



АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ СПУТНИКА С НЕЖЕСТКИМИ КРУПНОГАБАРИТНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Д.С. Иванов, М.Ю. Овчинников, С.С. Ткачев, А.И. Шестопёров

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

Содержание доклада

- Введение
- Постановка задачи
- Математическая модель системы
- Алгоритмы управления
- Алгоритмы определения вектора состояния
- Заключение

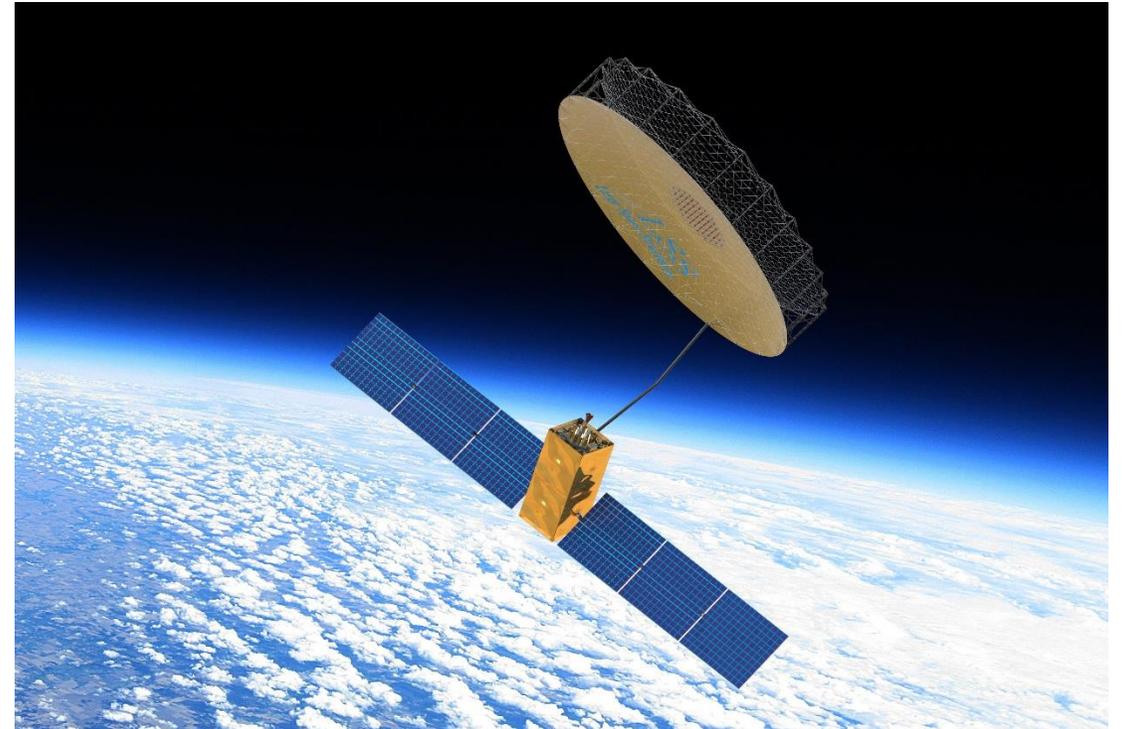
Введение

Крупногабаритные конструкции

- антенны
- солнечные панели

Особенности при синтезе алгоритмов

- система с большим (бесконечным) числом степеней свободы)
- существенно конечное число датчиков и исполнительных органов
- ограниченные возможности бортового компьютера



<https://www.largespace.de/new-esa-project-scalable/>

Постановка задачи

Рассматривается спутник, состоящий из:

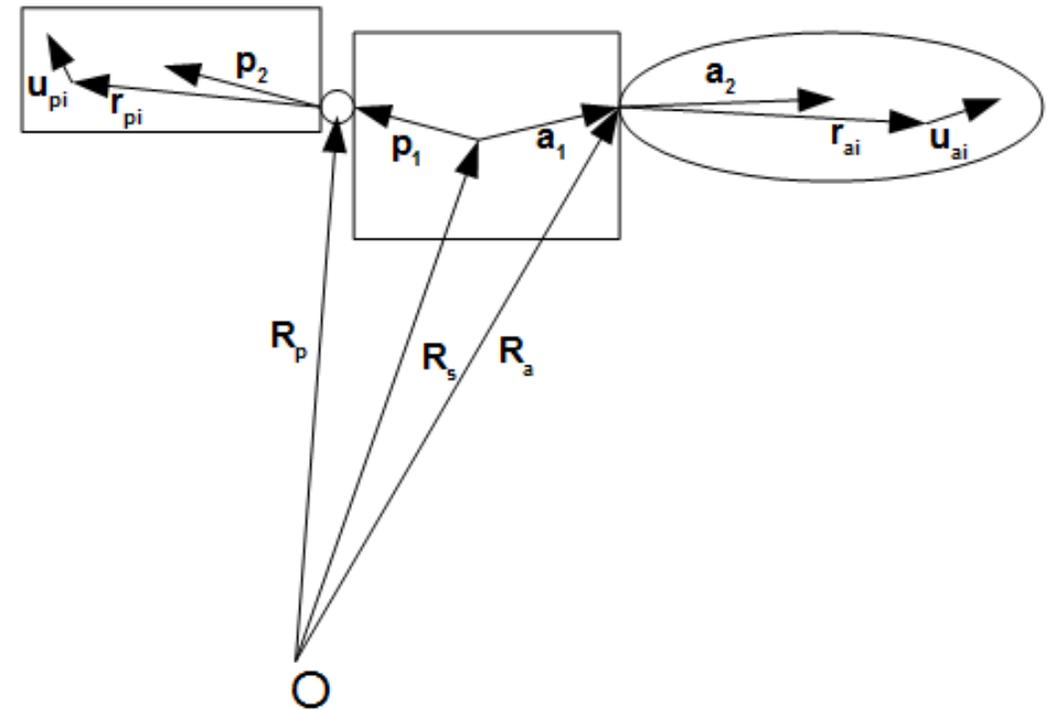
- центральное тело (полагается твердым телом),
- солнечная панель 'р' (крепится одностепенным шарниром),
- антенна 'а' (крепится консольно).

Система управления и определения ориентации:

- три маховика, расположенных вдоль главных осей инерции центрального тела
- трехосный датчик угловой скорости и звездный датчик расположены на центральном теле

Необходимо:

- стабилизировать спутник в нужной ориентации в инерциальном пространстве



Математическая модель

Общее уравнение динамики $\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{R}_i = 0$

Смещение точки гибкого элемента из-за деформации

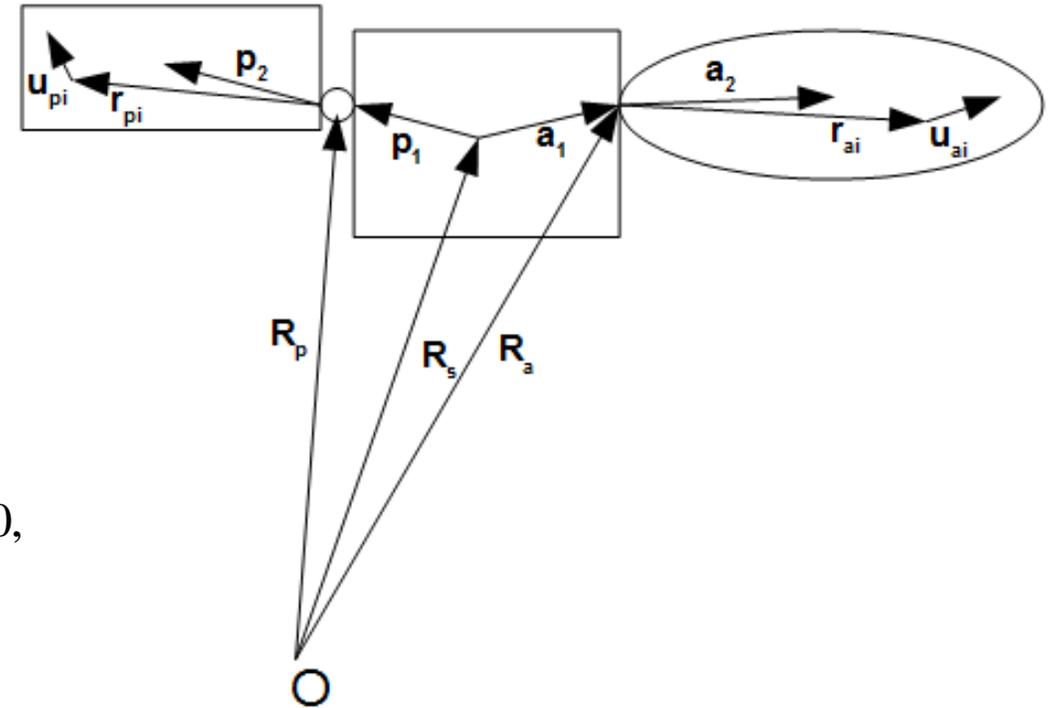
$$\mathbf{u}_{ji} = \mathbf{A}_{ji}(\mathbf{r}_{ji}) \mathbf{q}_j(t)$$

По каждой из независимых координат

$$\delta R_s: \sum_i (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_j \sum_i (m_{ji} \ddot{\mathbf{R}}_{ji} - \mathbf{F}_{ji}) = 0$$

$$\delta \theta: \sum_i \mathbf{r}_{si} \times (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_j \sum_i (\mathbf{s}_j + \mathbf{r}_{ji} + \mathbf{u}_{ji}) \times (m_{ji} \ddot{\mathbf{R}}_{ji} - \mathbf{F}_{ji}) = 0,$$

$$\delta \mathbf{q}_j: \sum_i \mathbf{A}_{ji}^T (m_{ji} \ddot{\mathbf{R}}_{ji} - \mathbf{F}_{ji} - \mathbf{L}_{ji}) = 0$$



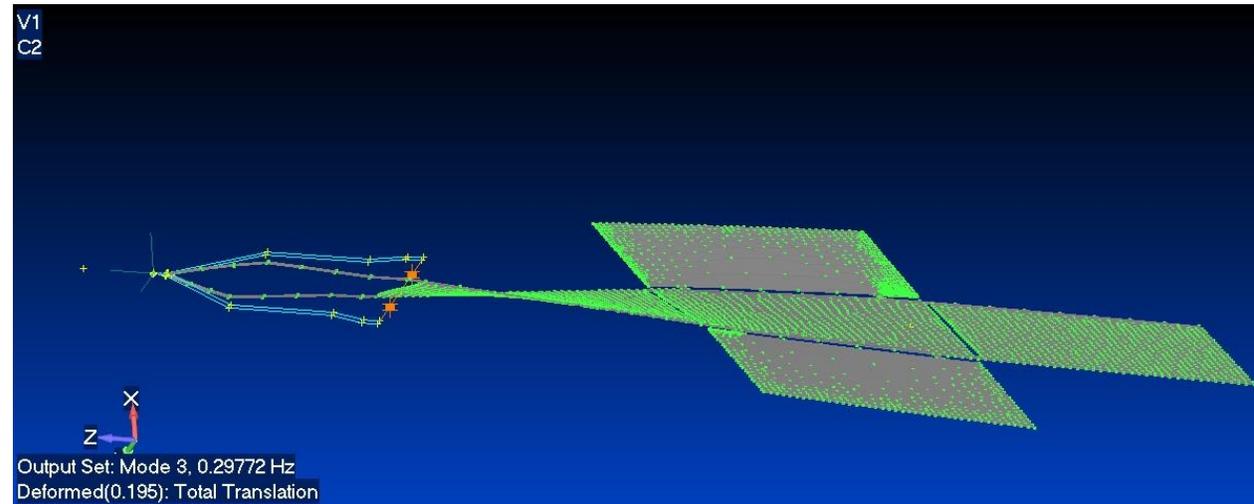
Математическая модель

Деформация нежестких элементов определяется амплитудами собственных колебаний

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_s \boldsymbol{\omega} + \mathbf{T}_s - \mathbf{N}_{\omega a} - \mathbf{f}_{\omega a} - \mathbf{N}_{\omega p} - \mathbf{f}_{\omega p} \\ -\mathbf{f}_a - \mathbf{N}_a \\ -\mathbf{f}_p - \mathbf{N}_p \end{pmatrix}$$

$$\dot{\lambda}_0 = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}),$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{2}(\lambda_0 \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega}).$$



Угол поворота панели относительно центрального тела задается независимо и является параметром

Размерность модели $3 + n_a + n_p$

Математическая модель (линеаризация)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{V}_q \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1} \left(\mathbf{E}_{3 \times 3} + \mathbf{S}_q \left(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q \right)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \right) \\ - \left(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q \right)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q \left(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q \right)^{-1} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 3} & - \left(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q \right)^{-1} \boldsymbol{\Omega} \\ \frac{1}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix}$$

$$n = n_a + n_p$$

Эта модель используется для синтеза законов определения и управления

Алгоритмы управления

Особенности системы

- большая размерность вектора состояния
- три независимых канала управления (три маховика)
- ограничения на величину управления

Центральное тело + нежесткие элементы

Тензор инерции $J \sim 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

Управление $u \sim 0.35 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Микроспутник

Тензор инерции $J \sim 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

Управление $u \sim 0.05 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Линейно-квадратичный регулятор

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad \mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = -\mathbf{K} \mathbf{x} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad \mathbf{Q}, \mathbf{R} - \text{положительно определенные}$$

Моделирование

Начальные условия и параметры

$$\boldsymbol{\omega} = (0.02 \quad 0.01 \quad 0.03) \text{ град}/\text{сек}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = (0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad -0.5)$$

$$n_a = 5 \quad n_p = 3$$

$$q_a = (0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1)$$

$$q_p = (0.1 \quad 0.1 \quad 0.1)$$

Частота управления 4 Гц

Шаг интегрирования 0.125 сек

Постоянный момент $8 \times 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$

Параметры управления
начальный этап

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(10^3 \mathbf{E}_{3 \times 3}, 10^5 \mathbf{E}_{n_a + n_p \times n_a + n_p}, 10^4 \mathbf{E}_{3 \times 3}, 10^5 \mathbf{E}_{n_a + n_p \times n_a + n_p})$$

$$\mathbf{R} = 2 \times 10^6 \mathbf{E}_{3 \times 3}$$

после переориентации и предварительного успокоения

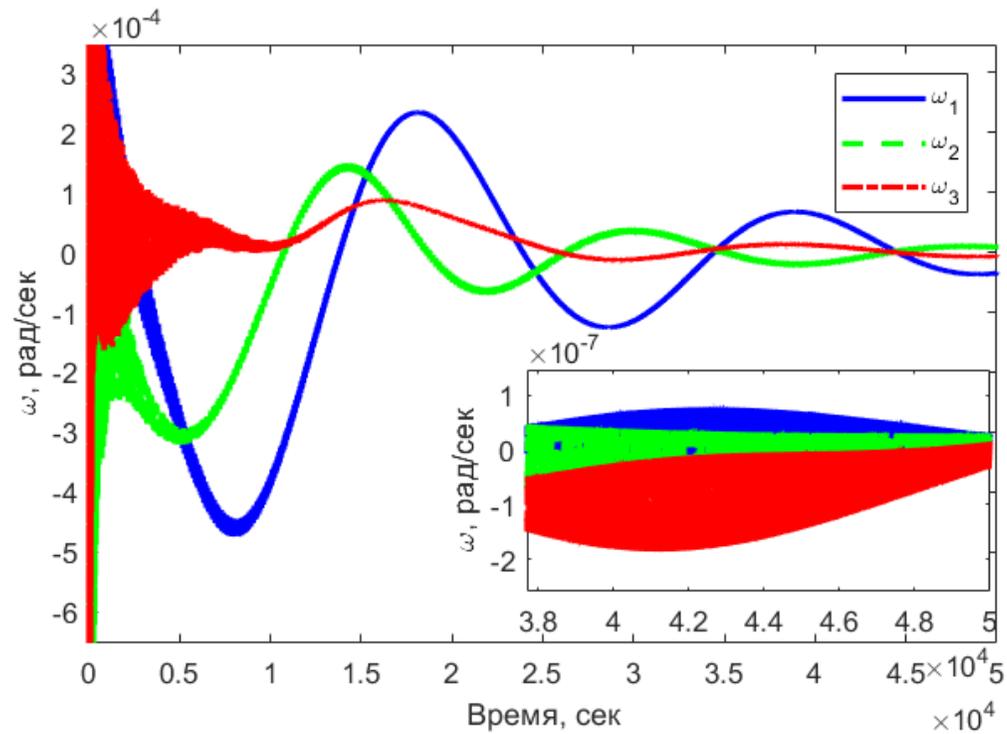
$$\mathbf{Q} = \text{diag}(10^3 \mathbf{E}_{3 \times 3}, 10^5 \mathbf{E}_{n_a + n_p \times n_a + n_p}, 10^4 \mathbf{E}_{3 \times 3}, 10^5 \mathbf{E}_{n_a + n_p \times n_a + n_p})$$

$$\mathbf{R} = 10^4 \mathbf{E}_{3 \times 3}$$

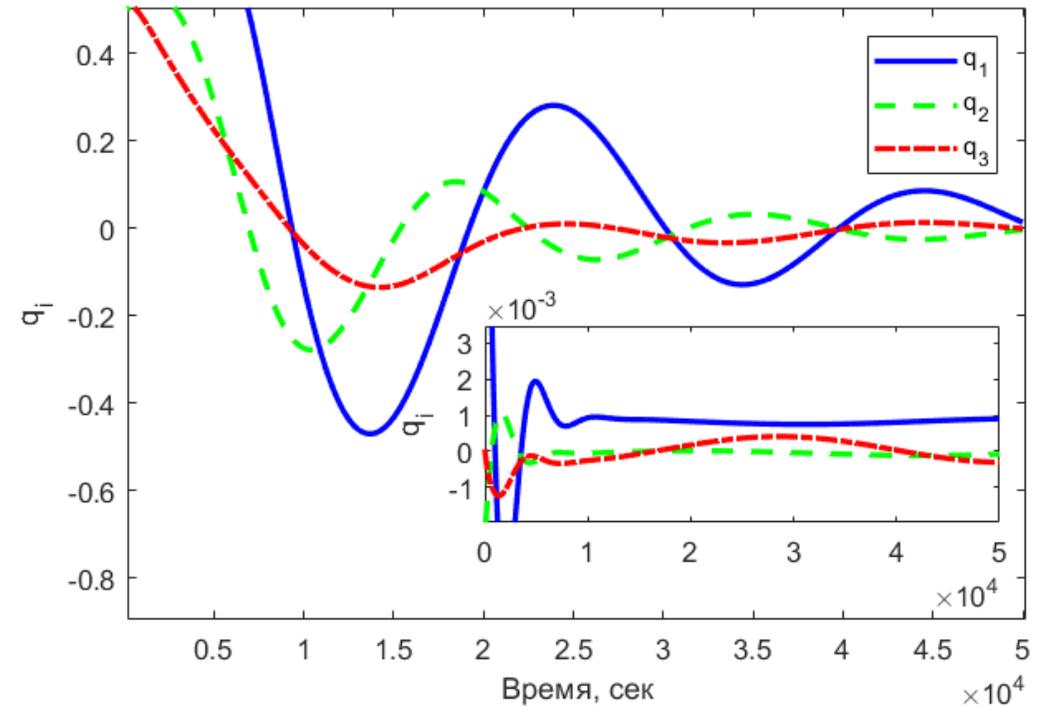
$$\lambda_{\text{ош}} \approx \mathbf{K}_\lambda^{-1} \mathbf{M}_{\text{возм}} \quad \mathbf{K}_\lambda \sim 0.07 \mathbf{E}_{3 \times 3}$$

$$\mathbf{K}_\lambda \sim \mathbf{E}_{3 \times 3}$$

Моделирование (угловое движение)

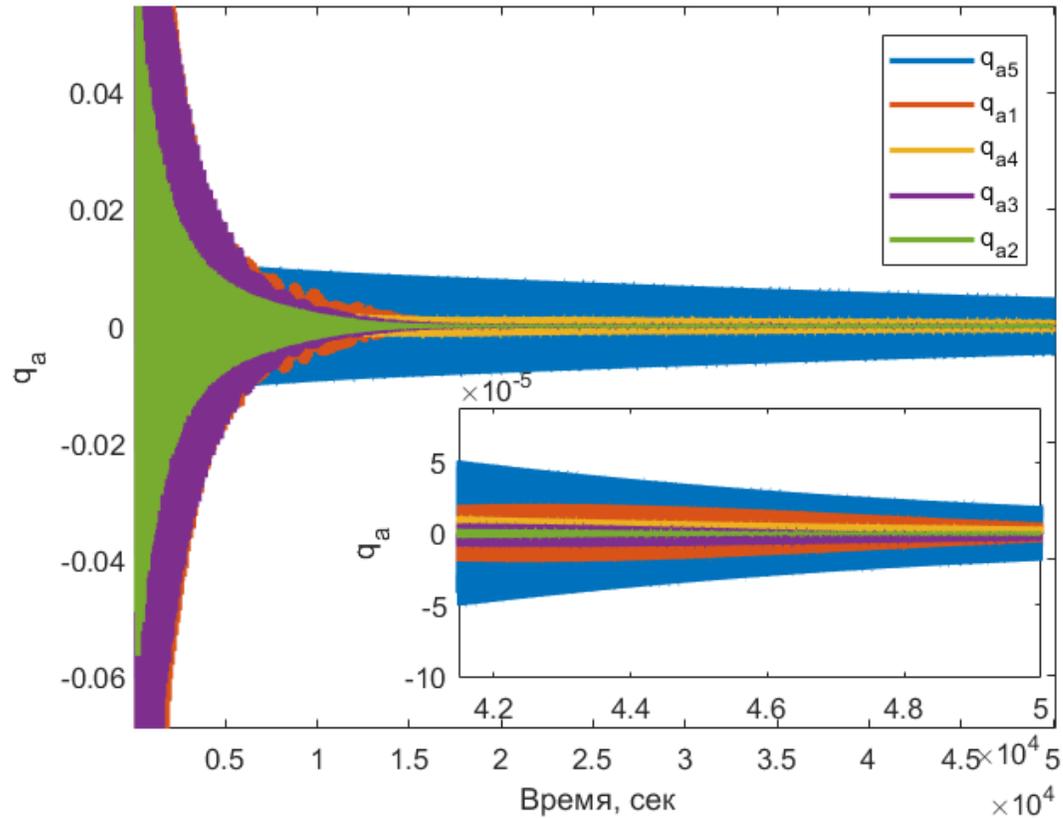


Угловая скорость

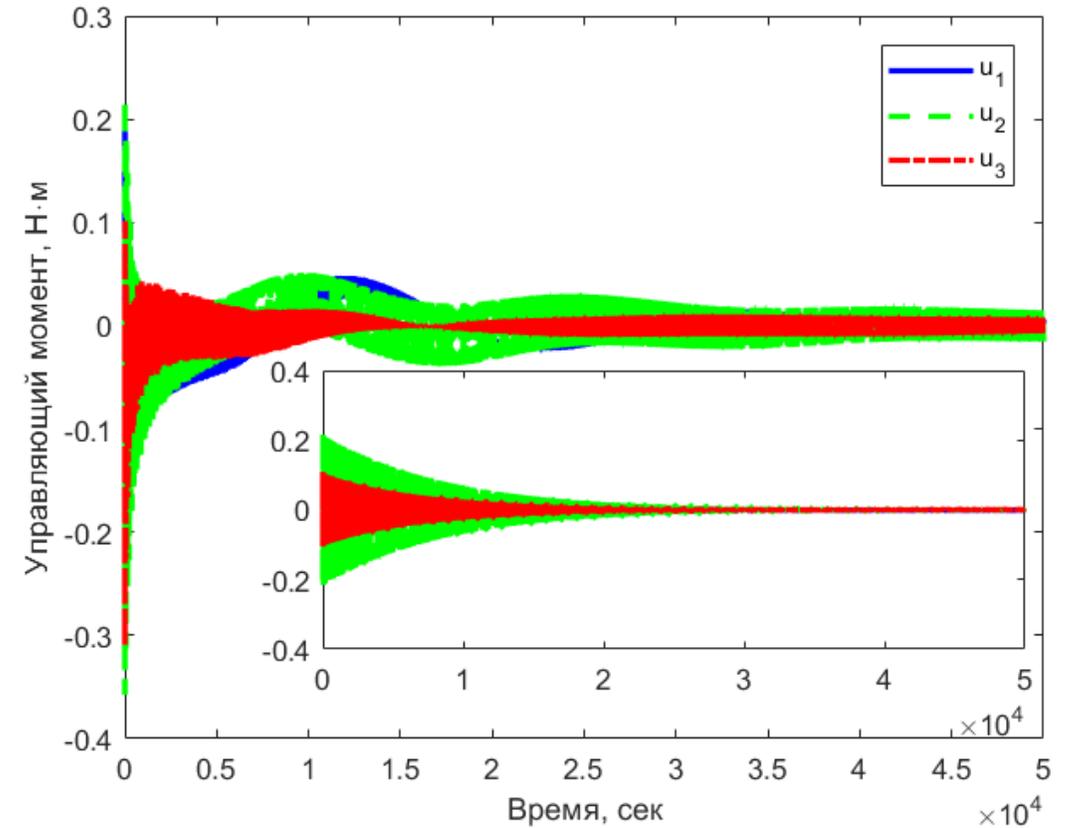


Кватернион ориентации

Моделирование (колебания и управление)



Амплитуды мод антенны



Управление

Алгоритм определения

Модель движения КА

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{G}\mathbf{q},$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = 0, \mathbf{M}(\mathbf{q}\mathbf{q}^T) = \mathbf{D},$$

Модель измерений

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t) + \mathbf{r}_k.$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_k) = 0, \mathbf{M}(\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T) = \mathbf{R}_k.$$

Линеаризация

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-}, \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-},$$

$$\Phi_k = \mathbf{E} + \mathbf{F}_k (t_k - t_{k-1}).$$

Этап прогноза (интегрирование)

1. Прогноз вектора состояния

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dt,$$

2. Прогноз матрицы ошибок

$$\mathbf{P}_k^- = \Phi_k \mathbf{P}_{k-1}^+ \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k,$$

$$\text{где } \mathbf{Q}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_k \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{G}^T \Phi_k^T dt$$

Этап коррекции (обработка измерения)

1. Вычисление весовой матрицы

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1},$$

2. Коррекция $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ с использованием \mathbf{z}_k

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, t)],$$

3. Усечение матрицы ошибок

$$\mathbf{P}_k^+ = [\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^-.$$

Начальный вектор состояния \mathbf{x}_0 ,

Начальная матрица ошибок \mathbf{P}_0

Модель измерений

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k.$$

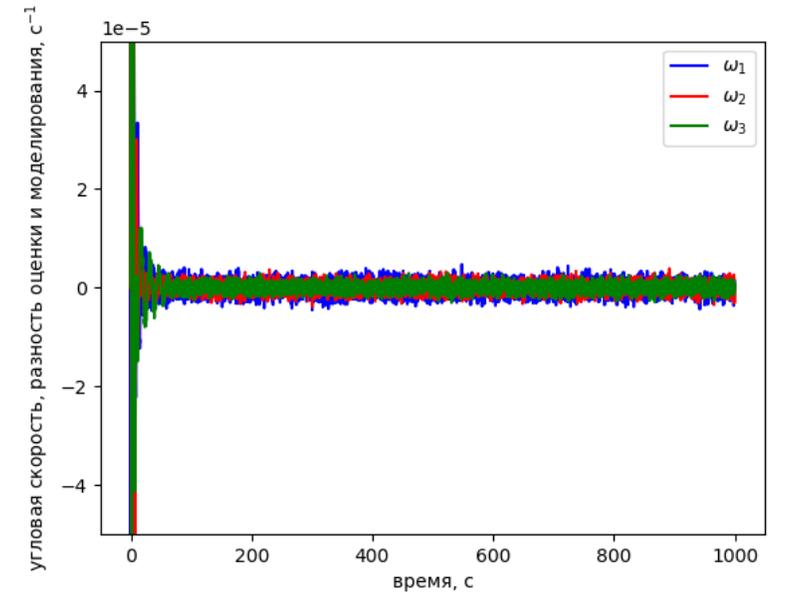
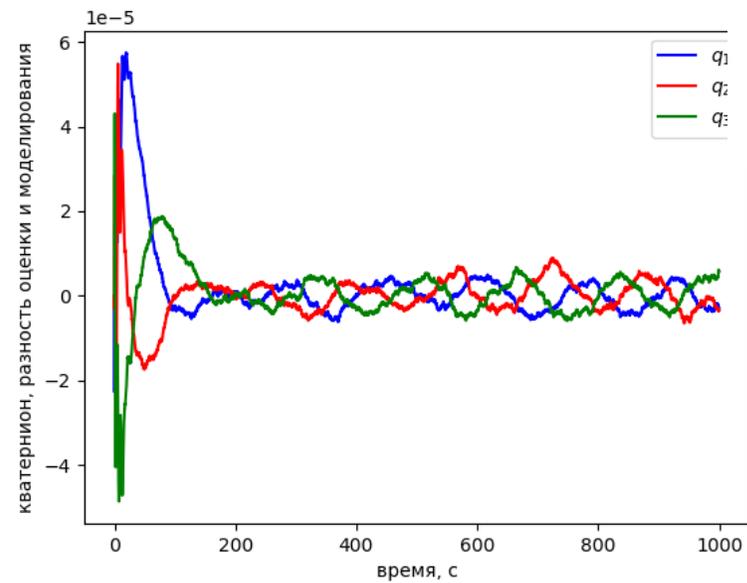
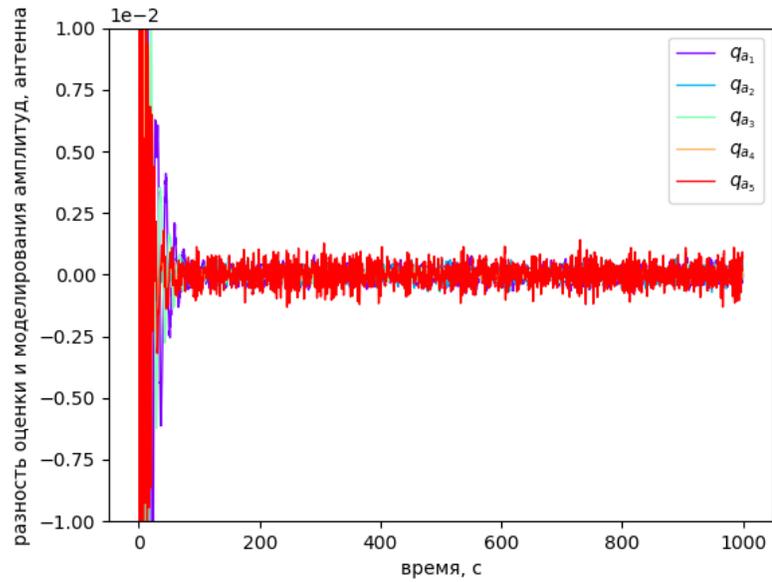
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \omega \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \\ \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \end{bmatrix}$$

Вектор состояния

Для обычного ЛКР $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{V}^q \\ \lambda \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ оценивается часть амплитуд колебаний

Для редуцированного ЛКР $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \omega \\ \lambda \end{pmatrix}$ фактически амплитуды мод колебаний не оцениваются

Результаты (точность оценки)



Алгоритмы управления (редукция)

J.R. Sesak, P.V. Kokotovich

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \lambda \\ \mathbf{V}_q \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}_\omega \mathbf{y} + \mathbf{A}_{\omega q} \mathbf{z} + \mathbf{B}_\omega \mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}_{qq} \mathbf{z} + \mathbf{B}_q \mathbf{u}, \end{aligned} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q (\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \boldsymbol{\Omega} \\ \frac{1}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times n} & -(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_\omega & \mathbf{A}_{\omega q} \\ \mathbf{0}_{n \times 6} & \mathbf{A}_{qq} \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{E}_{3 \times 3} + \mathbf{S}_q (\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_\omega \\ \mathbf{B}_q \end{pmatrix}$$

С учетом $0 = \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{qq} \mathbf{z} + \mathbf{B}_q \mathbf{u} \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_\omega \mathbf{y} + (\mathbf{B}_\omega - \mathbf{A}_{\omega q} \mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q) \mathbf{u} \quad \mathbf{J} = \int_0^\infty (\mathbf{y}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{y} + \mathbf{u}^T (\mathbf{R} + (\mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q)^T \mathbf{Q}_z \mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q) \mathbf{u}) dt$

Обозначив $\mathbf{R}_x = \mathbf{R} + (\mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q)^T \mathbf{Q}_z \mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q \quad \mathbf{B}_x = \mathbf{B}_\omega - \mathbf{A}_{\omega q} \mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q$ получим $\mathbf{u} = -\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{B}_x^T \mathbf{P}_x \mathbf{y}$

Моделирование (параметры)

Начальные условия и параметры

$$\boldsymbol{\omega} = (0.02 \quad 0.01 \quad 0.03) \text{ град/сек}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = (0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad -0.5)$$

$$n_a = 5 \quad n_p = 3$$

$$q_a = (0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1)$$

$$q_p = (0.1 \quad 0.1 \quad 0.1)$$

Частота управления 4 Гц

Шаг интегрирования 0.125 сек

Постоянный момент $8 \times 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$

Параметры управления
начальный этап

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(10^3 \mathbf{E}_{3 \times 3}, 10^6 \mathbf{E}_{n_a+n_p \times n_a+n_p}, 10^3 \mathbf{E}_{3 \times 3}, 10^6 \mathbf{E}_{n_a+n_p \times n_a+n_p})$$

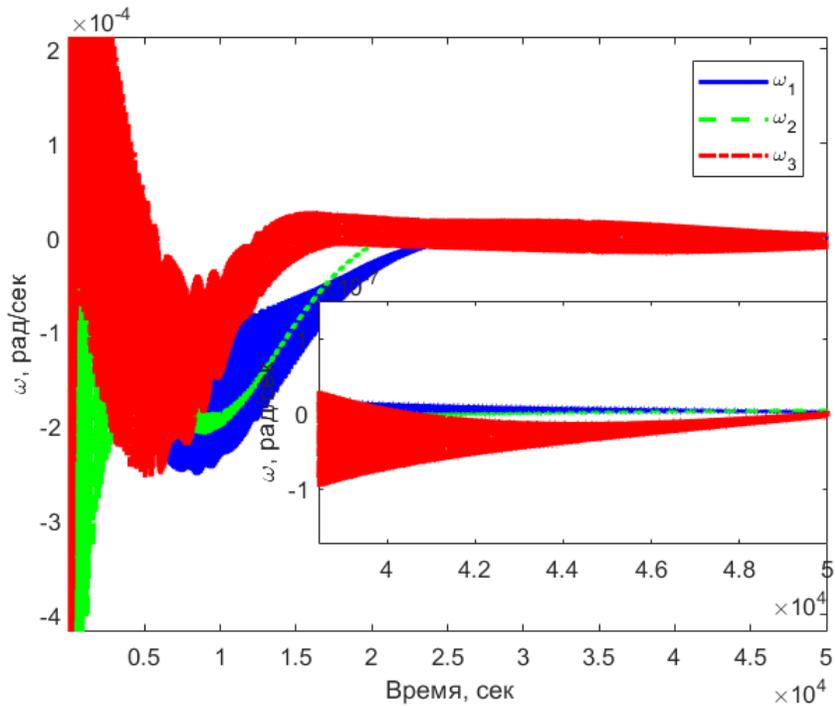
$$\mathbf{R} = 10^6 \mathbf{E}_{3 \times 3}$$

после переориентации и предварительного успокоения

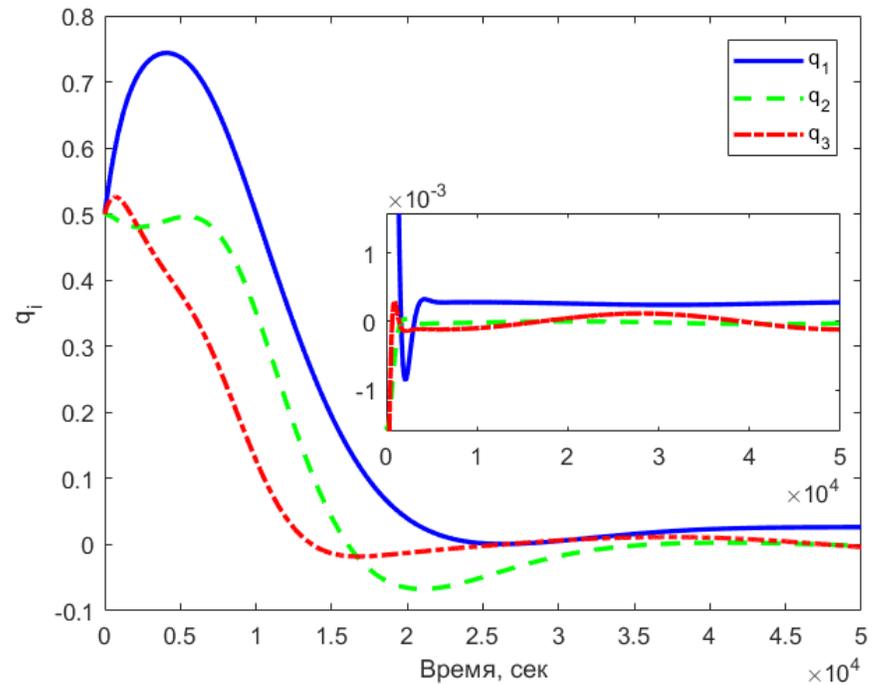
$$\mathbf{Q} = \text{diag}(10^3 \mathbf{E}_{3 \times 3}, 10^6 \mathbf{E}_{n_a+n_p \times n_a+n_p}, 10^5 \mathbf{E}_{3 \times 3}, 10^6 \mathbf{E}_{n_a+n_p \times n_a+n_p})$$

$$\mathbf{R} = 10^4 \mathbf{E}_{3 \times 3}$$

Моделирование (угловое движение)

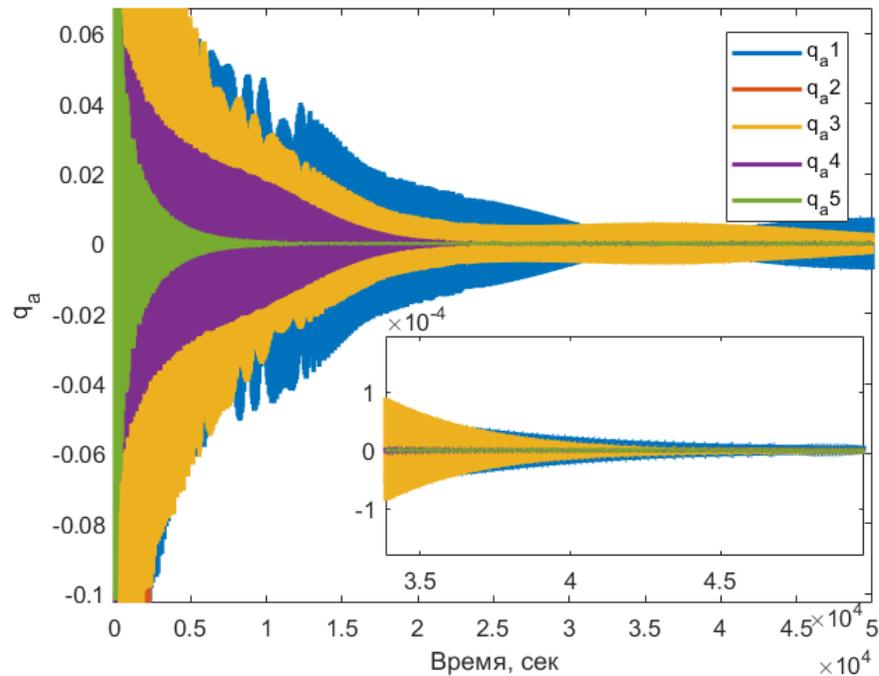


Угловая скорость

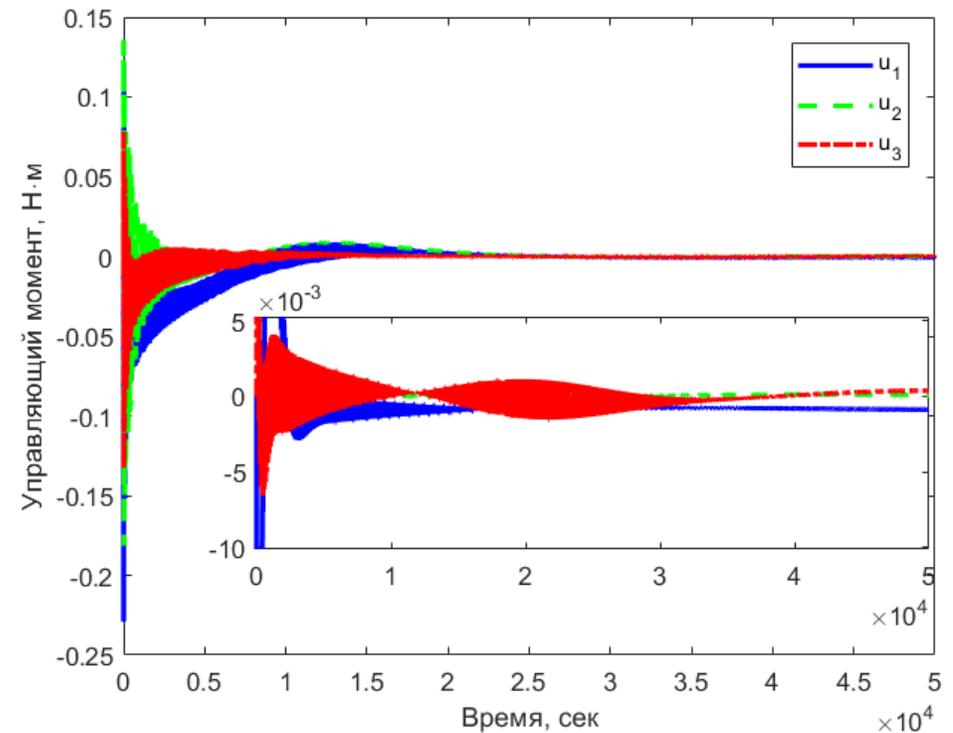


Кватернион ориентации

Моделирование (колебания и управление)



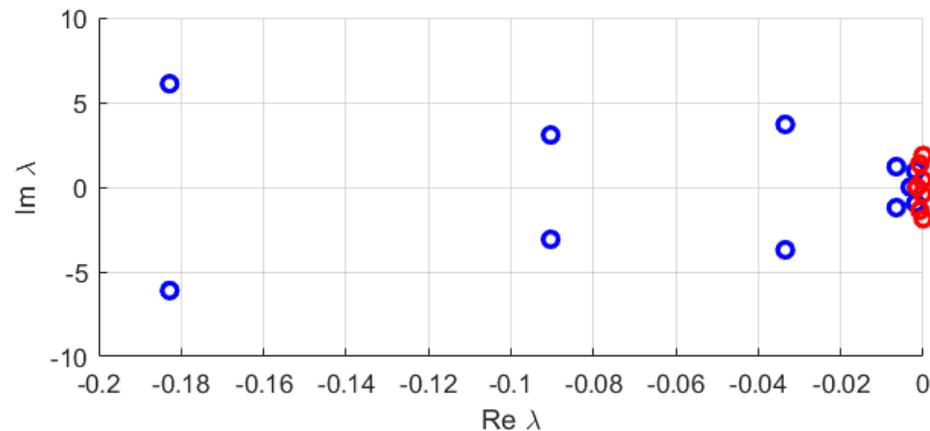
Амплитуды мод антенны



Управление

Анализ устойчивости

	ЛКР, 5-3	Р-ЛКР, 5-3	ЛКР, 3-2	Р-ЛКР, 3-2
степень устойчивости	1.9007e-05	2.7922e-07	9.9407e-07	2.7922e-07
степень устойчивости по «модам углового движения»	3.5925e-04	2.6585e-04	3.5925e-04	2.6585e-04



Выводы

	ЛКР	Редуцированный ЛКР
Стабилизация	+	+
Информация о модах	+	+
Информация об амплитудах	+	-
Вычислительная сложность	высокая	низкая