 0$$

➤ Этап #2:

Адаптация к бикруговой модели методом параллельной пристрелки

Start: околоземная орбита высотой 200 км

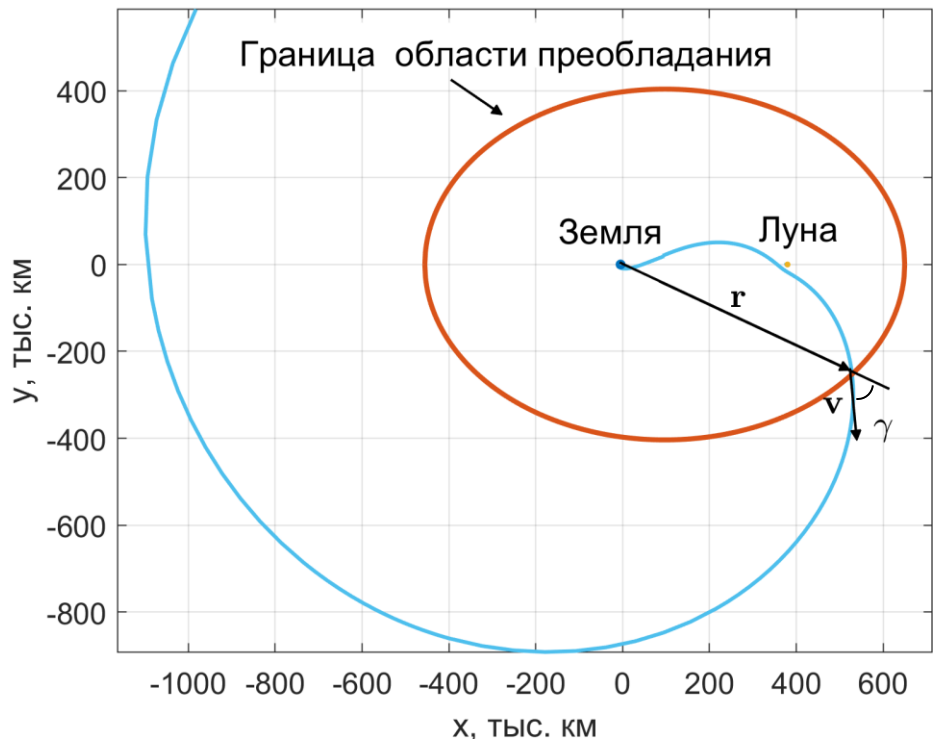
End: окололунная орбита с $J_{EM} = 3.06$

и $h_p = 1403$ км

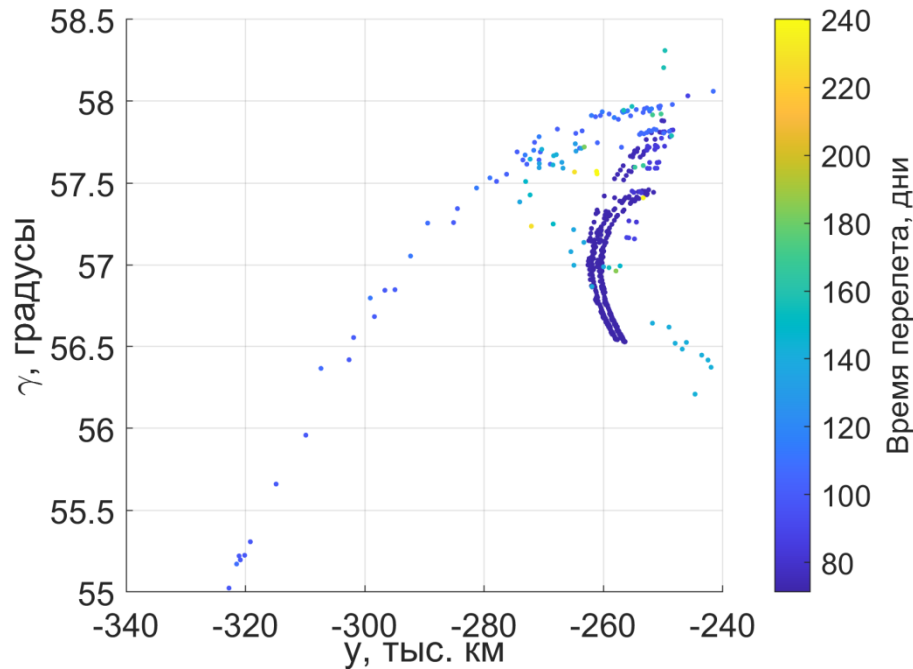
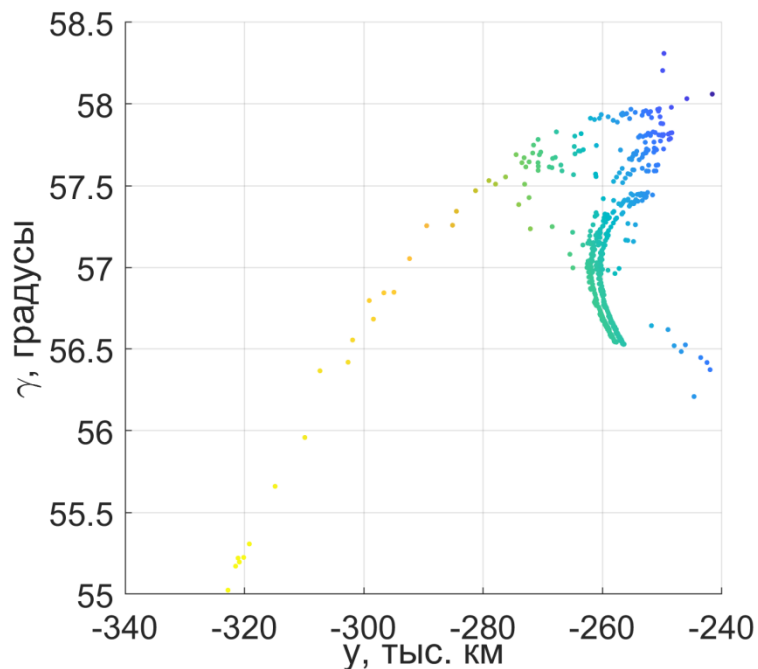
$$\Delta V_{TLI} \leq 3.2 \text{ km/s,}$$

$$\Delta V_{TCM}^2 + \Delta V_{LOI}^2 \rightarrow \min$$

Параметры WSB-траектории на выходе из области преобладания: y и γ

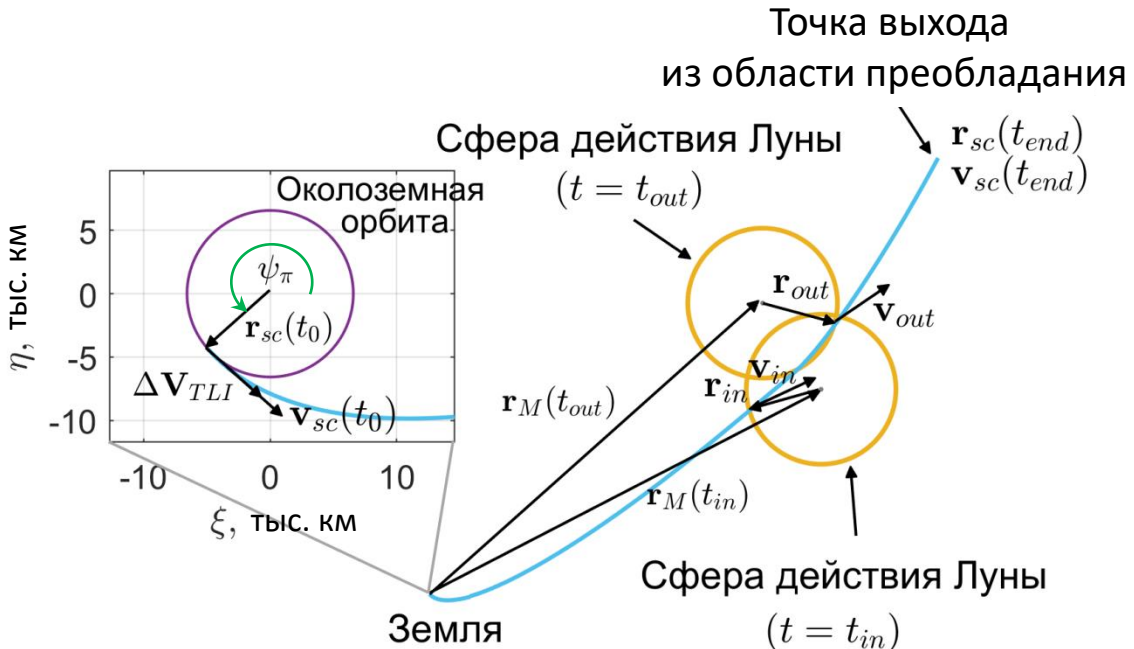


WSB-траектории с промежуточным лунным гравитационным маневром

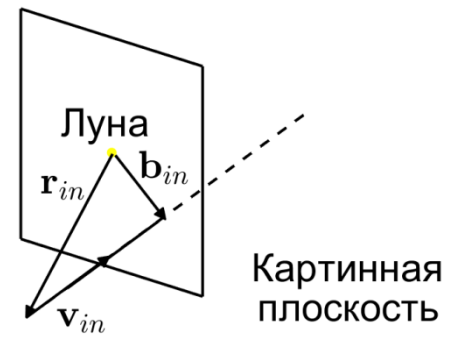


Плоские WSB траектории перелета с гравитационным маневром с околоземной орбиты высотой 200 км на околослунную орбиту с $J = 3.06$ и высотой периселения 1403 км

Проектирование промежуточного лунного гравитационного маневра

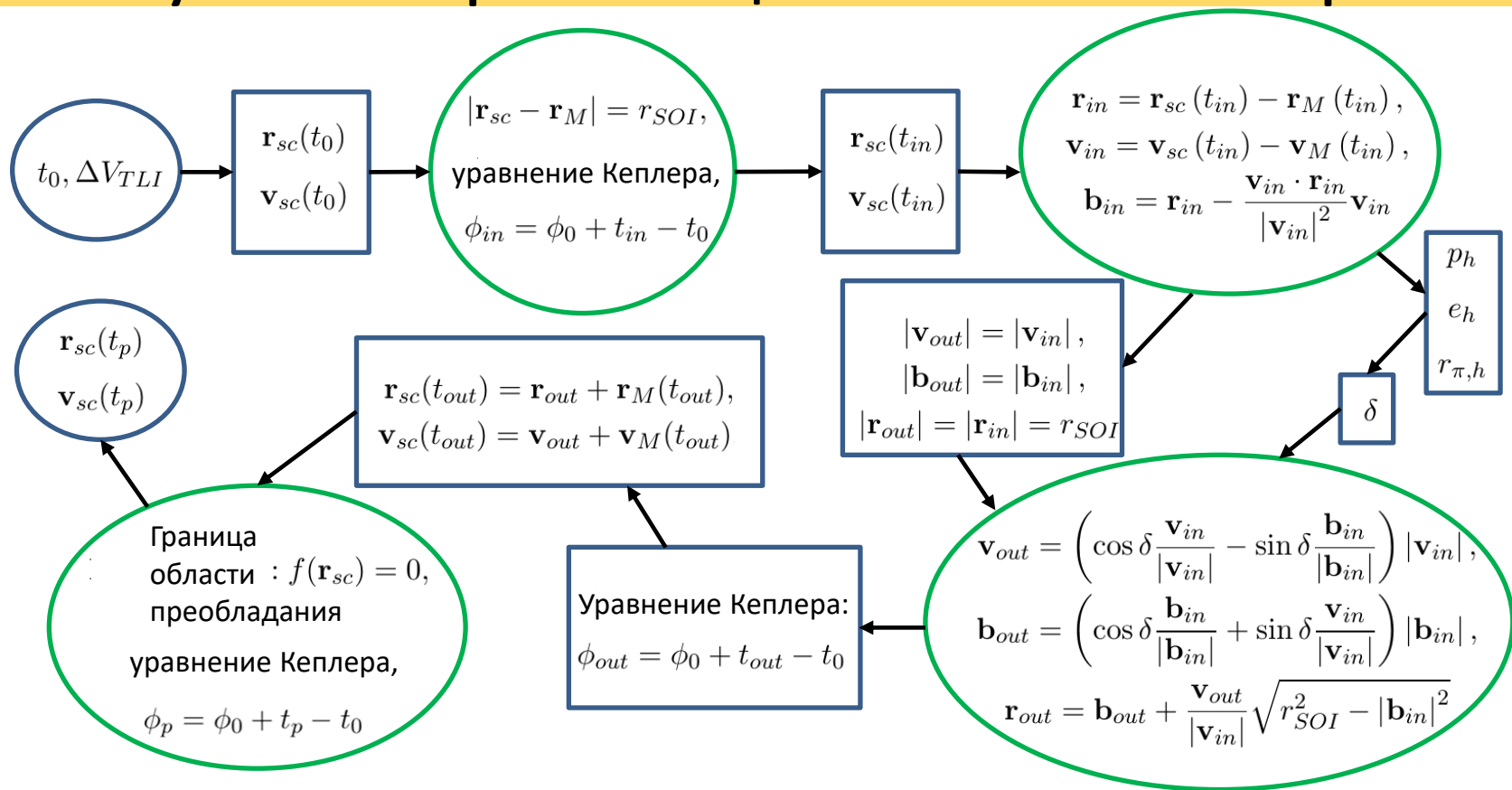


Картинная плоскость используется для расчета параметров гравитационного маневра

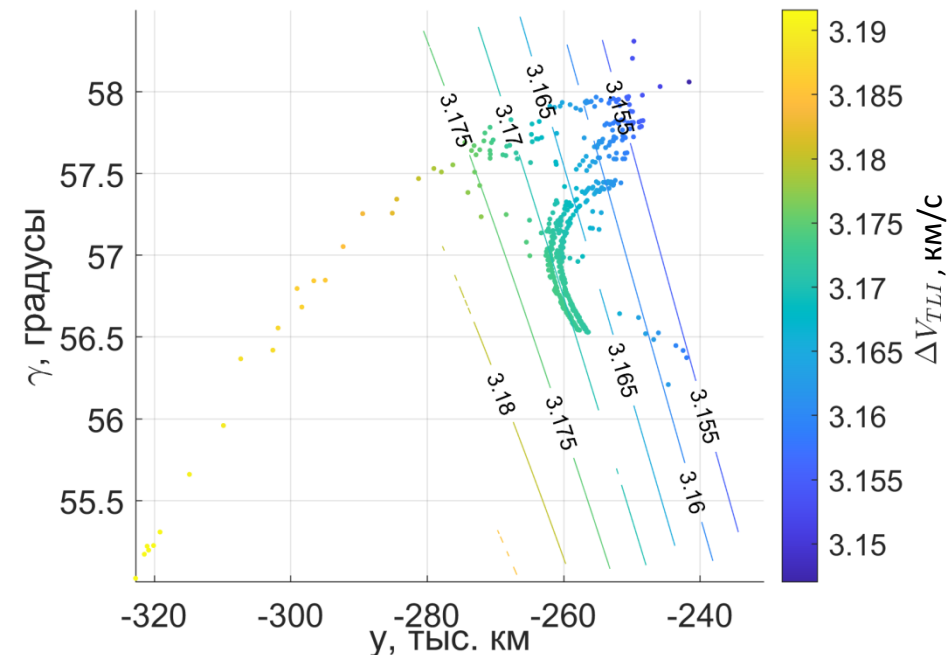


Отлетный участок в инерциальной системе отсчета

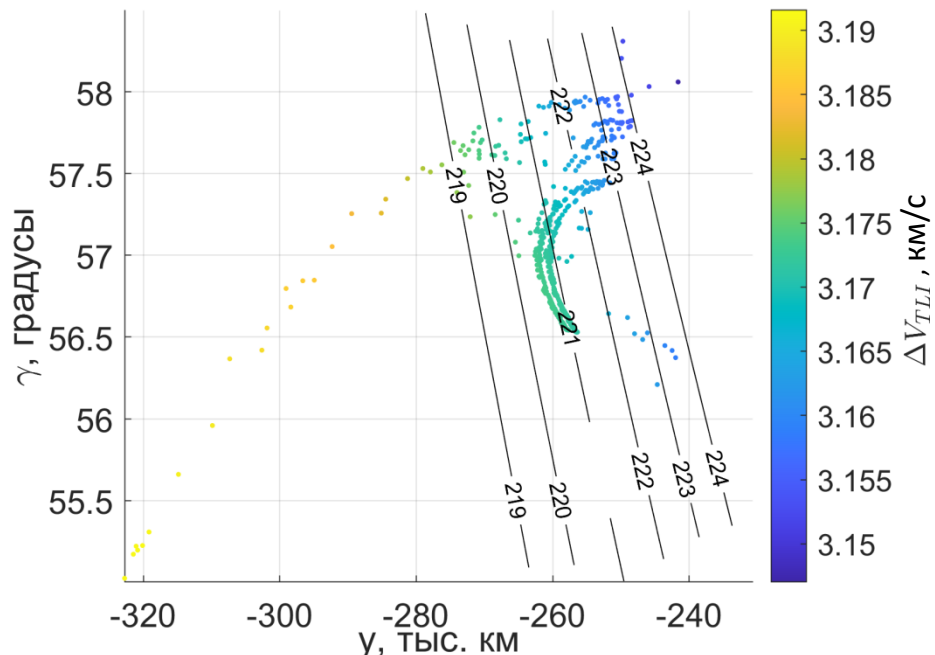
Алгоритм расчета параметров лунного гравитационного маневра



Изолинии параметров отлетного импульса на плоскости (y, γ)

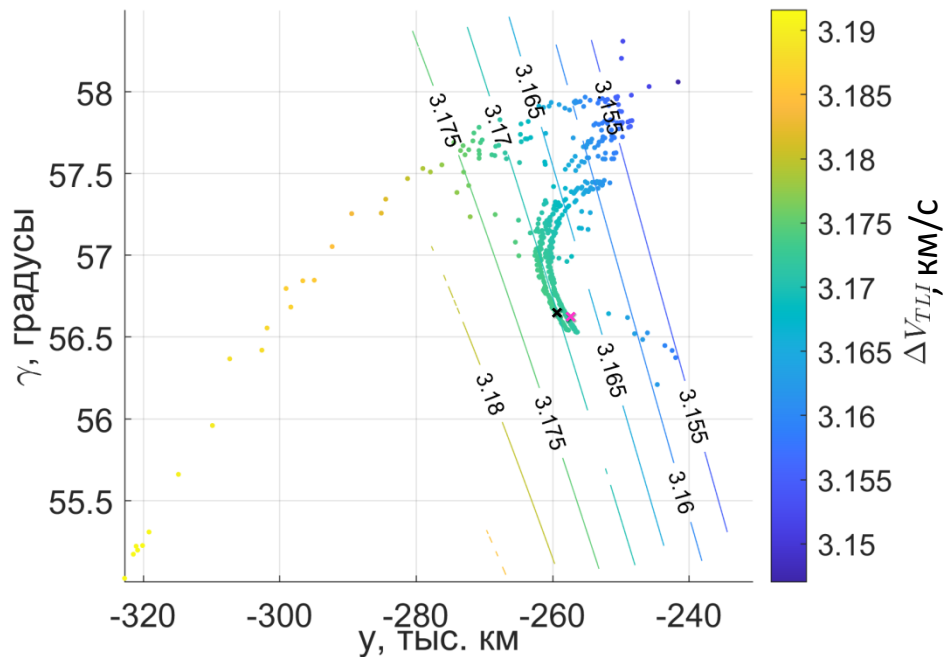


Изолинии величины
отлетного импульса

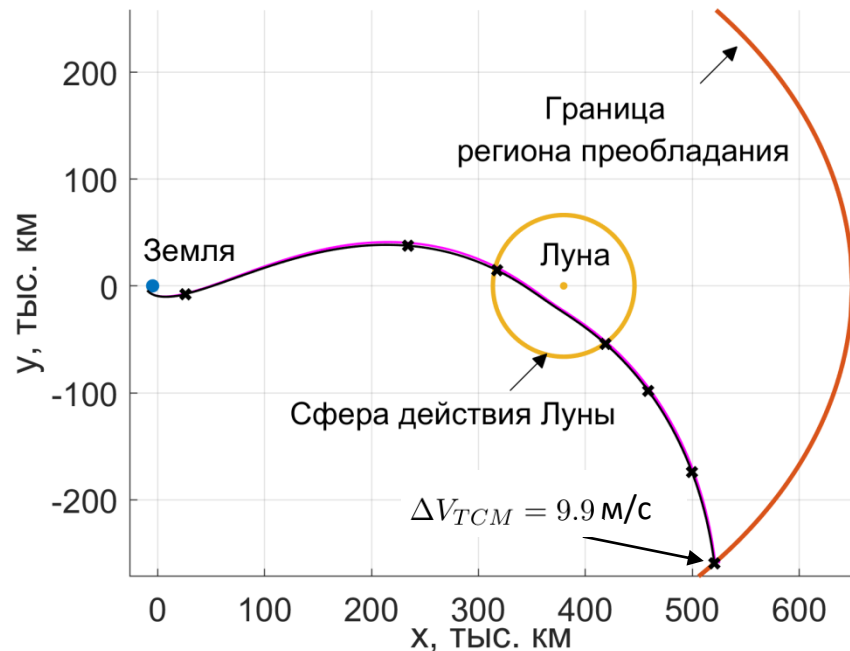


Изолинии точки приложения
отлетного импульса

Нацеливание в плоскости (y, γ)



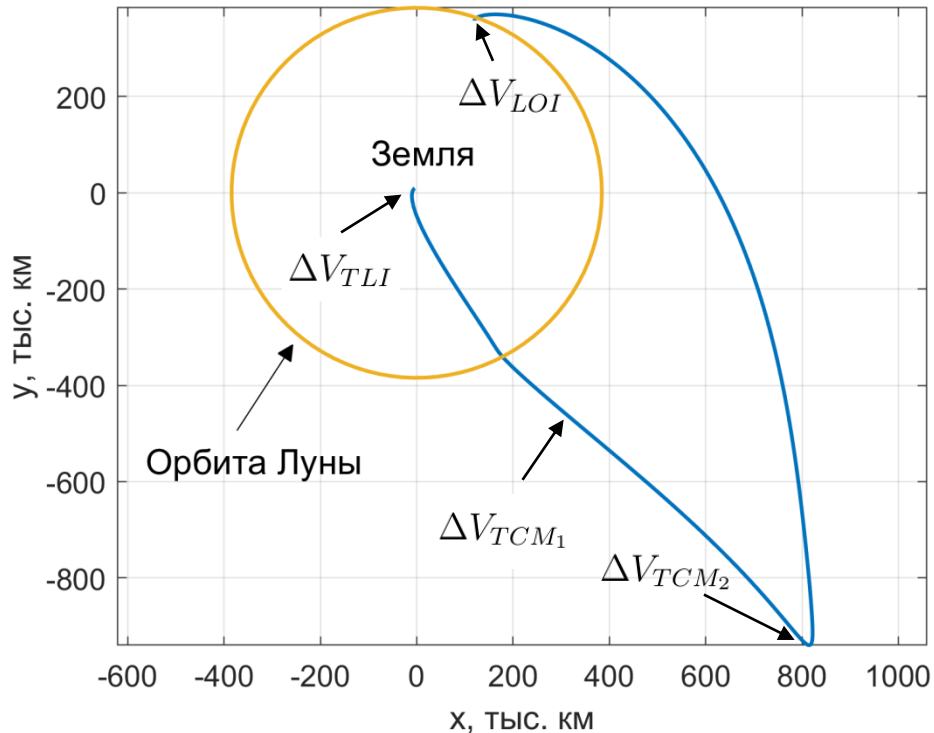
Целевая точка (черный) и точка после интегрирования в бикруговой модели (розовый)



После адаптации: $\psi_{\pi} = 220.9^{\circ} \rightarrow \psi_{\pi} = 220.1^{\circ}$,

$\Delta V_{TLI} = 3.17 \text{ км/с} \rightarrow \Delta V_{TLI} = 3.174 \text{ км/с}$ 12

Пример WSB-траектории перелета с промежуточным гравитационным маневром



Время перелета: 72.3 дня

$$\Delta V_{TLI} = 3.174 \text{ км/с}$$

$$\Delta V_{TCM_1} = 9.9 \text{ м/с}$$

$$\Delta V_{TCM_2} = 6.3 \text{ м/с}$$

$$\Delta V_{LOI} = 3.04 \text{ м/с}$$

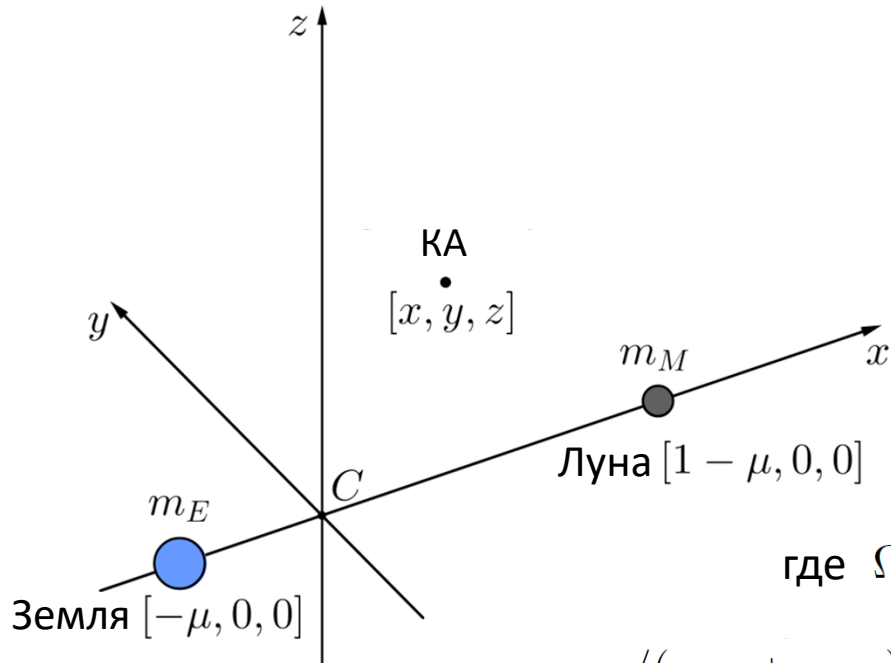
Заключение

- Разработан аналитический алгоритм расчета параметров отлетного импульса, обеспечивающих промежуточный лунный гравитационный маневр для WSB-траекторий перелета
- Алгоритм основан на использовании модели сопряженных конических сечений и картинной плоскости
- Использование изолиний дает простую визуальную оценку необходимых параметров отлетного импульса (величина и точка приложения)
- Отлетные параметры уточняются при адаптации траектории к более сложным динамическим моделям (бикруговой, эфемеридной) с помощью метода параллельной пристрелки
- Для сходимости требуется порядка десятка итераций длительностью не более нескольких секунд и введение небольших корректирующих импульсов (< 10 м/с)

Backup



Круговая ограниченная задача трех тел



Уравнения движения:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x},$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial y},$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial z}$$

где $\Omega_3(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2},$

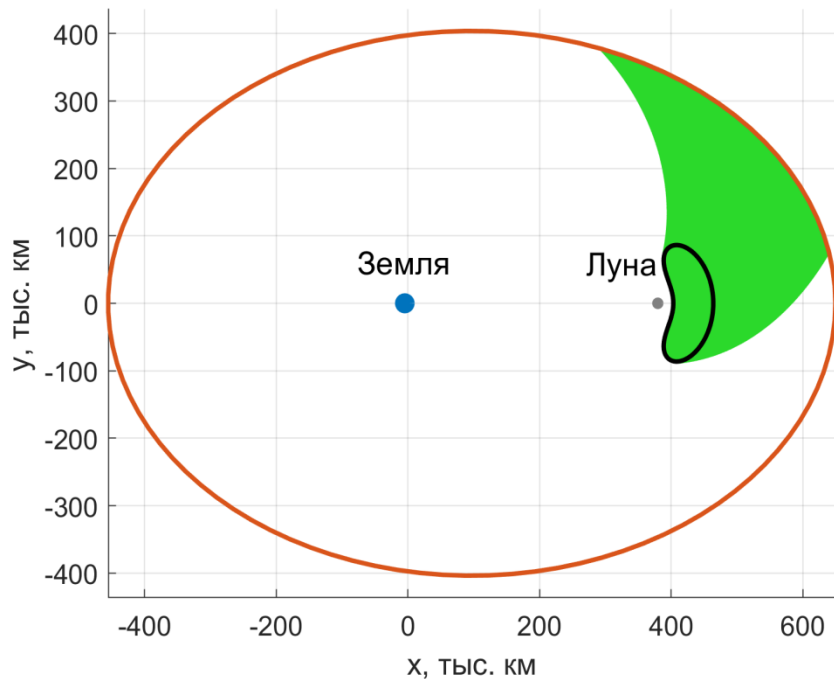
$\mu = m_M / (m_E + m_M)$; r_1, r_2 — расстояния от КА до Земли и Луны

Интеграл Якоби:

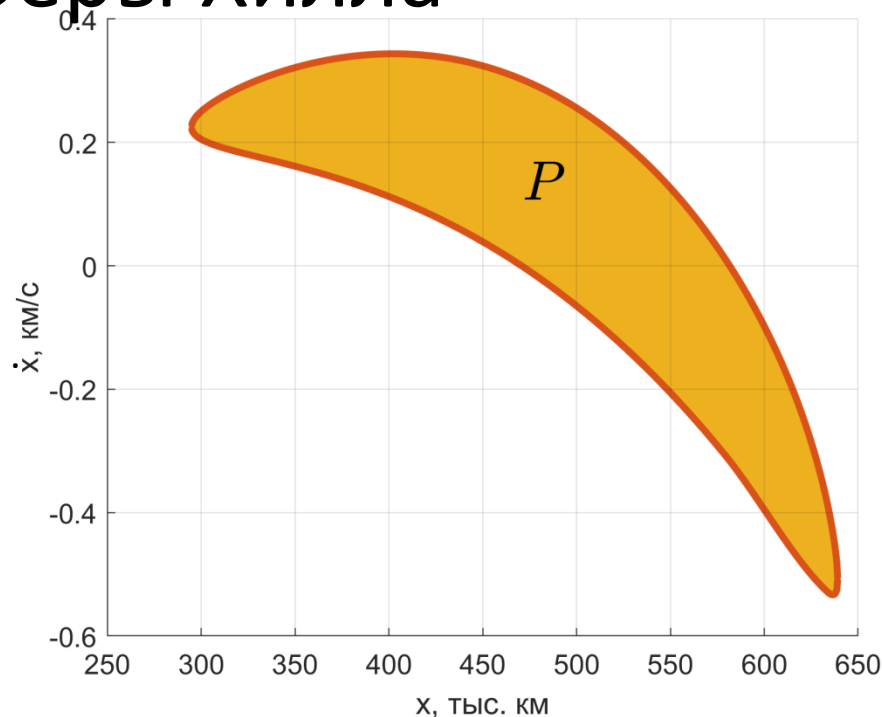
$$J(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 2\Omega_3(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$



Траектории, проходящие внутрь лунной сферы Хилла



Устойчивое многообразие плоской орбиты Ляпунова с $J_{EM} = 3.06$

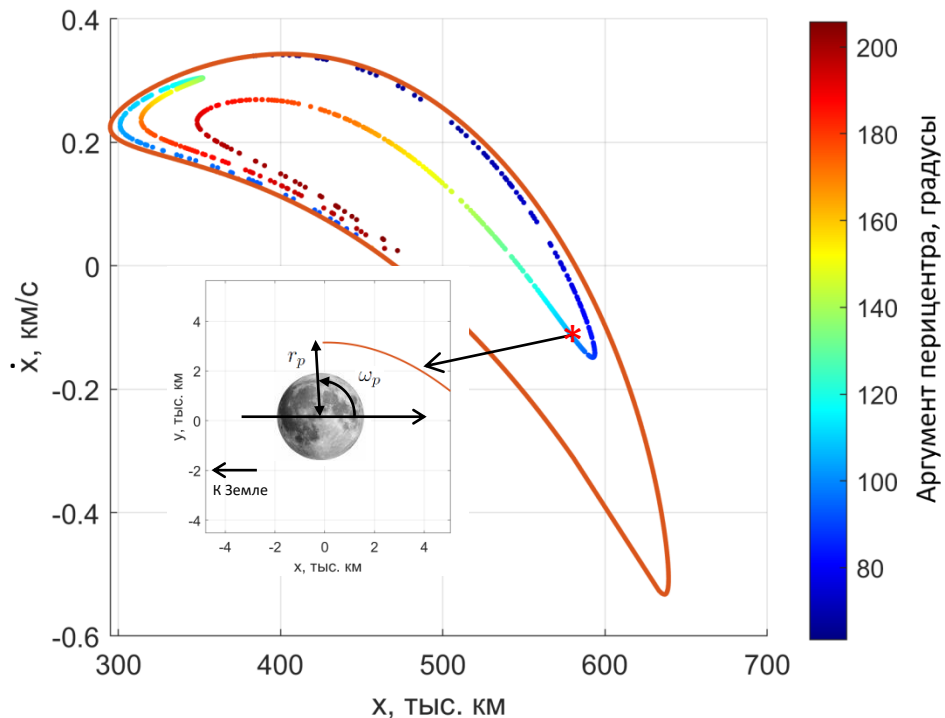


Лунный L_2 «портал» P на плоскости (x, \dot{x})



Проектирование подлетного участка

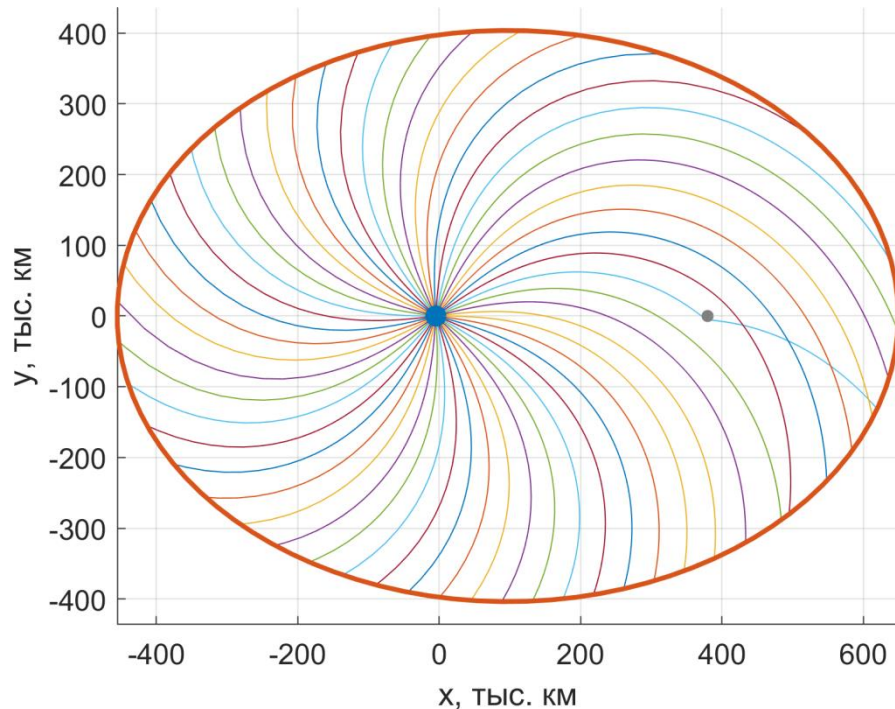
- Для любой точки P и $[x_P, \dot{x}_P]$, \dot{y}_P определяется из выражения $J(x_P, y_P, \dot{x}_P, \dot{y}_P) = J_{EM}$, y_P принадлежит границе региона преобладания
- P схлопывается в точку при $J_{EM} \approx 3.18$
- Необходимый LOI-импульс в перицентре может быть оценен из выражения $\Delta J_{EM} \approx \Delta v^2 + 2v\Delta v$



Изолиния высоты перицентра 1403 км
(соответствует NRHO 9:2)



Траектории, столкновительные с Землей



Столкновительные траектории с $J_{EM} = 3.06$

- Преобразование Леви-Чивиты:

$$x + \mu + iy = (u + iv)^2, i^2 = -1$$

$$dt = r d\tau$$

- Уравнения движения

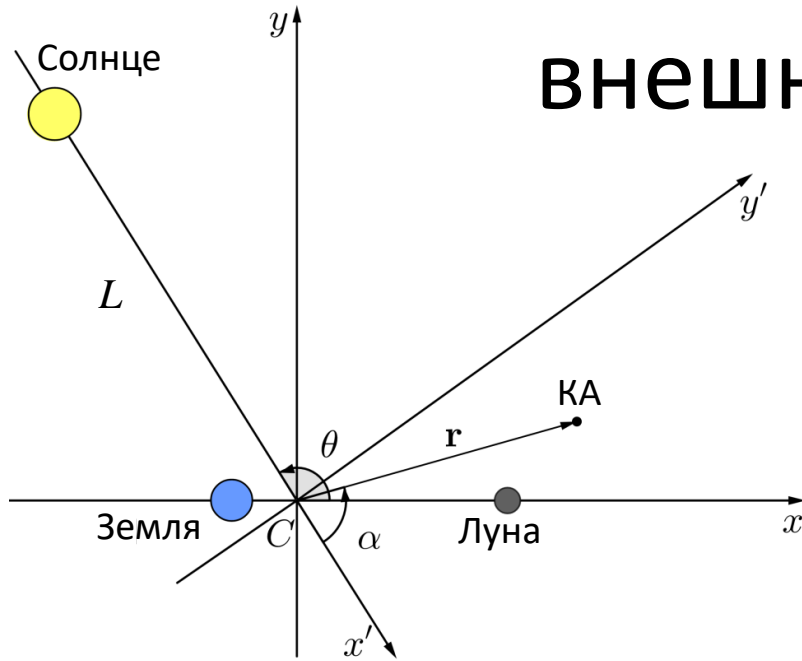
$$u'' = \frac{f_1(u, v)}{4} + 2(u^2 + v^2)v',$$

$$v'' = \frac{f_2(u, v)}{4} - 2(u^2 + v^2)u'$$

- Столкновительные траектории зависят от двух параметров: угла вылета φ и константы Якоби J_{EM}



Изменение интеграла Якоби на внешнем участке



$$J_{EM} \simeq 3(1 - \mu) + 2W_Z - 2E_2$$

E_2, W_Z — кеплерова энергия и z-компонента орбитального момента КА относительно Луны

$$\Delta E_2 \rightarrow \min \Rightarrow \Delta J_{EM} \rightarrow \max \Rightarrow \Delta J_{EM} > 0$$

$$\Delta J_{EM} = -2\Delta\Omega_{4b} + 2 \int \frac{\partial\Omega_{4b}}{\partial\theta} \omega_s dt, \quad \omega_s = \frac{d\theta}{dt} < 0$$

$$\Omega_{4b} \approx \frac{Gm_S}{L} - \frac{1}{2} \frac{Gm_S}{L^3} r^2 (1 - 3 \cos^2 \alpha)$$

$$r/L \ll 1:$$

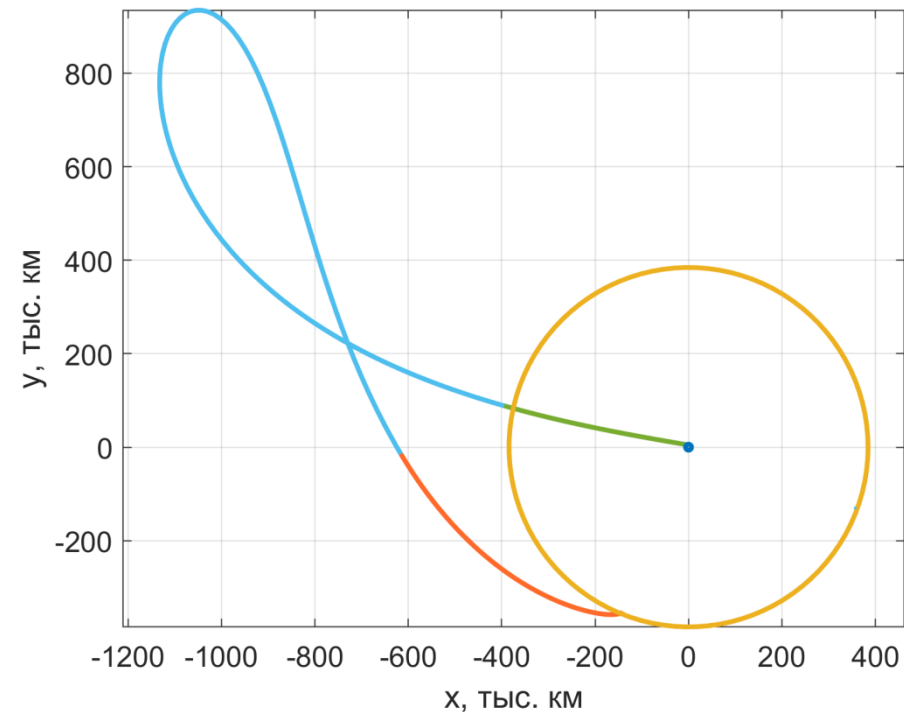
$$\frac{\partial\Omega_{4b}}{\partial\theta} \approx \frac{3}{2} \frac{Gm_S}{L^3} r^2 \sin 2\alpha,$$

 \Rightarrow

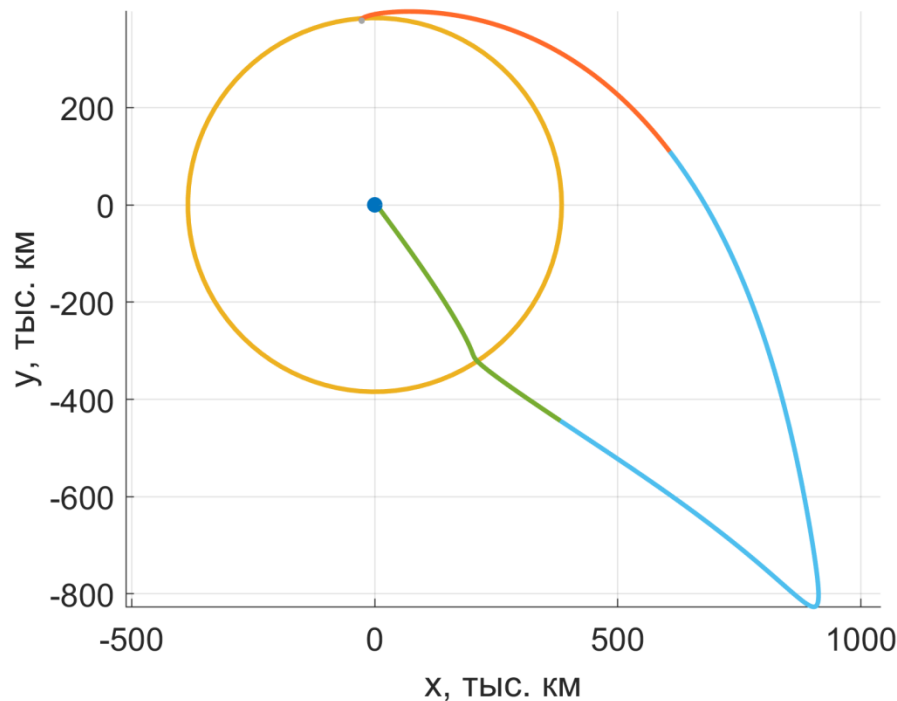
$$\sin 2\alpha < 0 \quad \text{при} \quad r = r_{max}$$



Примеры плоских WSB-траекторий



$J_{EM}^f = 3.06$, $r_p = 3141$ km, $\omega_p = 119^\circ$, время полета 87 дней



$J_{EM}^f = 3.06$, $r_p = 3141$ km, $\omega_p = 92^\circ$, время полета 74 дня

➤ Траектории получены в программе MATLAB (fmincon solver, опция sqp)



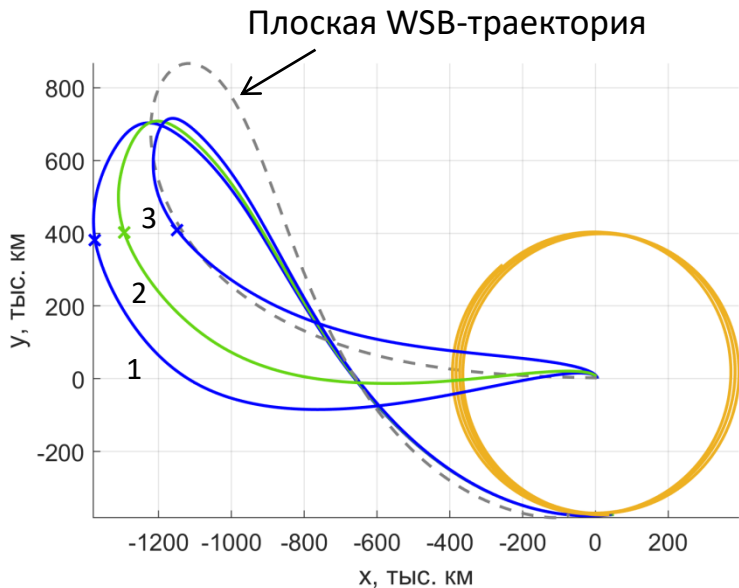
Адаптация к эфемеридной модели

- *Высокоточная модель:* центральные гравитационные поля Земли и Луны, гравитационные возмущения от Солнца и планет Солнечной системы, давление солнечного излучения, гармоника GRGM1200A (8x8) для гравитационного ускорения Луны, эфемериды JPL DE430
- *Метод адаптации:* параллельная пристрелка
- *Переменные оптимизации:*
 - эпохи и векторы состояния КА,
 - финальный LOI-импульс,
 - маневр коррекции траектории (TCM -маневр)
- *Целевая функция:*
$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_{LOI}^2 + \Delta V_{TCM}^2 \rightarrow \min$$
- *Ограничения* включают требования на
 - высоту, наклонение и эксцентриситет стартовой околоземной орбиты,
 - время старта,
 - величину отлетного импульса (≤ 3.2 км/с),
 - гладкость сшивки фазового вектора в узлах метода,
 - условия выхода на целевую орбиту.
- *Получение окна старта:* продолжение по дате старта



WSB-траектории в эфемеридной модели

Окно старта определяется как $\Delta V_{\Sigma} \leq 100$ м/с



Перелет с круговой орбиты $h = 200$ км,
 $i = 51.6^\circ$ на южную NRHO 9:2

1: открытие окна старта,
 $\Delta V_{\Sigma} = 32.876$ (TCM) + 67.176 (LOI) = 100.052 м/с,
дата старта 13 апреля, 2028, 12:00

2: оптимальная траектория,
 $\Delta V_{\Sigma} = 9.980$ (TCM) + 66.734 (LOI) = 76.714 м/с,
дата старта 20 апреля, 2028, 7:00

3: закрытие окна старта,
 $\Delta V_{\Sigma} = 33.937$ (TCM) + 66.096 (LOI) = 100.034 м/с,
дата старта 28 апреля, 2028, 4:00

Время прибытия фиксировано: 29.07.2028, 08:13:29

- Траектории получены в программе MATLAB (`fmincon` solver, опция `sqr`)
- Сходимость с начального приближения ~ 40 мин; шаг метода продолжения в 1 час по дате старта ≤ 10 с