XLIV АКАДЕМИЧЕСКИЕ ЧТЕНИЯ
ПО КОСМОНАВТИКЕ
29 января 2020

Прикладная небесная механика и управление движением

Определение сложного гравитационного поля с помощью группировки малых спутников

[1,2]М.Ю. Воронина, [1]М.Г. Широбоков

[1]Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша
[2]Московский физико-технический институт

Москва

Содержание

Цель работы

Исследовать точность определения коэффициентов перед гармониками гравитационного поля астероида в зависимости от:

- области видимости материнского аппарата
- ошибок траекторных измерений

Постановка задачи

Рассматривается групповой полет аппаратов вокруг астероида. Примем следующие предположения:

- Известны размер, гравитационный параметр и угловая скорость вращения астероида
- Группа состоит из материнского и дочерних космических аппаратов (КА)
- На аппараты действует только сила гравитационного притяжения астероида
- Управления аппаратами отсутствует
- Материнский аппарат имеет ограничения на дальность детектирования дочерних аппаратов.

В качестве примера выбран астероид Эрос с известными коэффициентами разложения силовой функции *до 4 порядка включительно*[1]*.*

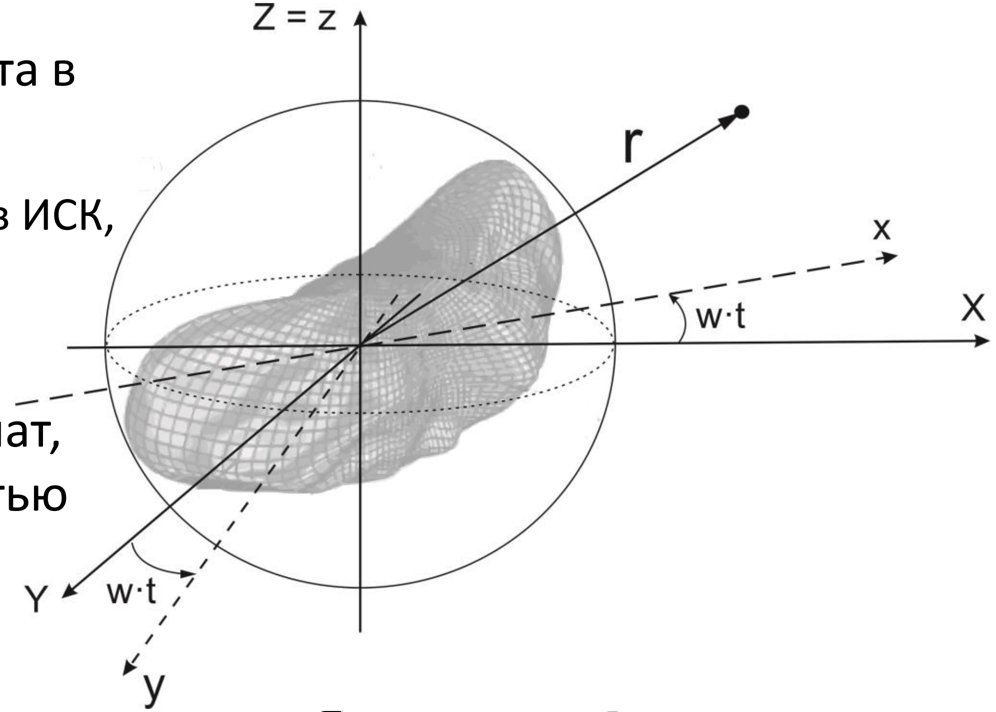
[1]Miller J.K, Konopliv A.S. [et al.] Determination of Shape, Gravity, and Rotational State of Asteroid 433 Eros Icarus. // 2002 № 155, 3–17 P. 16

Движение аппаратов вокруг астероида

Уравнения движения каждого аппарата в группе имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \vec{\nabla} U \end{cases}$$

r – радиус-вектор аппарата в ИСК,
v - скорость аппарата в ИСК



ИСК – инерциальная система координат,
ВСК – вращающаяся с угловой скоростью астероида система координат.

$$U = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n} \bar{\mathrm{P}}_{nm}(\sin\theta)\ \left[\bar{C}_{nm}\cos(m\phi) + \bar{S}_{nm}\sin(m\phi)\right]$$

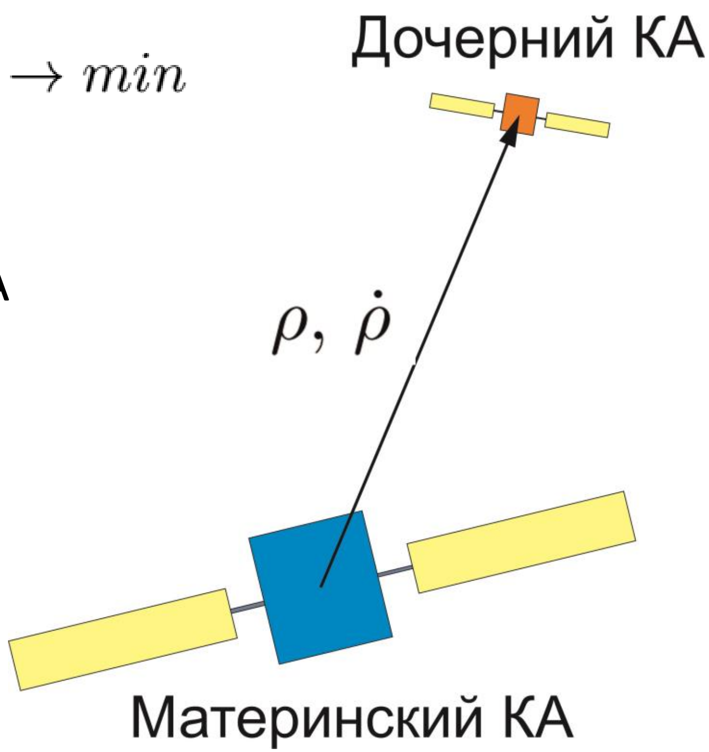
где μ – гравитационный параметр,
R – радиус сферы притягивающего тела,
$\bar{P}_{nm}$ - нормированная присоединенная функция Лежандра,
n, m – степень и порядок полинома,
θ, ϕ – зенитный и азимутальный углы,
$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ - коэффициенты разложения гравитационного поля (определяемые параметры)

Kaula W.M. Theory of Satellite Geodesy. Blaisdell Puplishing Company, Waltham, Massachusetts, Toronto, Republished 2000 by Dover Puplications, P. 121

Задача оптимизации

Коэффициенты $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ определяется с помощью задачи оптимизации:

$$J(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{N_t} \left[\left(\rho_{ij} - \rho_{ij}^{dat} \right)^2 + \left(\dot{\rho}_{ij} - \dot{\rho}_{ij}^{dat} \right)^2 \right] \to min$$



где $\mathbf{p} = [\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}]$ - вектор коэффициентов,

$\rho, \dot{\rho}$ - расстояние и радиальная скорость между КА

k - количество дочерних аппаратов в группе,

N_t **-** количество измерений на орбите.

$$\rho = \sqrt{\left(\mathbf{r}_{chief} - \mathbf{r}_i\right)^T \left(\mathbf{r}_{chief} - \mathbf{r}_i\right)}$$

$$\dot{\rho} = \frac{\left(\dot{\mathbf{r}}_{chief} - \dot{\mathbf{r}}_i\right)^T \left(\mathbf{r}_{chief} - \mathbf{r}_i\right)}{\rho}$$

где $\mathbf{r}_{chief}, \dot{\mathbf{r}}_{chief}$ - радиус-вектор и скорость материнского аппарата,

$\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i$ - радиус-вектор и скорость i-го дочернего аппарата.

Для решения задачи рассмотрим якобиан целевой функции

Якобиан целевой функции

Якобиан имеет вид:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} = 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_t}\left(\rho_{ij} - \rho_{ij}^{dat}\right)\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial \mathbf{p}} + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_t}\left(\dot{\rho}_{ij} - \dot{\rho}_{ij}^{dat}\right)\frac{\partial \dot{\rho}_{ij}}{\partial \mathbf{p}}$$

Производные траекторных измерений для i-го аппарата в <u>заданный момент</u> времени:

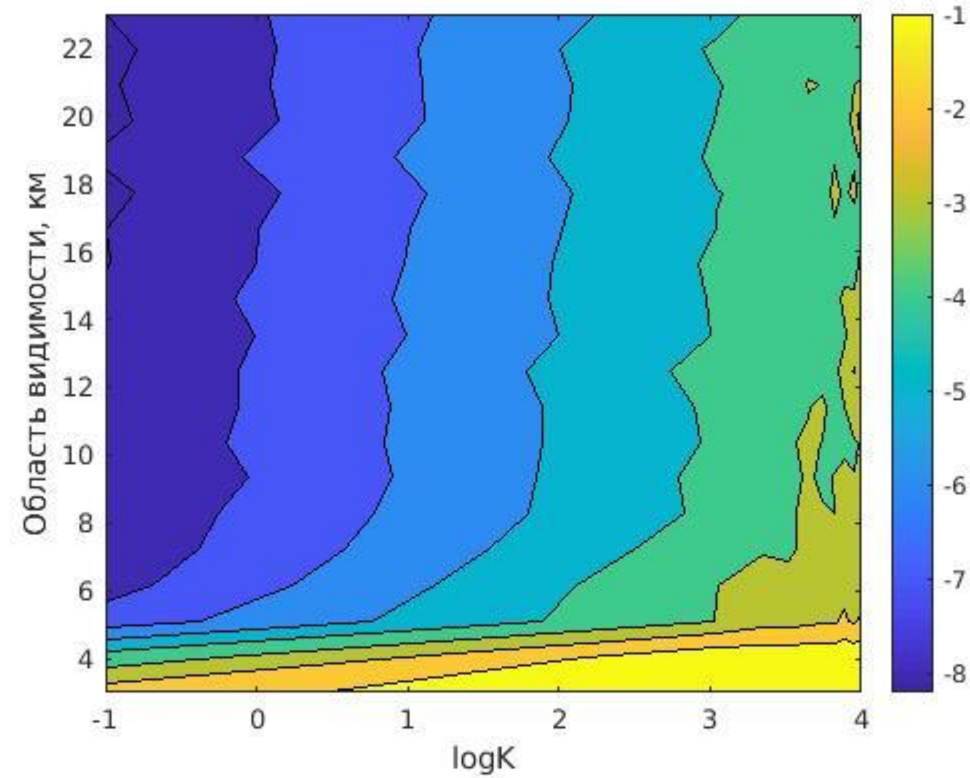
$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\left(\mathbf{r}_{chief} - \mathbf{r}_i\right)^T}{\rho}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{chief}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{p}}\right)$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\left(\dot{\mathbf{r}}_{chief} - \dot{\mathbf{r}}_i\right)^T}{\rho} - \frac{\dot{\rho}\left(\mathbf{r}_{chief} - \mathbf{r}_i\right)^T}{\rho^2}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{chief}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{p}}\right) + \\ + \frac{\left(\mathbf{r}_{chief} - \mathbf{r}_i\right)^T}{\rho}\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{chief}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{p}}\right)$$

Зависимость абсолютной погрешности определения коэффициентов $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ от области видимости и ошибок измерения

$\sigma^2(\rho) = 0.1 \cdot K$ мм $\qquad \delta p_{abs} = 1.5 \cdot 10^{-12}$

$\sigma^2(\dot{\rho}) = 10 \cdot K$ мм/с

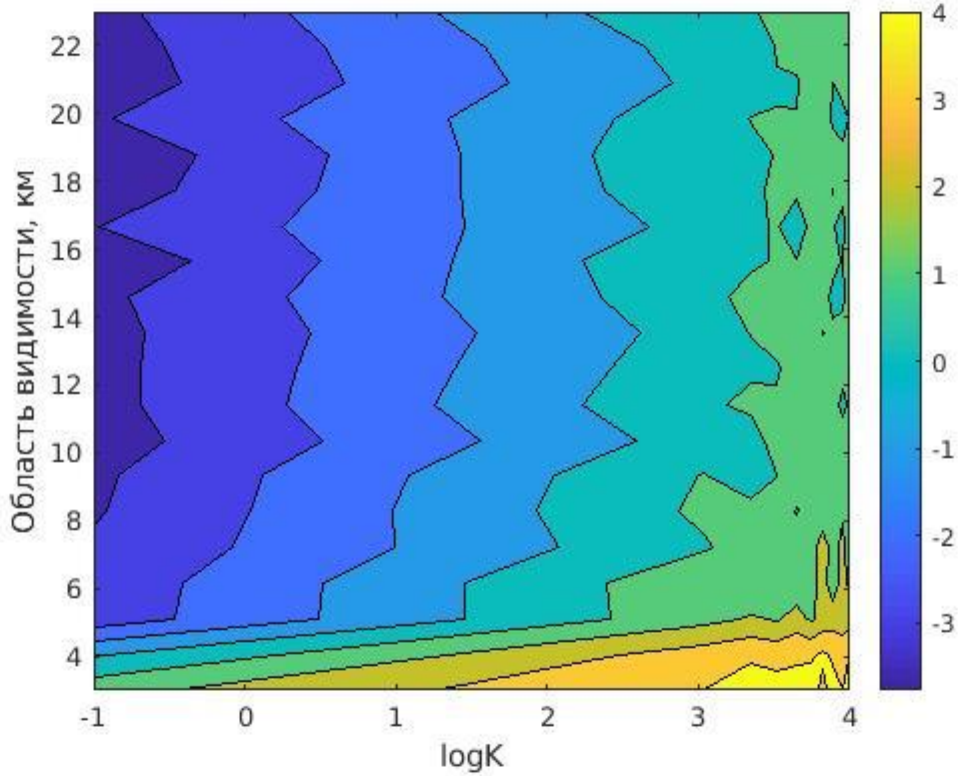


Зависимость относительной погрешности определения коэффициентов $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ от области видимости и ошибок измерения

$\sigma^2(\rho) = 0.1 \cdot K$ мм

$\delta p_{rel} = 2.75 \cdot 10^{-8}$

$\sigma^2(\dot{\rho}) = 10 \cdot K$ мм/с



Заключение

- Минимальное значение абсолютной погрешности коэффициентов $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$: 10^{-12}
- Минимальное значение относительной погрешности коэффициентов $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$: 10^{-}
- Можно найти радиус области видимости и значения ошибок траекторных измерений, при которых коэффициенты перед гармониками будут определяться с желаемой точностью

Спасибо за внимание!