

*XII Всероссийский съезд
по фундаментальным проблемам
теоретической и прикладной механики*

ОДНОВРЕМЕННАЯ РАЗГРУЗКА МАХОВИКОВ И КОРРЕКЦИЯ ОРБИТЫ С УЧЕТОМ ОПТИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ ТОПЛИВА



А.С. Охитина, Я.В. Маштаков,
С.С. Ткачѐв, С.А. Шестаков

*Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН, Москва*

anna.ohitina@mail.ru

19-24 августа 2019 года, Уфа

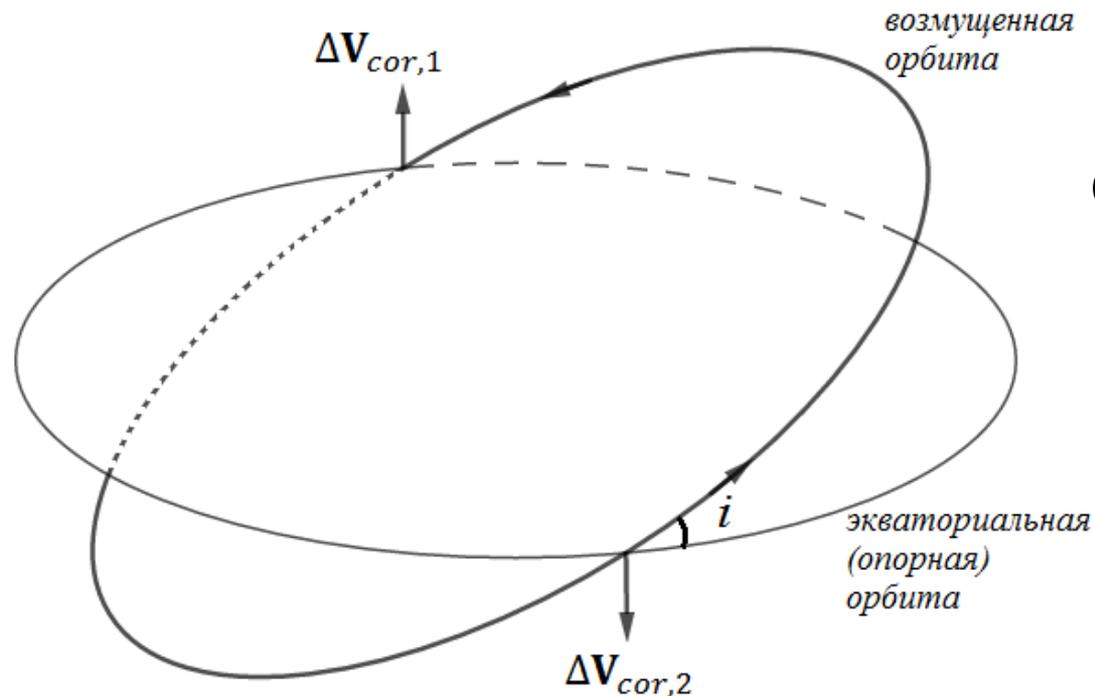
Содержание

- Введение
- Постановка и формализация задачи
- Оптимизационные подходы
- Нештатная ситуация
- Заключение

Введение

Поддержание орбиты: корректирующие импульсы в узлах для компенсации

- роста наклонения (в направлении «север-юг»)
- дрейфа вдоль орбиты (в направлении «запад-восток»)



Двигатели коррекции
создают моменты сил

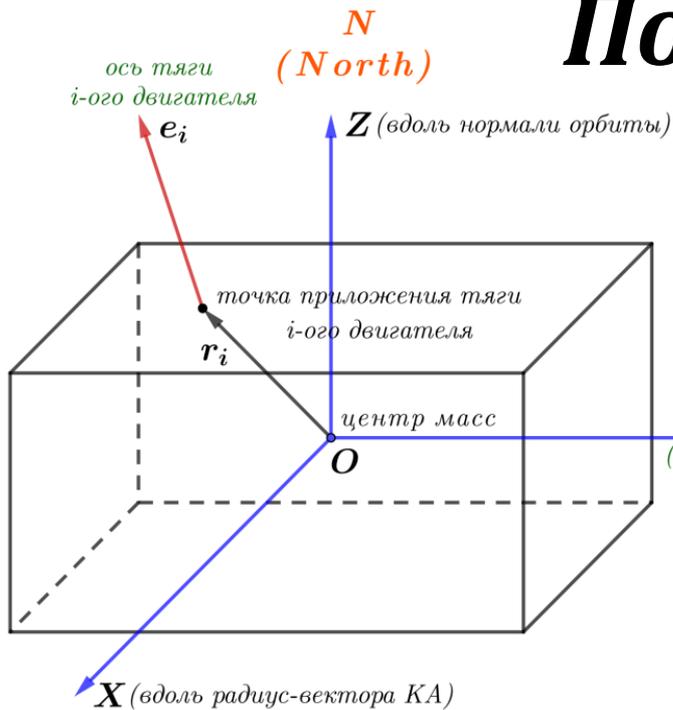
$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_i f$$

Они **компенсируются** маховичной
системой ориентации

Идея:

заранее выбрать положение
двигателей и направление их осей
тяги для **одновременной**
коррекции орбиты и разгрузки
маховиков

Постановка задачи



Заданы значения корректирующих импульсов вдоль осей Oy и Oz , ограничения на расположение двигателей, направление осей тяги

Требуется

одновременно корректировать орбиту и разгружать маховики

Для этого необходимо:

- определить **минимально необходимое количество** двигателей,
- выбрать **расположение** двигателей и направление их осей тяги, удовлетворяющих заданным критериям **оптимальности**
- система должна **оставаться работоспособной** даже в случае выхода из строя одного из двигателей

Формализация задачи

замена

Момент силы i -ого двигателя

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_i f$$

$$\frac{e_{i,z} f}{\Delta V_z m_s} \Delta t_i = \Delta \tau_i \quad (\text{нормированное время работы двигателей})$$

Суммарное изменение кинетического момента

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{M}_i \Delta t_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{m}_i \Delta \tau_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$

Система, описывающая изменение импульса спутника

$$\sum_{i=1}^k e_{i,z} \Delta t_i = \frac{\Delta V_z m_s}{f}$$

$$\sum_{i=1}^k e_i \Delta \tau_i = \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z}$$

$$\sum_{i=1}^k e_{i,y} \Delta t_i = \frac{\Delta V_y m_s}{f}$$

$$\sum_{i=1}^k \Delta \tau_i = 1, \quad \Delta \tau_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, k})$$

Ограничения на изменение скорости

ΔV_z – фиксированное

$$\Delta V_y \in [-0.05 \Delta V_z, 0.05 \Delta V_z]$$

ΔV_z – фиксированное,

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.05, 0.05],$$

Δt_i – время работы i -ого двигателя, $\Delta t_i \ll T_{orb}$

m_s – масса спутника

f – величина тяги

где $\mathbf{m}_i = \mathbf{M}_i \frac{\Delta V_z m_s}{e_{i,z} f}$, $e_i = \frac{e_{i,y}}{e_{i,z}}$

Сведение к выпуклой оболочке

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{m}_i \Delta \tau_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$

$$\sum_{i=1}^k e_i \Delta \tau_i = \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z}$$

$$\sum_{i=1}^k \Delta \tau_i = 1, \quad \Delta \tau_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, k})$$

ΔV_z – фиксированное,

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.05, 0.05],$$

где $\mathbf{m}_i = (m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z})^T$

вводим 4-мерные векторы

$$\boldsymbol{\psi}_i = (m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z}, e_i)^T, \quad i = \overline{1, k}$$

$$\sum_{i=1}^k \boldsymbol{\psi}_i \Delta \tau_i = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{h}_\Sigma \\ \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^k \Delta \tau_i = 1, \quad \Delta \tau_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, k}),$$

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.05, 0.05].$$

Сведение к выпуклой оболочке

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{m}_i \Delta \tau_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$

$$\sum_{i=1}^k e_i \Delta \tau_i = \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z}$$

$$\sum_{i=1}^k \Delta \tau_i = 1, \quad \Delta \tau_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, k})$$

ΔV_z – фиксированное,

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.05, 0.05],$$

где $\mathbf{m}_i = (m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z})^T$

вводим 4-мерные векторы

$$\boldsymbol{\psi}_i = (m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z}, e_i)^T, \quad i = \overline{1, k}$$

выпуклая оболочка

область (в 4-хмерном пр-ве)
всех возможных значений
изменения кинетического
момента и скорости
аппарата

$$\sum_{i=1}^k \boldsymbol{\psi}_i \Delta \tau_i = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{h}_\Sigma \\ \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^k \Delta \tau_i = 1, \quad \Delta \tau_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, k}),$$

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.05, 0.05].$$

Сведение к выпуклой оболочке

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{m}_i \Delta \tau_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$

$$\sum_{i=1}^k e_i \Delta \tau_i = \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z}$$

$$\sum_{i=1}^k \Delta \tau_i = 1, \quad \Delta \tau_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, k})$$

ΔV_z – фиксированное,

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.05, 0.05],$$

где $\mathbf{m}_i = (m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z})^T$

вводим 4-мерные векторы

$$\psi_i = (m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z}, e_i)^T, \quad i = \overline{1, k}$$

выпуклая оболочка

область (в 4-хмерном пр-ве)
всех возможных значений
изменения кинетического
момента и скорости
аппарата

должна иметь **ненулевой**
объём, для возможности
одновременной коррекции
орбиты и разгрузки
маховиков

$$\sum_{i=1}^k \psi_i \Delta \tau_i = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{h}_\Sigma \\ \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^k \Delta \tau_i = 1, \quad \Delta \tau_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, k}),$$

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.05, 0.05].$$

$$\min k = 5$$

Сведение к выпуклой оболочке

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{m}_i \Delta \tau_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$

$$\sum_{i=1}^k e_i \Delta \tau_i = \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z}$$

$$\sum_{i=1}^k \Delta \tau_i = 1, \quad \Delta \tau_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, k})$$

ΔV_z – фиксированное,

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.05, 0.05],$$

где $\mathbf{m}_i = (m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z})^T$

вводим 4-мерные векторы

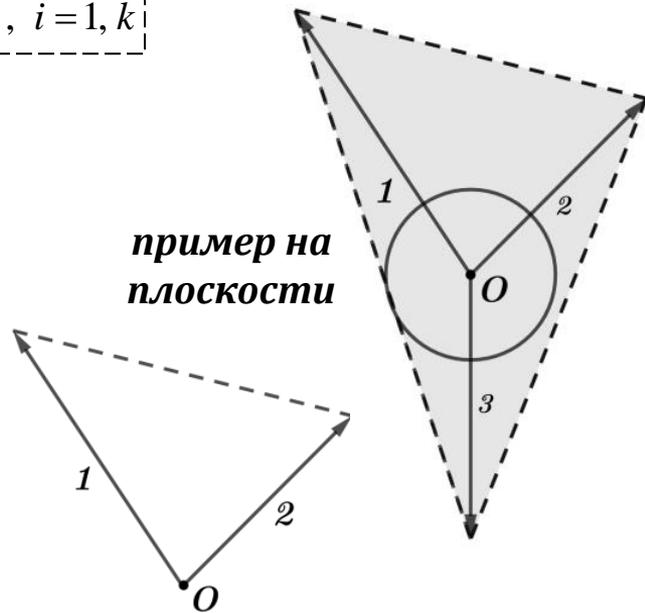
$$\psi_i = (m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z}, e_i)^T, \quad i = \overline{1, k}$$

выпуклая оболочка

область (в 4-хмерном пр-ве)
всех возможных значений
изменения кинетического
момента и скорости
аппарата

должна иметь **ненулевой
объём**, для возможности
одновременной коррекции
орбиты и разгрузки
маховиков

пример на
плоскости



$\min k = 5$

Выпуклая оболочка, $k=5$

$$\sum_{i=1}^5 \psi_i \Delta \tau_i = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{h}_\Sigma \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^5 \Delta \tau_i = 1, \quad \Delta \tau_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,5}),$$

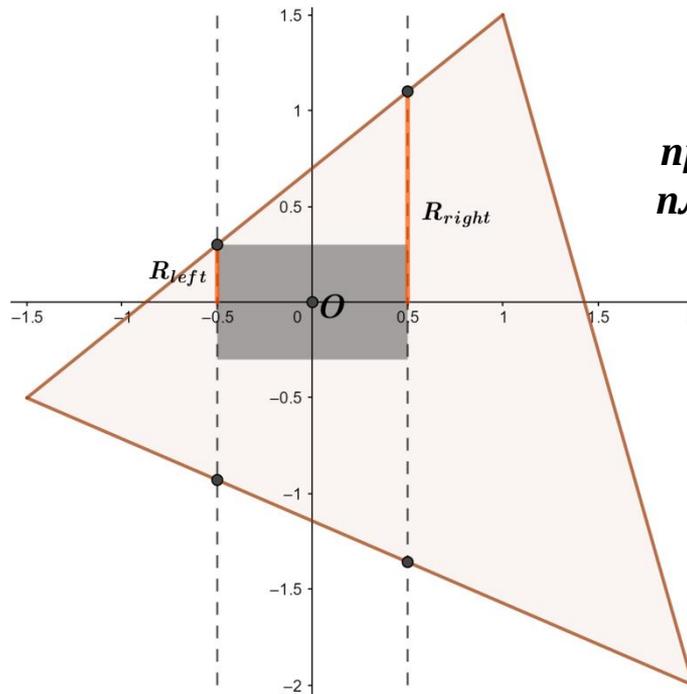
$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.05, 0.05].$$

Первая оптимизационная задача

$$\Phi_1 = \min(R_{left}, R_{right}) \rightarrow \max$$

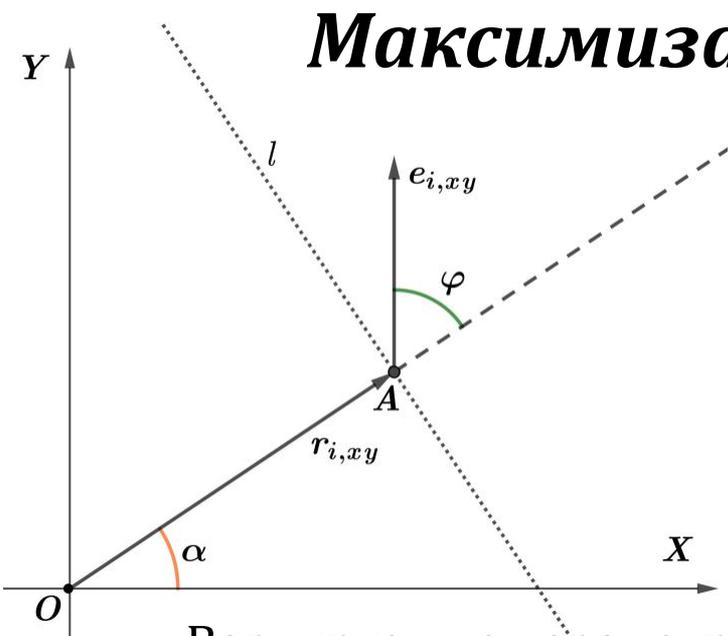
Условия на выпуклую оболочку:

1. обеспечить возможность выдавать $\Delta \mathbf{h}_\Sigma$ в любом направлении
2. ограничения на изменение импульса



пример на плоскости

Максимизация кинетического момента



$$\Phi_1 = \min(R_{left}, R_{right}) \rightarrow \max$$

Ограничения:

$$\varphi_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \theta_i \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \quad |\mathbf{e}_i| = 1$$

$$0.2 \text{ м} \leq r_i \leq 0.5 \text{ м}, \quad r_{i,z} = 0.5 \text{ м}$$

$$\alpha_i \in [0, 2\pi], \quad i = \overline{1, N}$$

Варьируемые параметры (4N переменных, N – кол-во двигателей):

$$r_i, \alpha_i, \theta_i, \varphi_i$$

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} r_i \cos \alpha_i \\ r_i \sin \alpha_i \\ r_{i,z} \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \sin \theta_i \cos(\varphi_i + \alpha_i) \\ \sin \theta_i \sin(\varphi_i + \alpha_i) \\ \cos \theta_i \end{pmatrix}$$

Параметры аппарата:

$$m_s = 5000 \text{ кг}, \quad f = 0.1 \text{ Н},$$

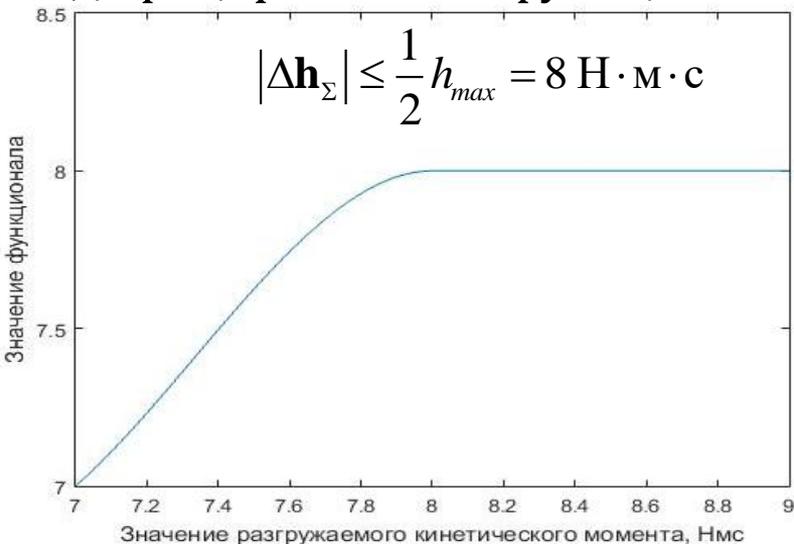
$$\Delta V_z = 0.03 \frac{\text{М}}{\text{с}}, \quad \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.05, 0.05].$$

Минимизация затрат топлива

Вторая оптимизационная задача $\Phi_2 = \sum_i e_{i,z}^2 \rightarrow \max$

Варьируемые параметры: $r_i, \alpha_i, \theta_i, \varphi_i$

Начальные данные: результат, полученный после оптимизации с модифицированным функционалом Φ_1 :



$$\Phi_1 = \begin{cases} 8, & \Delta \mathbf{h}_\Sigma \geq 8 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \\ (2t^3 - 3t^2 + 1)p_k + (t^3 - 2t^2 + t)(x_{k_1} - x_k)m_k + \\ \quad + (-2t^3 + 3t^2)p_{k_1} + (t^3 - t^2)(x_{k_1} - x_k)m_{k_1}, & 7 < \Delta \mathbf{h}_\Sigma < 8 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \\ \Delta \mathbf{h}_\Sigma, & \Delta \mathbf{h}_\Sigma \leq 7 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \end{cases}$$

где $t = \Delta \mathbf{h}_\Sigma - 7, p_k = 7, p_{k_1} = 8,$
 $x_k = 7, x_{k_1} = 8, m_k = 1, m_{k_1} = 0$

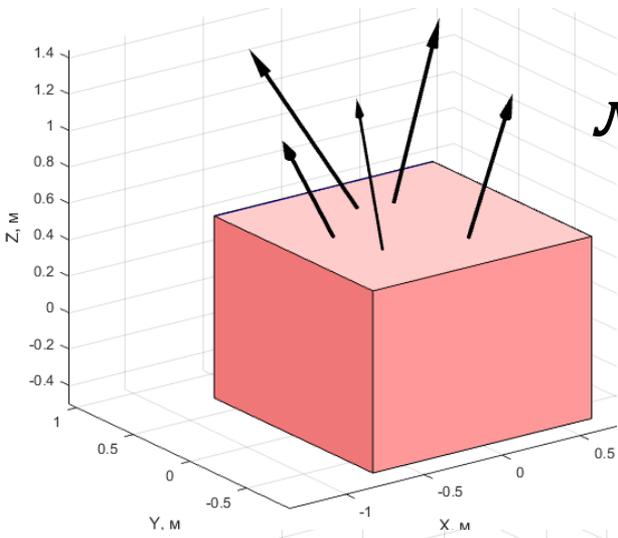
Дополнительное ограничение: $|\Delta \mathbf{h}_\Sigma| > 3 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$

Результаты моделирования

Начальная конфигурация

$$\Phi_1 = 8 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$$

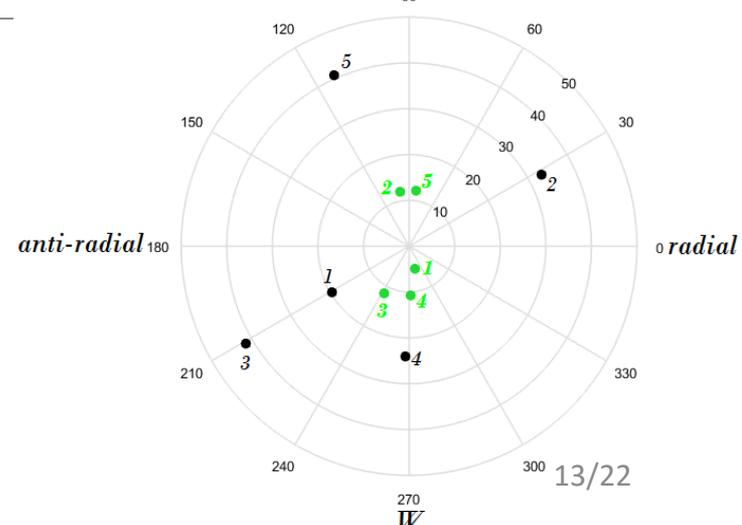
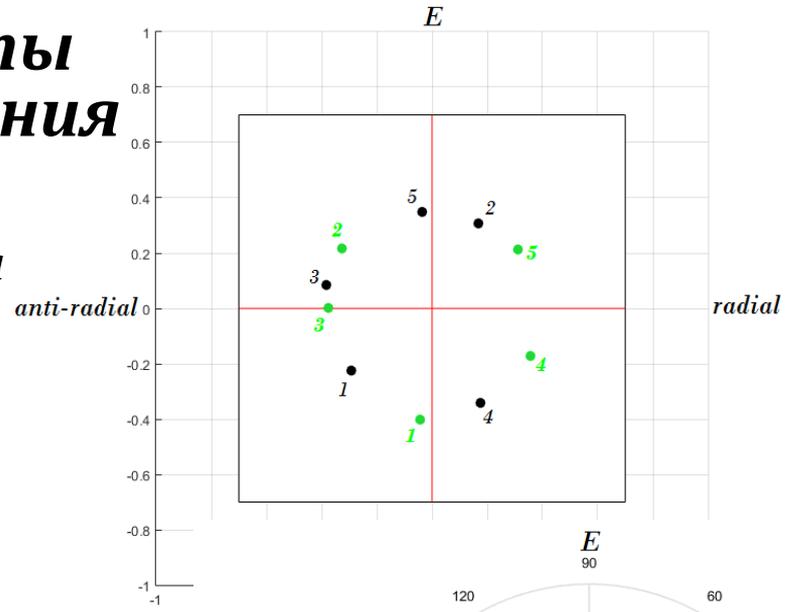
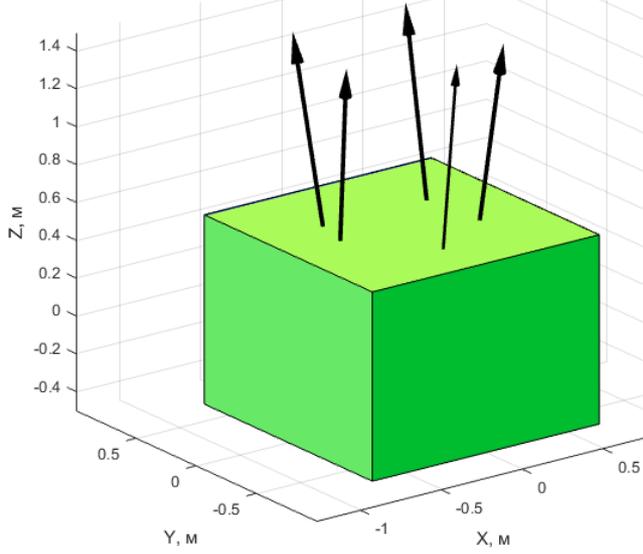
$$\Phi_2 = 3.56$$



Итоговая конфигурация

$$\Phi_1 = 5.65 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$$

$$\Phi_2 = 4.83$$

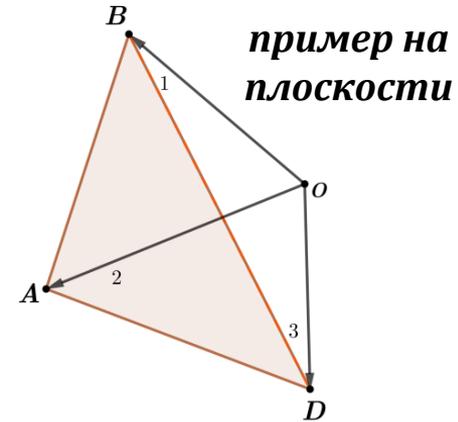
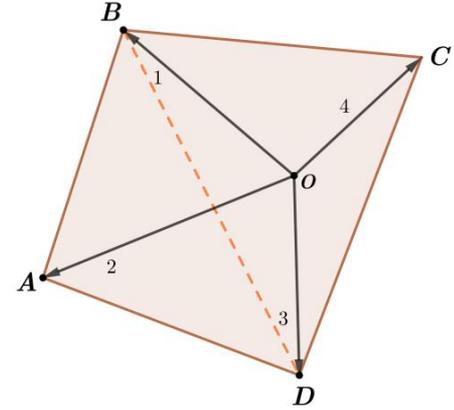


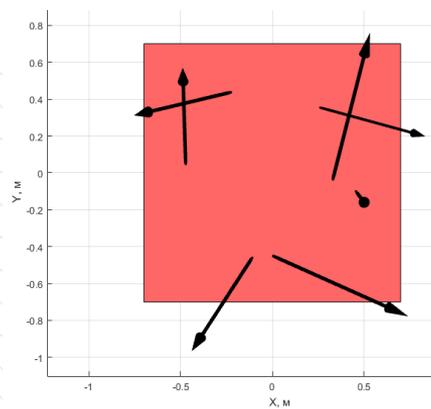
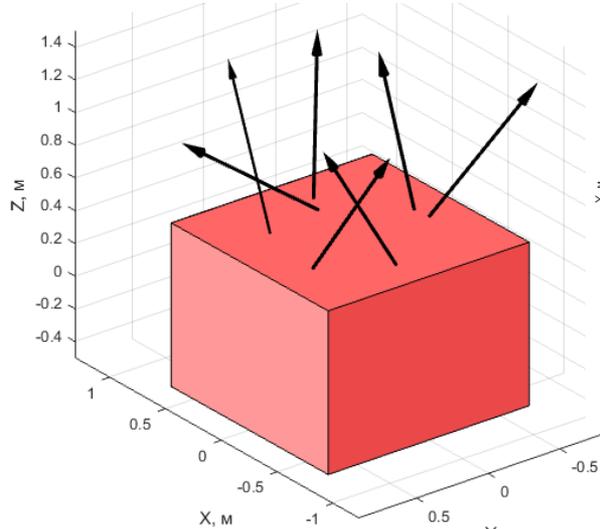
Выход из строя одного из двигателей

Добавление **одного** запасного двигателя не позволяет решить поставленную задачу

(доказательство для n -мерного пространства)

1. Ненулевой объем выпуклой оболочки: *минимум* $n+1$ точка
2. Один двигатель выходит из строя:
выпуклая оболочка n точек имеет нулевой объем – система перестанет быть работоспособной
3. Рассмотрим $n+2$ точки:
 - Построим для них выпуклую оболочку
 - Проведем в ней внутреннюю (не совпадающую с гранью выпуклой оболочки) гиперплоскость через произвольный набор из n точек.
 - Оставшиеся две точки будут лежать с противоположных сторон от гиперплоскости
 - Гиперплоскость делит выпуклую оболочку на две n -мерные пирамиды с общим основанием
 - Выходит из строя один из двух двигателей, расположенных в вершинах. Останется только одна пирамида
 - Начало координат может являться внутренней точкой удаленной пирамиды или может лежать в гиперплоскости

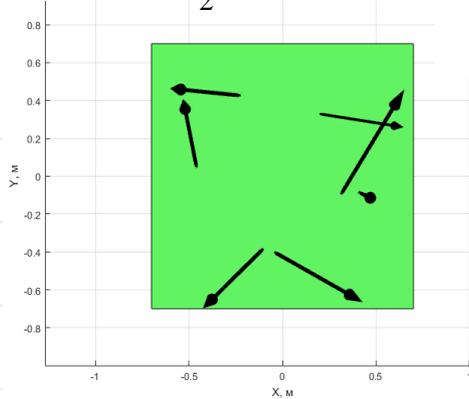
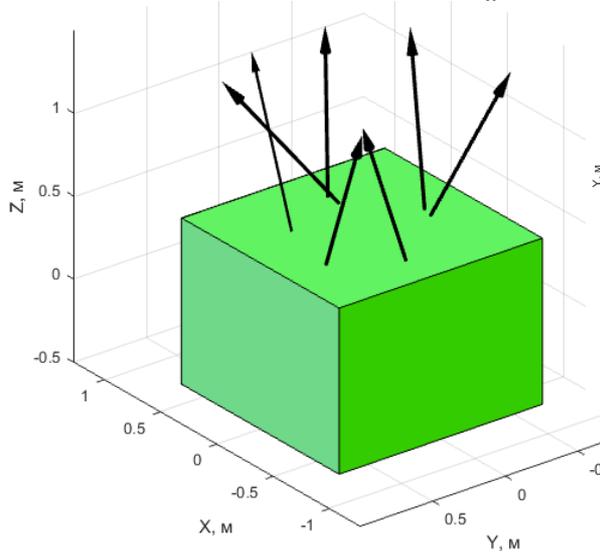
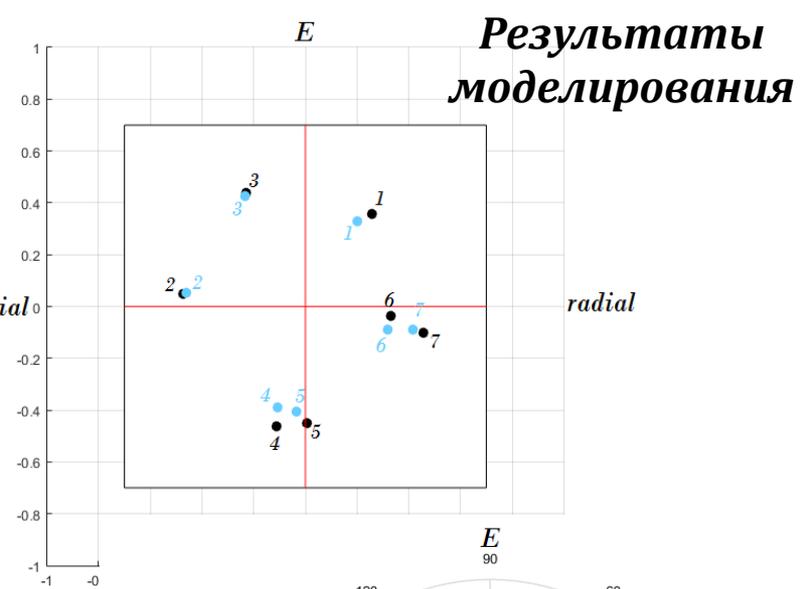




$$\Phi_1 = 5.39 \text{ H} \cdot \text{M} \cdot \text{c}$$

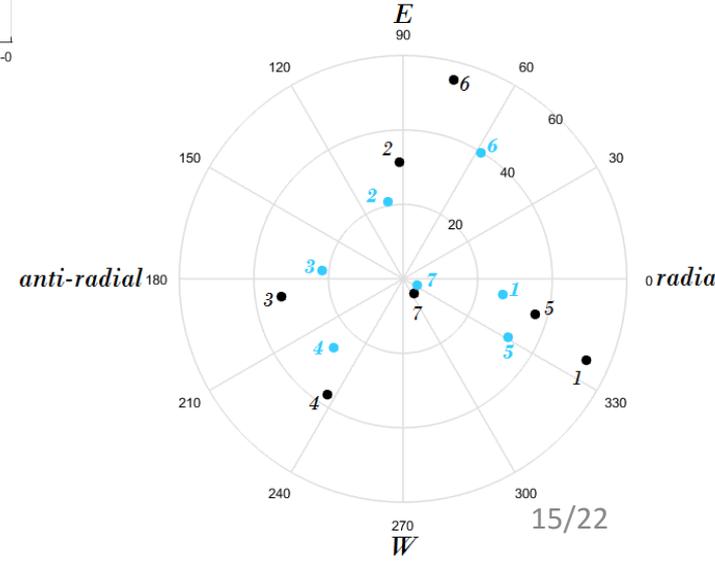
$$\Phi_2 = 4.38$$

anti-radial



$$\Phi_1 = 3.15 \text{ H} \cdot \text{M} \cdot \text{c}$$

$$\Phi_2 = 5.63$$



Влияние ошибок установки

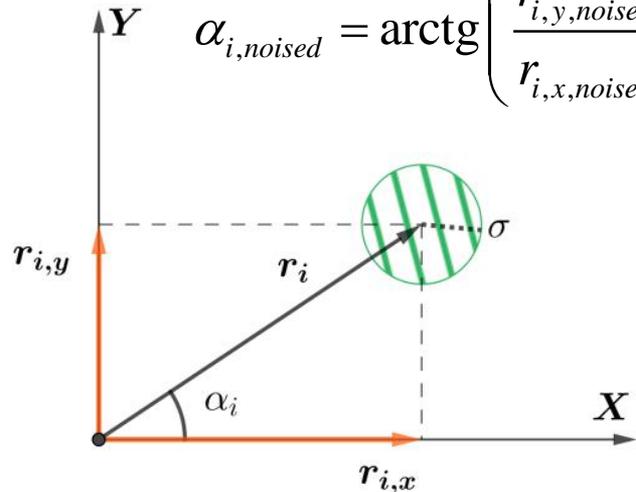
Задаем диапазон
возможных ошибок (r_i, α_i)

$$r_{i,x} = r_i \cos \alpha_i \quad r_{i,x, \text{noised}} = N(r_{i,x}, (3 \text{ мм})^2)$$

$$r_{i,y} = r_i \sin \alpha_i \quad r_{i,y, \text{noised}} = N(r_{i,y}, (3 \text{ мм})^2)$$

$$r_{i, \text{noised}} = \sqrt{r_{i,x, \text{noised}}^2 + r_{i,y, \text{noised}}^2}$$

$$\alpha_{i, \text{noised}} = \arctg \left(\frac{r_{i,y, \text{noised}}}{r_{i,x, \text{noised}}} \right) \in [0, 2\pi)$$

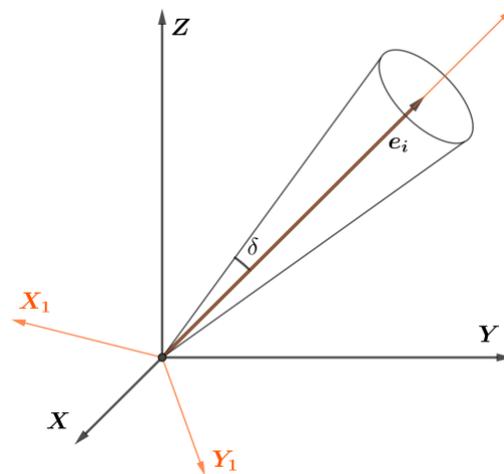


$(OXYZ) \rightarrow (OX_1Y_1Z_1)$

$$\mathbf{e}_{i, \text{new}} = \mathbf{T} \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{e}_{i, \text{new}, \text{noised}} = \begin{pmatrix} \sin(\xi) \cos(\zeta) \\ \sin(\xi) \sin(\zeta) \\ \cos(\xi) \end{pmatrix}$$

$$\xi = N(0, \delta^2), \quad \zeta = U[0, 2\pi]$$



$$\mathbf{e}_{i, \text{noised}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}_{i, \text{new}, \text{noised}}$$

3 случая:

$$\delta_1 = 0.1^\circ$$

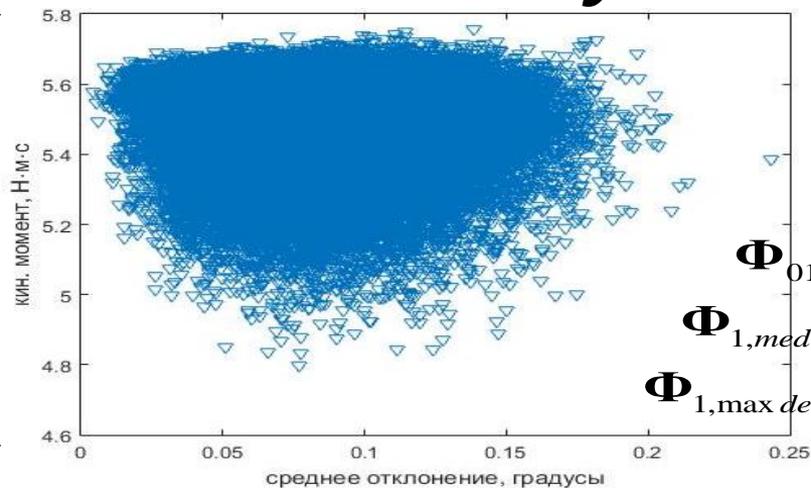
$$\delta_2 = 1^\circ$$

$$\delta_3 = 5^\circ$$

$$\delta_1 = 0.1^\circ$$

Влияние ошибок установки на Φ_1

5 двигателей

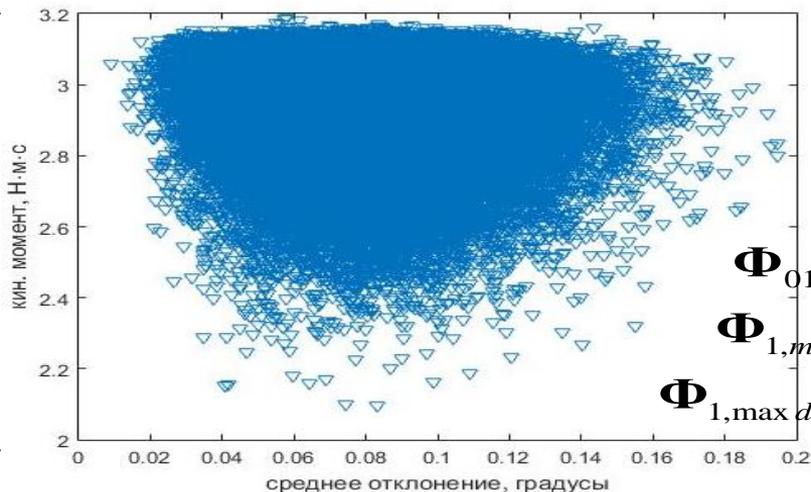


$$\Phi_{01} = 5.65 \text{ Н·м·с}$$

$$\Phi_{1, \text{mediana}} = 5.53 \text{ Н·м·с}$$

$$\Phi_{1, \text{max deviation}} = 4.79 \text{ Н·м·с}$$

7 двигателей



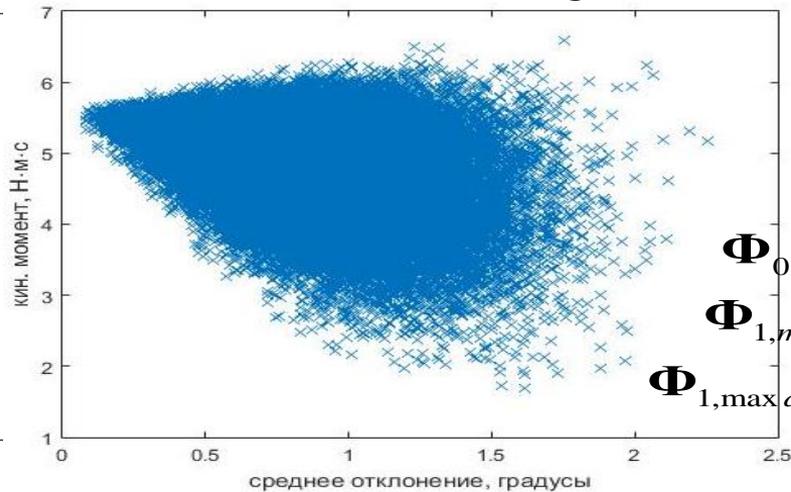
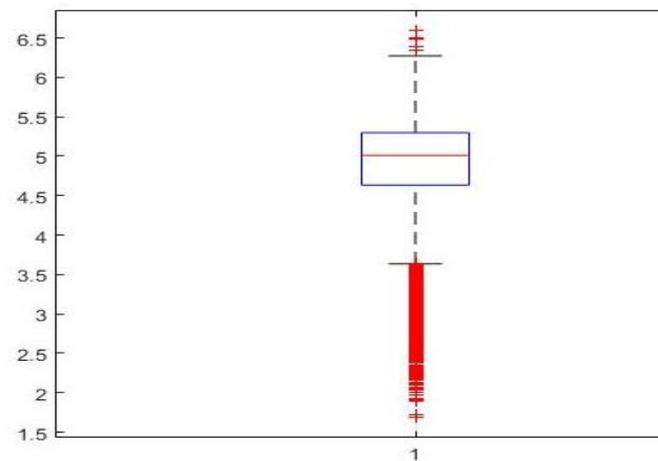
$$\Phi_{01} = 3.15 \text{ Н·м·с}$$

$$\Phi_{1, \text{mediana}} = 3 \text{ Н·м·с}$$

$$\Phi_{1, \text{max deviation}} = 2.1 \text{ Н·м·с}$$

$$\delta_2 = 1^\circ$$

Влияние ошибок установки на Φ_1

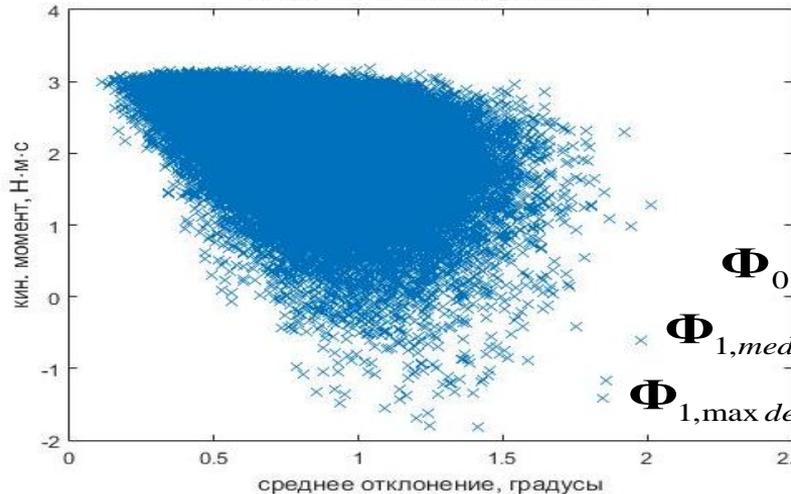
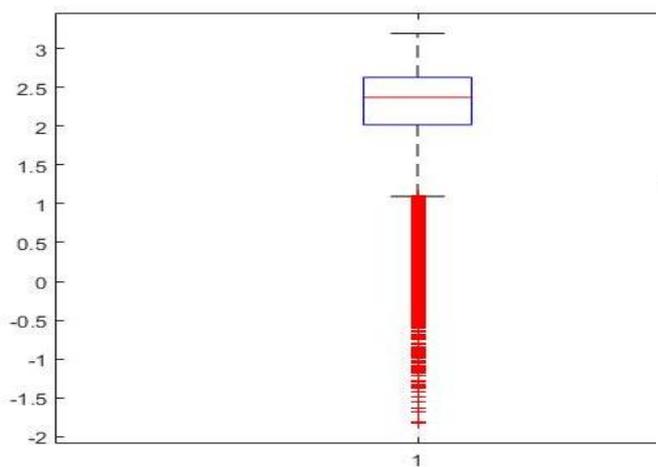


5 двигателей

$$\Phi_{01} = 5.65 \text{ Н·м·с}$$

$$\Phi_{1,mediana} = 5 \text{ Н·м·с}$$

$$\Phi_{1,max\ deviation} = 1.7 \text{ Н·м·с}$$



7 двигателей

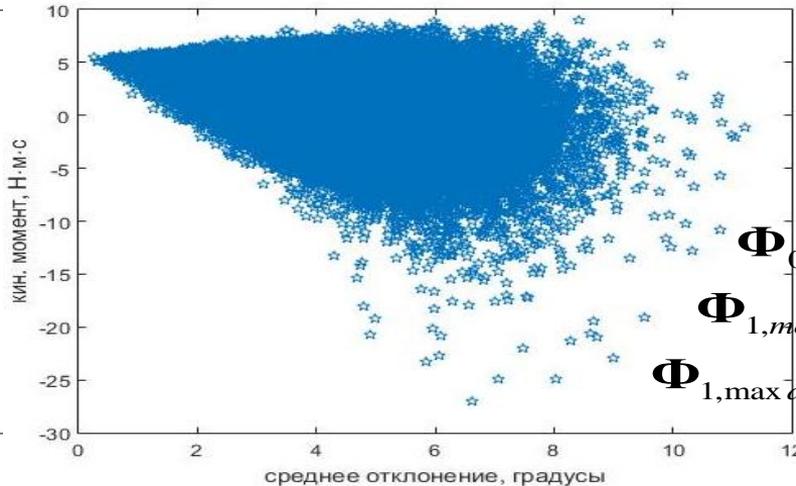
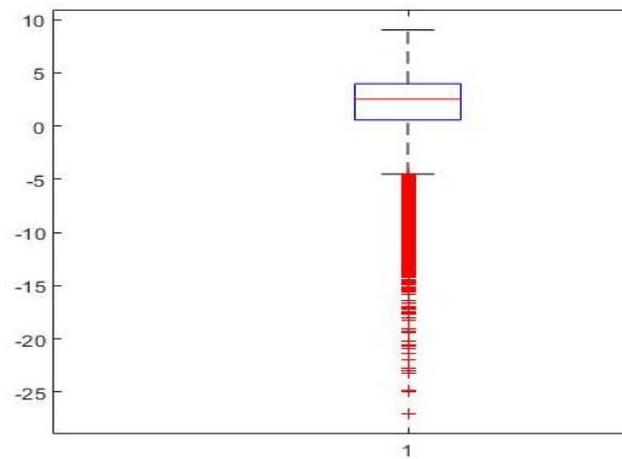
$$\Phi_{01} = 3.15 \text{ Н·м·с}$$

$$\Phi_{1,mediana} = 2.37 \text{ Н·м·с}$$

$$\Phi_{1,max\ deviation} = -1.8 \text{ Н·м·с}$$

$$\delta_3 = 5^\circ$$

Влияние ошибок установки на Φ_1



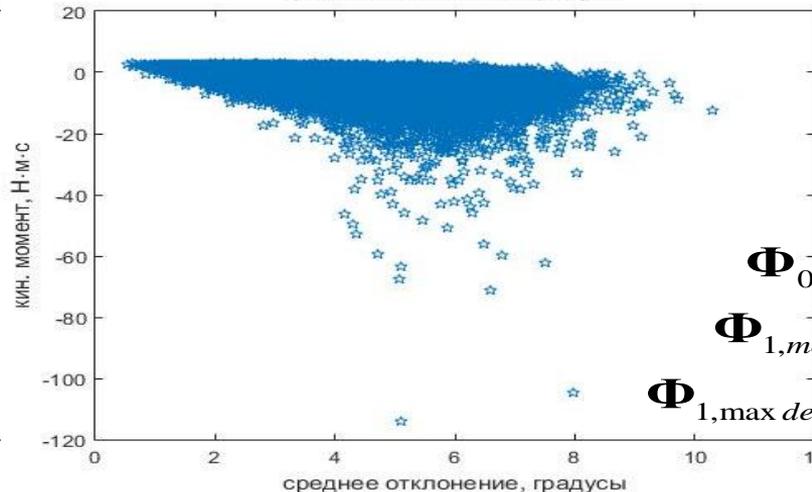
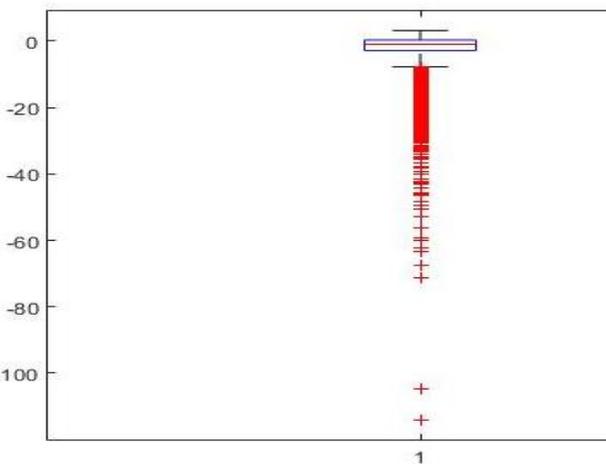
5 двигателей

$$\Phi_{01} = 5.65 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$$

$$\Phi_{1,mediana} = 2.5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$$

$$\Phi_{1,max\ deviation} = -27 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$$

среднее отклонение, градусы



7 двигателей

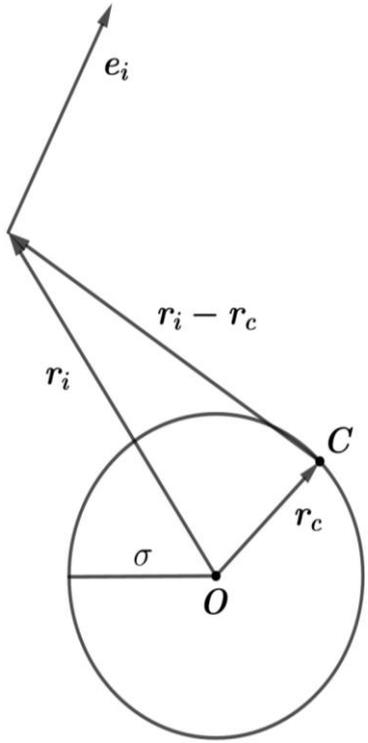
$$\Phi_{01} = 3.15 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$$

$$\Phi_{1,mediana} = -1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$$

$$\Phi_{1,max\ deviation} = -114 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$$

среднее отклонение, градусы

Влияние смещения центра масс аппарата



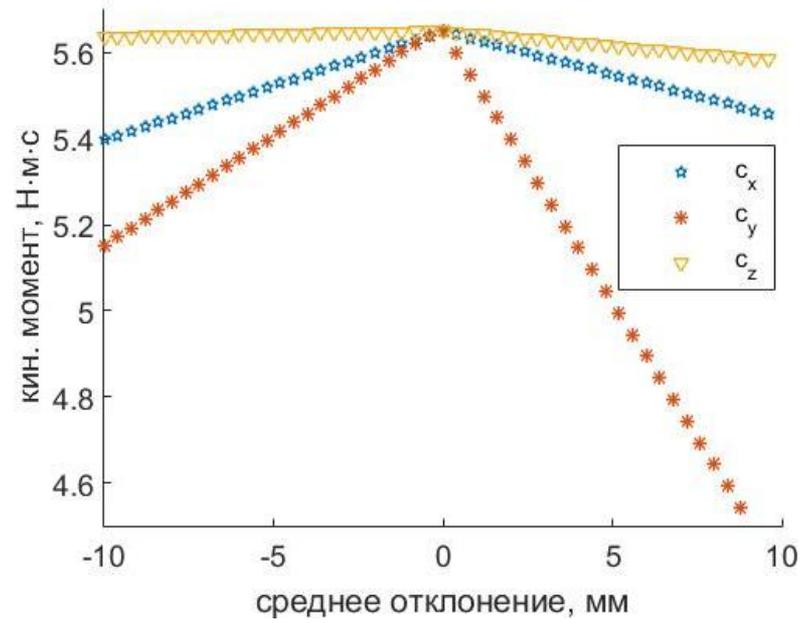
4 случая:

$$\mathbf{r}_{c,noised} = \begin{pmatrix} -0.01:h:0.01 \\ r_{c,y} \\ r_{c,z} \end{pmatrix}$$

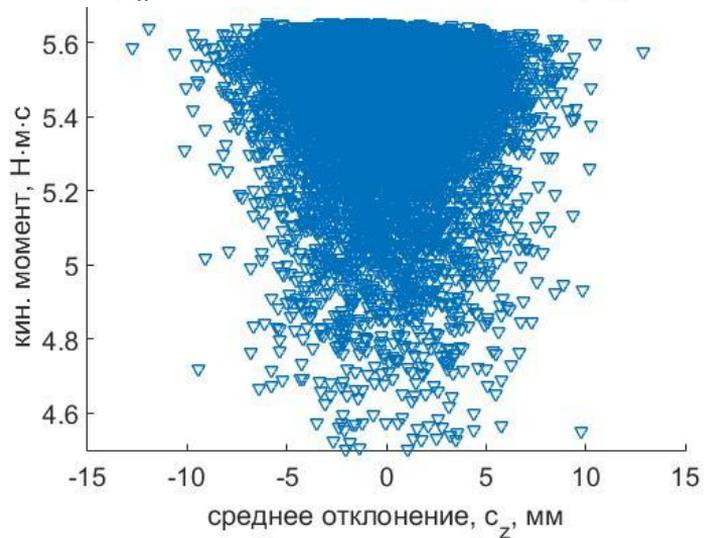
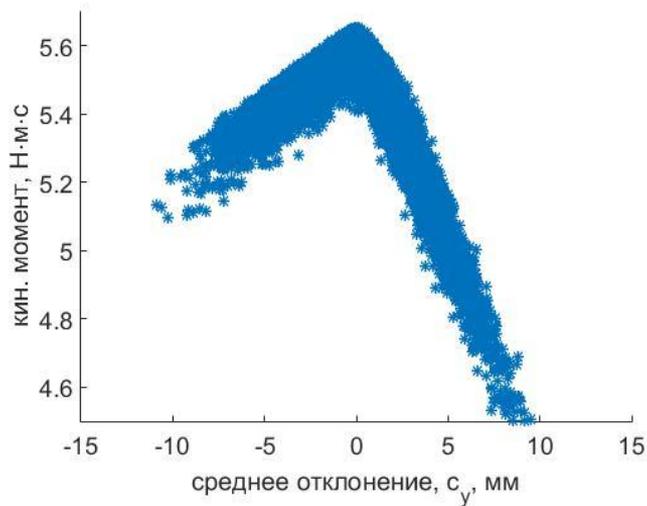
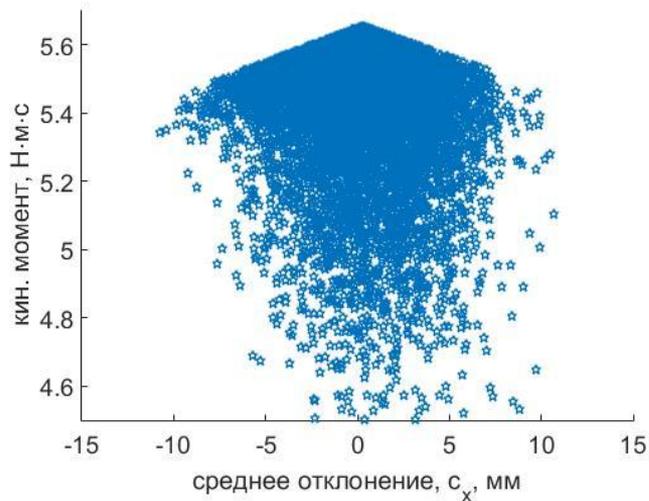
$$\mathbf{r}_{c,noised} = \begin{pmatrix} r_{c,x} \\ -0.01:h:0.01 \\ r_{c,z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{c,noised} = \begin{pmatrix} r_{c,x} \\ r_{c,y} \\ -0.01:h:0.01 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{c,noised} = N(\mathbf{r}_c, (3 \text{ мм})^2)$$



5 двигателей



5 двигателей

$$\mathbf{r}_{c, noised} = N(\mathbf{r}_c, (3 \text{ мм})^2)$$

Заключение

- Предложен **метод формализации** задачи, включающий в себя построение и рассмотрение выпуклых оболочек
- Показано, что в случае штатной работы системы для одновременной разгрузки маховиков и коррекции орбиты **минимально необходимое количество двигателей равно 5**
- В случае **возможного отказа одного двигателя** это количество увеличивается до **7**
- Предложена **методика поиска оптимального расположения** двигателей для максимизации возможностей разгрузки и минимизации расхода топлива
- Приведены **примеры** расположения двигателей с учетом всех ограничений и требований
- Проведен **численный анализ** найденных конфигураций **на чувствительность** к ошибкам установки двигателей и смещению центра масс аппарата