



XLV АКАДЕМИЧЕСКИЕ ЧТЕНИЯ
ПО КОСМОНАВТИКЕ
1 апреля 2021

Прикладная небесная механика и управление движением

Расчет сложного гравитационного поля с помощью
группы малых аппаратов на примере астероидов
Эрос и Итокава

¹М.Ю. Воронина, ¹М.Г. Ширококов

¹Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша

Москва

Содержание

- Цель работы
- Постановка задачи
- Уравнения движения аппаратов
- Задача оптимизации
- Характеристики астероидов Эрос и Итокава
- Результаты расчетов
- Вывод

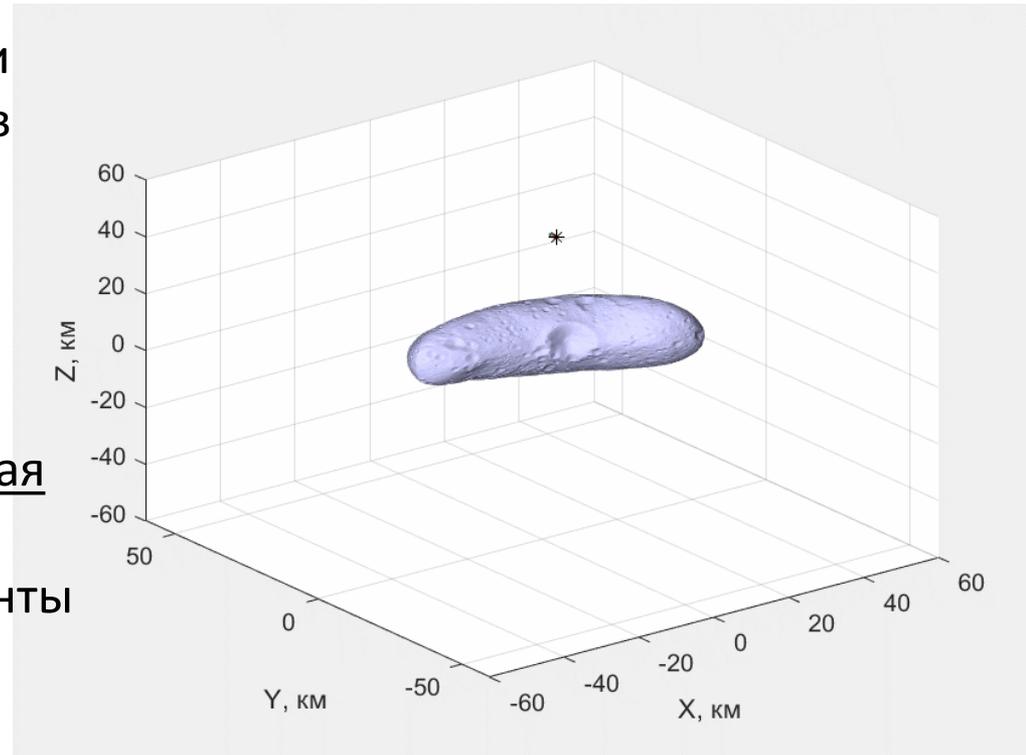
Цель работы

- Рассмотреть метод нахождения параметров гравитационного поля астероида с помощью группы аппаратов,
- Исследовать точность нахождения параметров гравитационного поля астероида в зависимости от:
 - ошибки начального фазового вектора аппарата,
 - ошибок траекторных измерений,
 - числа аппаратов в группе.

Постановка задачи

Рассматривается групповой полет аппаратов вокруг астероида. Примем следующие предположения:

- Группа состоит из материнского и дочерних космических аппаратов (КА),
- Управления аппаратами не рассматривается,
- Траекторными измерениями являются расстояние и радиальная скорость между материнским и дочерними КА в заданные моменты времени,
- Известны угловая скорость вращения астероида и радиус аппроксимирующей сферы.



Движение группы аппаратов вокруг астероида Эрос. Орбита $R=40$ км, $i=85^\circ$

Задача состоит в определении гравитационного параметра и коэффициентов Стокса в модели сферических гармоник гравитационного поля астероида с помощью траекторных измерений.

Задача оптимизации

$$J(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_t} (\rho_{ij}(\mathbf{p}) - \rho_{ij}^{dat})^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_t} (\dot{\rho}_{ij}(\mathbf{p}) - \dot{\rho}_{ij}^{dat})^2$$

где $\mathbf{p} = [C_{nm}; S_{nm}; \mu]$ – вектор коэффициентов,
 k – количество дочерних аппаратов в группе,
 N_t – количество измерений на орбите.

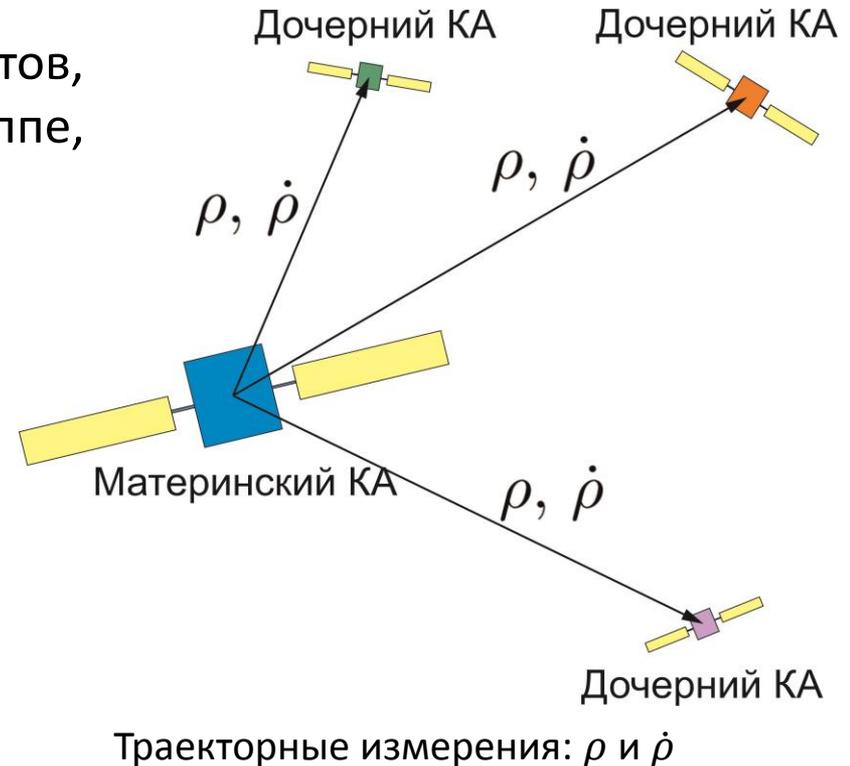
$$J(\mathbf{p}) \rightarrow \min$$

$$\rho_i = \sqrt{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}^{chief})^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}^{chief})}$$

$$\dot{\rho}_i = \frac{1}{\rho_i} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}^{chief})^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}^{chief})$$

$\mathbf{r}^{chief}, \dot{\mathbf{r}}^{chief}$ – радиус-вектор и скорость материнского аппарата,

$\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i$ – радиус-вектор и скорость i -го дочернего аппарата.

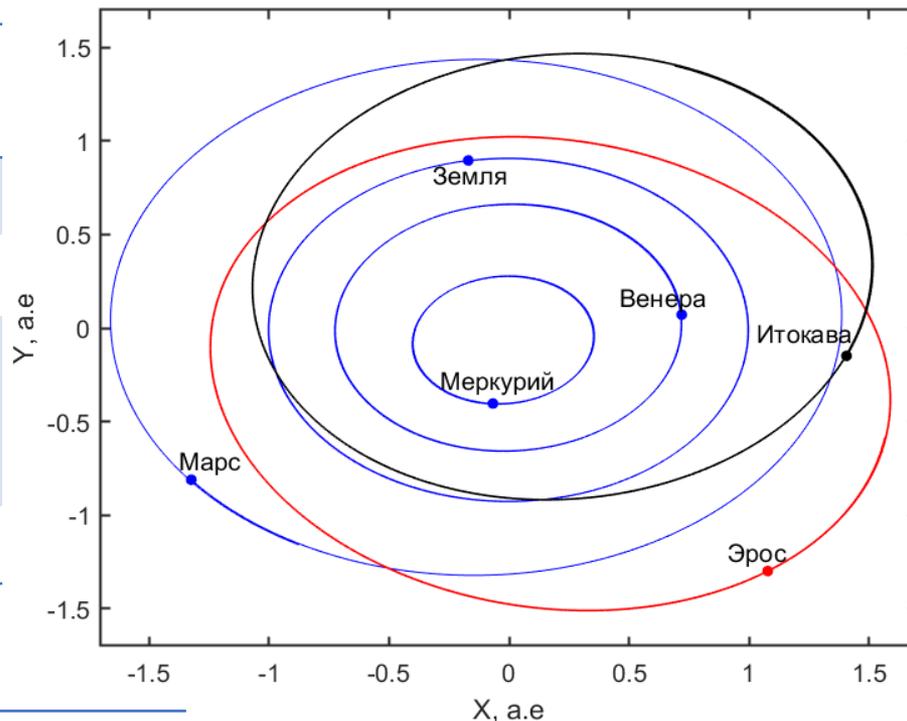


Характеристики астероидов Эрос и Итокава

Физические свойства	Эрос	Итокава
μ , км ³ /с ²	$4.463 \cdot 10^{-4}$	$2.36 \cdot 10^{-9}$
$T_{\text{астер}}$, ч	5.27	12.13
Размер, км	34.4 × 11.2 × 11.2	0.535 × 0.294 × 0.209
R^* , км	16	0.16

Известны коэффициенты Стокса до 4-й степени включительно

Параметры орбит аппаратов	Эрос	Итокава
R, км	50	1.5
i, град	85	85
Время полета, ч	29.2	33
v_{launch} , м/с	0.5	0
w_{rot} , рад/с	0.01	0.01



Орбита астероидов в Международной небесной системе координат

Зависимость относительной погрешности измерения параметра μ от ошибок траекторных измерений и начального фазового вектора материнского КА

Ошибки имеют вид $N(0, \sigma^2)$

$$\sigma(\rho) = 3 \cdot 10^{-3} \cdot K_1 \text{ км}$$

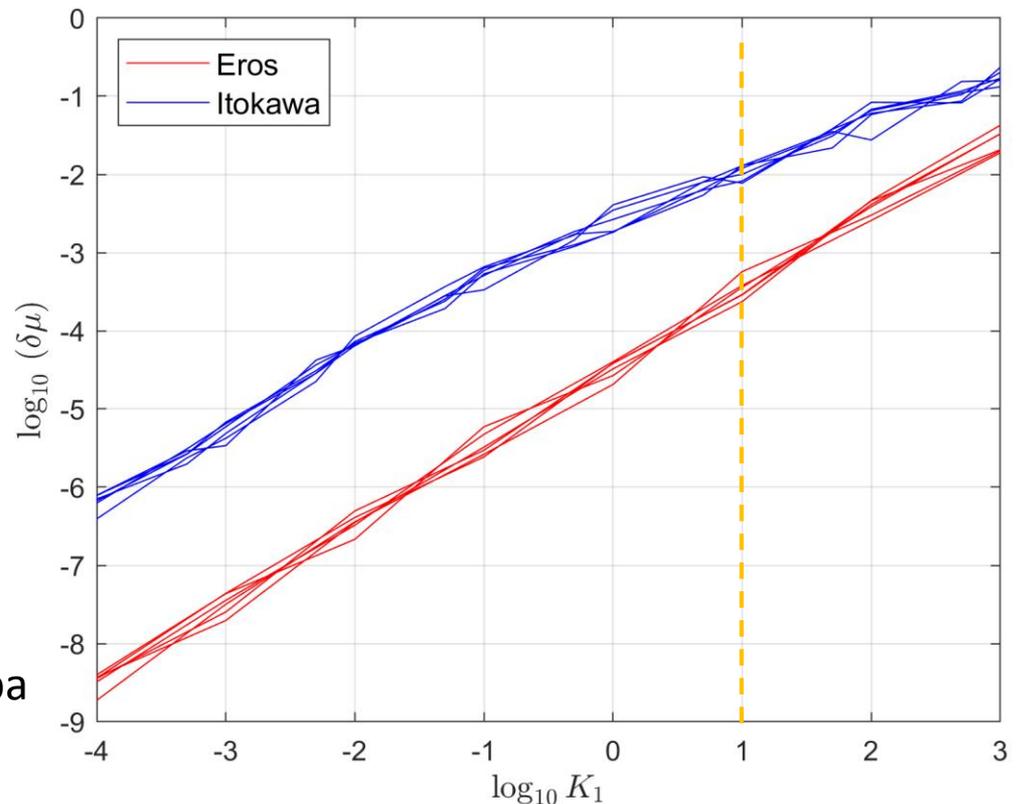
$$\sigma(\dot{\rho}) = 0.05 \cdot K_1 \text{ мм/с}$$

$$\sigma(r_{chief,0}) = 0.1 \cdot K_2 \text{ км}$$

$$\sigma(v_{chief,0}) = 0.1 \cdot K_2 \text{ мм/с}$$

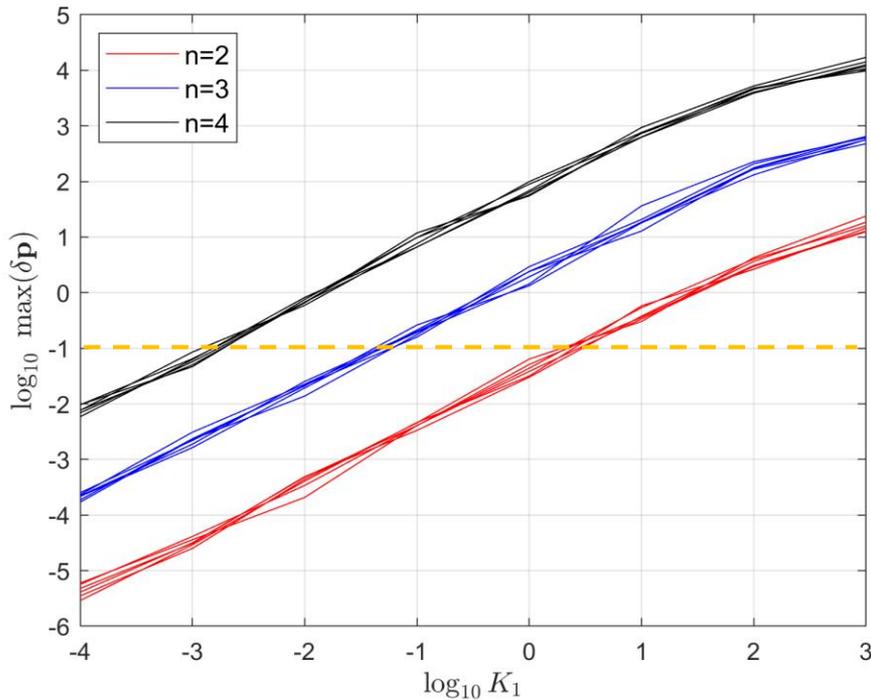
$\delta\mu$ – относительная погрешность расчета гравитационного параметра

$$\delta\mu = \frac{|\mu_{opt} - \mu_{true}|}{\mu_{true}}$$

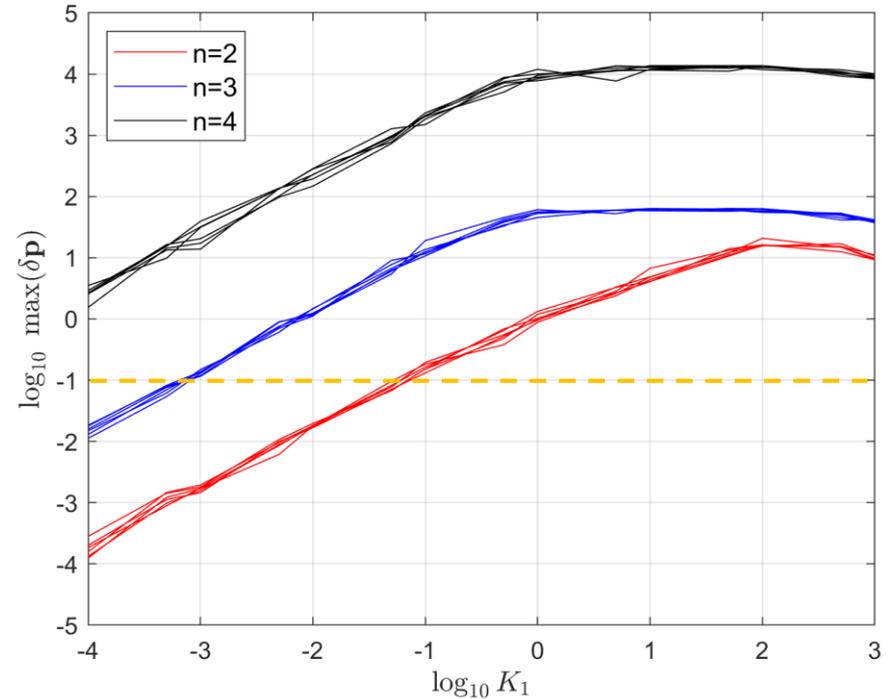


Число дочерних аппаратов: 5

Зависимость относительной погрешности измерения параметров C_{nm} и S_{nm} от ошибок траекторных измерений и начального фазового вектора материнского КА



Для Эроса



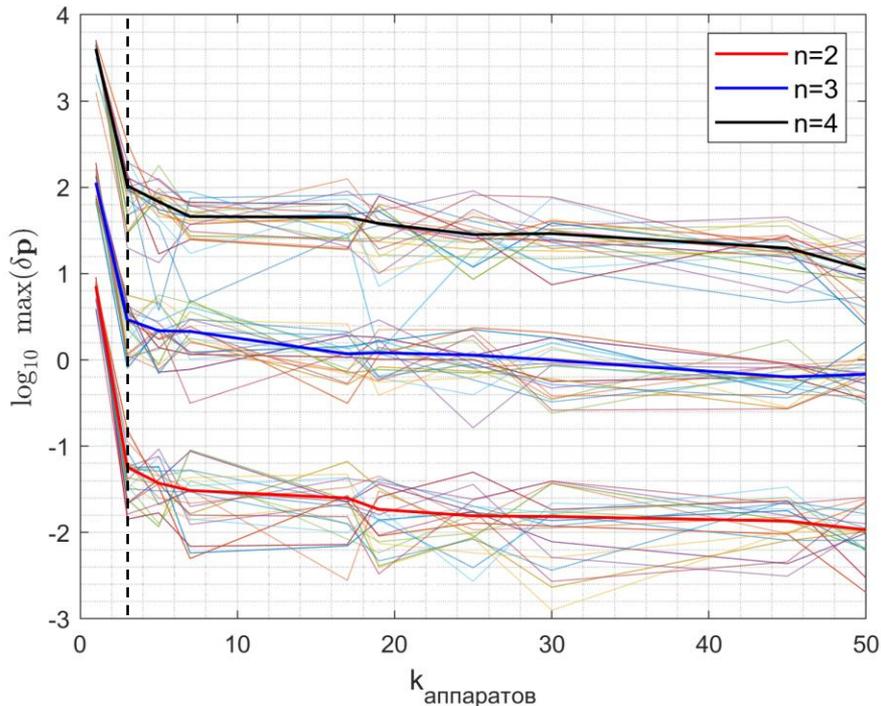
Для Итокавы

δp_j – относительная погрешность расчета j -го коэффициента Стокса

$$\delta p_j = \frac{|p_{opt,j} - p_{true,j}|}{p_{true,j}}$$

Число дочерних аппаратов: 5

Зависимость относительной погрешности измерения параметров C_{nm} , S_{nm} от количества дочерних аппаратов при заданной ошибке траекторных измерений

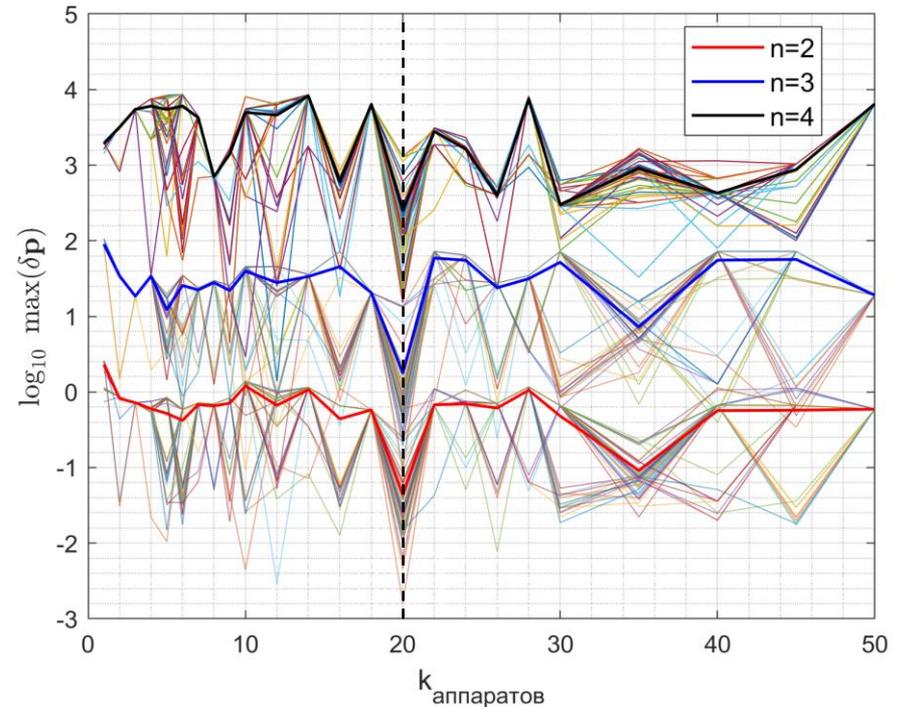


Для Эроса

При: $\sigma(\rho) = 3 \cdot 10^{-3}$ км
 $\sigma(\dot{\rho}) = 0.05$ мм/с

$\sigma(\mathbf{r}_{chief,0}) = 0.1$ км

$\sigma(\mathbf{v}_{chief,0}) = 0.1$ мм/с



Для Итокавы

При: $\sigma(\rho) = 3 \cdot 10^{-6}$ км
 $\sigma(\dot{\rho}) = 5 \cdot 10^{-5}$ мм/с

$\sigma(\mathbf{r}_{chief,0}) = 0.1$ км

$\sigma(\mathbf{v}_{chief,0}) = 0.1$ мм/с

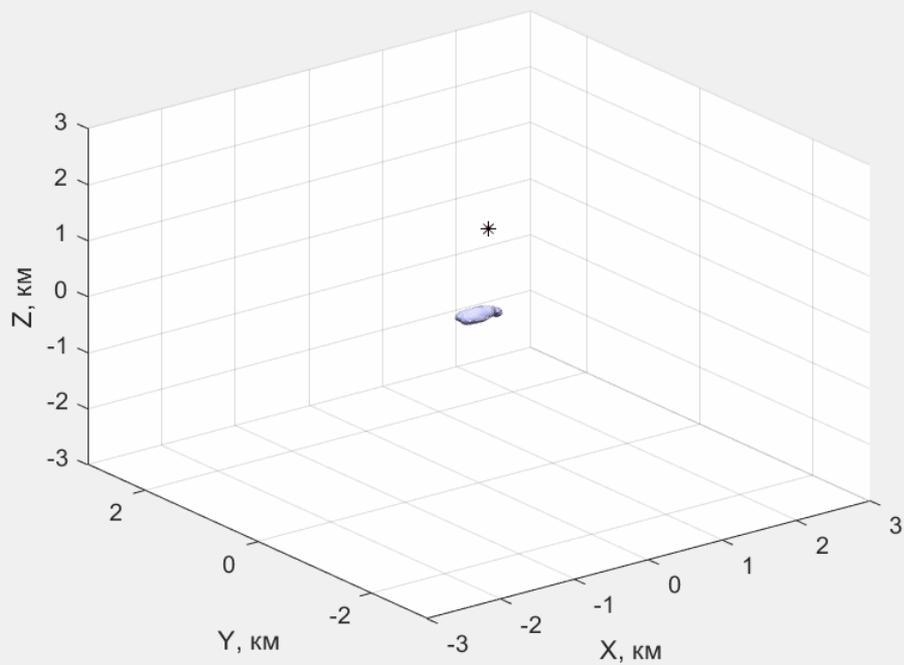
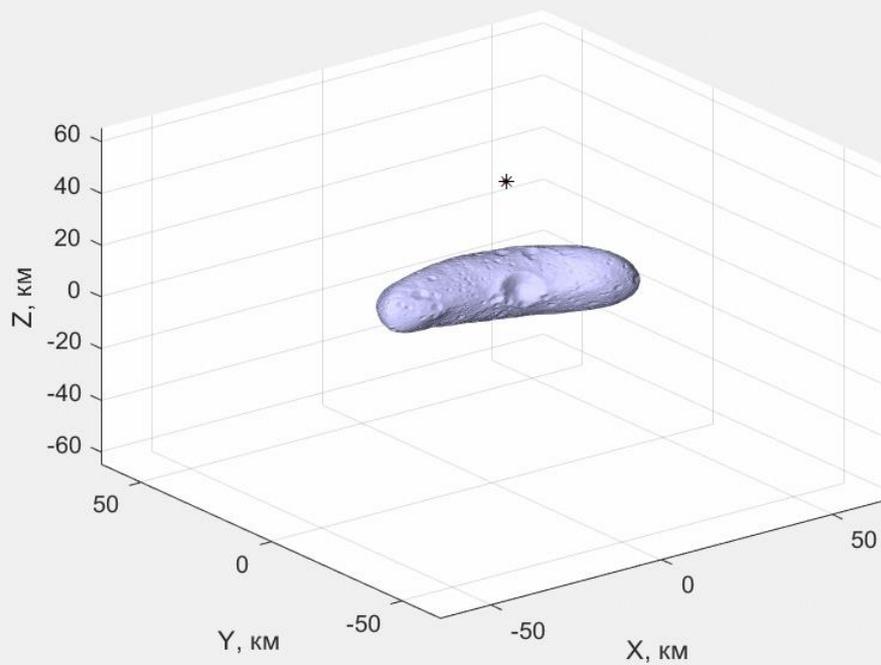
Заключение

- На точность определяемых параметров не влияет ошибка навигации материнского аппарата
- Гравитационный параметр находится точно при:
 - $\sigma(\rho) = 3 \cdot 10^{-2}$ км
 - $\sigma(\dot{\rho}) = 0.5$ мм/с
- Для астероида Эрос коэффициенты Стокса находятся до первой значащей цифры при:
 - $\sigma(\rho) = 3 \cdot 10^{-6}$ км
 - $\sigma(\dot{\rho}) = 5 \cdot 10^{-5}$ мм/с
- Для астероида Итокава коэффициенты Стокса до третьего порядка разложения включительно до первой значащей цифры определяются при:
 - $\sigma(\rho) = 3 \cdot 10^{-6}$ км
 - $\sigma(\dot{\rho}) = 5 \cdot 10^{-5}$ мм/с
- Для группы состоящей из 5 КА для Эроса и 20 КА для Итокавы результаты расчетов улучшаются минимум на порядок
- Для астероида Итокава резкого улучшения расчета параметров гравитационного поля не наблюдается

Спасибо за внимание!

Работа поддержана грантом Российского научного фонда
(проект №19-11-00256)

Орбиты аппаратов



Внешние возмущения

$$a_{SRP} = SM \cdot P_0 \cdot (\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) \left[(\alpha - 1) \mathbf{r}_s - 2\alpha\mu (\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) \mathbf{n} - \alpha(1 - \mu) \left(\mathbf{r}_s + \frac{2}{3} \mathbf{n} \right) \right]$$

\mathbf{r}_s - вектор направления от КА на Солнце,

\mathbf{n} - вектор нормали к поверхности аппарата,

SM - отношения площади к массе КА,

α - коэффициент отражения,

μ - коэффициент зеркального отражения

$$P_0 = \frac{S_0}{c} \left(\frac{AU}{|\mathbf{r}_{sun}|} \right)^2$$

где $S_0 = 1361 \text{ Вт/м}^2$ - солнечная постоянная,

AU - астрономическая единица,

c - скорость света,

$|\mathbf{r}_{sun}|$ - расстояние от КА до Солнца

$$\mathbf{a}_{n-body} = \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{R}_i}{|\mathbf{R}_i|^3} \right)$$

μ_i - гравитационный параметр массивного тела Солнечной системы,

\mathbf{R}_i - радиус-вектор массивного тела Солнечной системы,

Якобиан целевой функции

$$\frac{\partial J(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_t} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{dat}) \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial \mathbf{p}} + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_t} (\dot{\rho}_{ij} - \dot{\rho}_{ij}^{dat}) \frac{\partial \dot{\rho}_{ij}}{\partial \mathbf{p}}$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \mathbf{p}} = \frac{(\mathbf{r}_{chief} - \mathbf{r}_i)^T}{\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{chief}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{p}} \right)$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{(\dot{\mathbf{r}}_{chief} - \dot{\mathbf{r}}_i)^T}{\rho} - \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}_{chief} - \mathbf{r}_i)^T}{\rho^2} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{chief}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{p}} \right) + \frac{(\mathbf{r}_{chief} - \mathbf{r}_i)^T}{\rho} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{chief}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{p}} \right)$$

Уравнения в вариациях:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{p}} \right) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{p}} \right) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{O}_{6 \times s} \end{cases}$$

$$\mathbf{p} = [C_{nm}; S_{nm}; \mu]$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{r}; \mathbf{v}]$$

$$\mathbf{f} = [v; \nabla_{xyz} \mathbf{U} + \mathbf{a}_{n-body} + \mathbf{a}_{SRP}]$$

$$s = \text{length}(\mathbf{p})$$

Астероид Эрос

с 1 января 2020 года по 1 февраля
2020 года

Задача оптимизации решается со
следующими условиями:

- Начальное приближение коэффициентов Стокса:

$$[C_{nm}; S_{nm}]_0 = \mathbf{O}_p$$

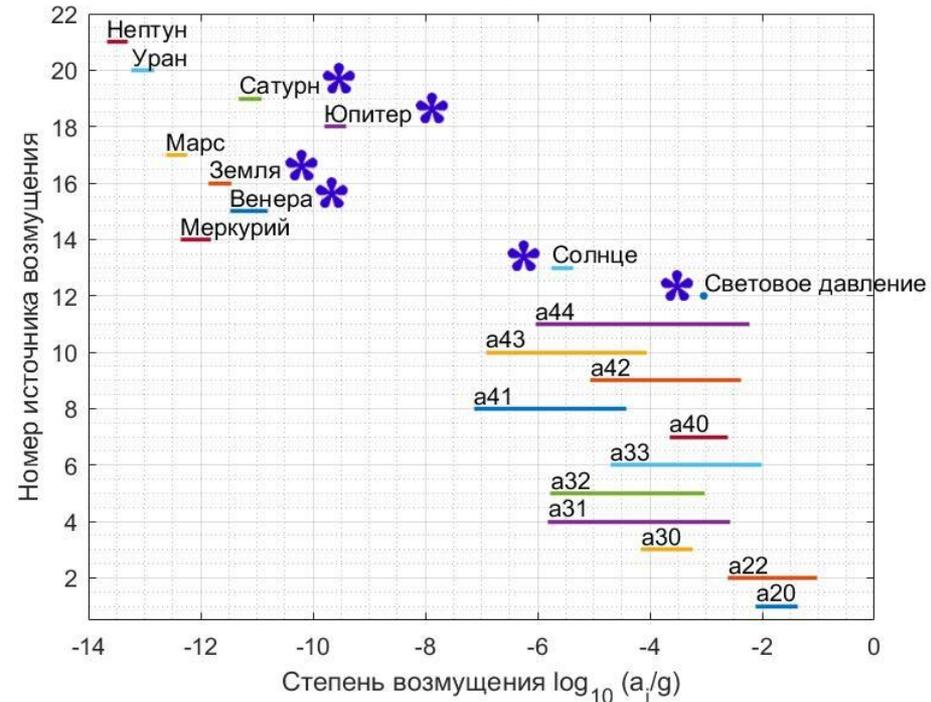
- Начальное приближение гравитационного параметра:

$$\mu_0 = 0.3\mu \div 1.4\mu$$

- Граничные условия:

$$-0.5 \leq C_{nm} \text{ и } S_{nm} \leq 0.5$$

$$10^{-4} \leq \mu \leq 10^{-5}$$



Степени возмущений относительно величины центрального гравитационного поля астероида Эрос на 50 км орбите с отношением площади к массе КА равным 0.1

Астероид Итокава

с 1 января 2020 года по 1 февраля
2020 года

Задача оптимизации решается с
следующими условиями:

- Начальное приближение коэффициентов Стокса:

$$[C_{nm}; S_{nm}]_0 = \mathbf{0}_p$$

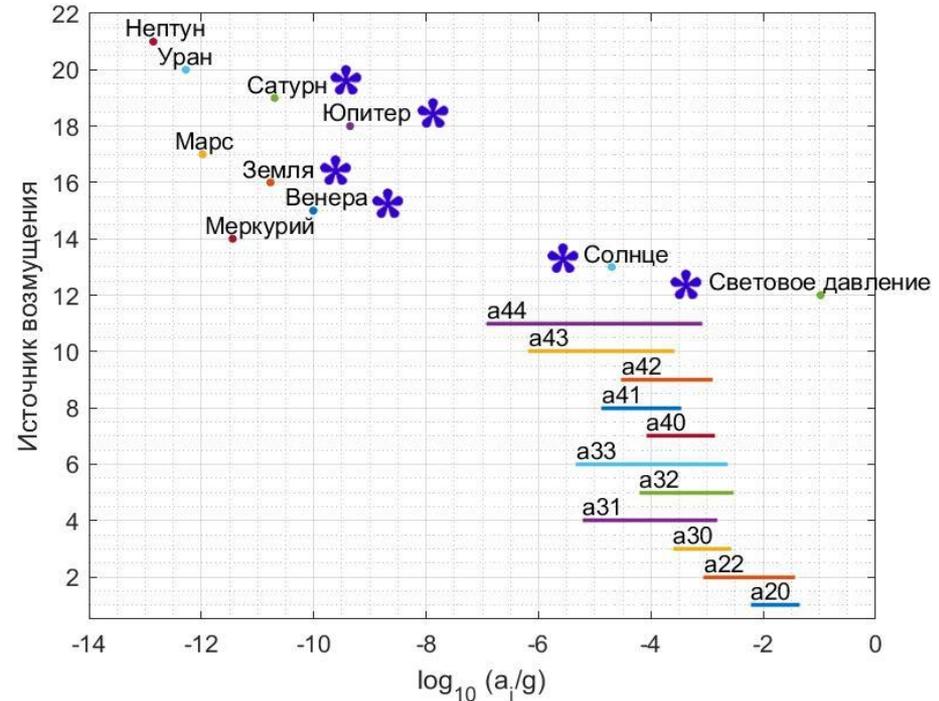
- Начальное приближение гравитационного параметра:

$$\mu_0 = 0.1\mu \div 2\mu$$

- Граничные условия:

$$-0.5 \leq C_{nm} \text{ и } S_{nm} \leq 0.5$$

$$10^{-9} \leq \mu \leq 10^{-10}$$



Степени возмущений относительно величины центрального гравитационного поля астероида Итокава на 1.5 км орбите с отношением площади к массе КА равным 0.05

Коэффициенты Стокса для Эроса

$$\begin{array}{l} C_{10} = 0, \quad C_{11} = 0, \\ S_{11} = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C_{20} = -0.117344, \quad C_{21} = 0, \quad C_{22} = 0.053278, \\ S_{21} = 0, \quad S_{22} = -0.017909, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C_{30} = -0.003704, \quad C_{31} = 0.004379, \quad C_{32} = 6.120845 \cdot 10^{-4}, \quad C_{33} = -0.001441, \\ S_{31} = 0.003649, \quad S_{32} = -2.343136 \cdot 10^{-4}, \quad S_{33} = -0.001692, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C_{40} = 0.0387003, \quad C_{41} = -1.005604 \cdot 10^{-4}, \quad C_{42} = -0.003912, \\ S_{41} = 1.290209 \cdot 10^{-4}, \quad S_{42} = 0.001015, \\ C_{43} = -1.906389 \cdot 10^{-5}, \quad C_{44} = 3.715931 \cdot 10^{-4}, \\ S_{43} = -8.426361 \cdot 10^{-6}, \quad S_{44} = -1.888708 \cdot 10^{-4}. \end{array}$$

Коэффициенты Стокса для Итокавы

$$\begin{array}{l} C_{10} = 0, \quad C_{11} = 0, \\ S_{11} = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C_{20} = -0.324712, \quad C_{21} = 0, \quad C_{22} = 0.141635, \\ S_{21} = 0, \quad S_{22} = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C_{30} = 0.095551, \quad C_{31} = -0.0303935, \quad C_{32} = -0.016017, \quad C_{33} = 0.0096246, \\ S_{31} = -0.006628, \quad S_{32} = -0.016017, \quad S_{33} = 0.004737, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C_{40} = 0.263556, \quad C_{41} = 0.032320, \quad C_{42} = -0.027562, \quad C_{43} = -0.001833, \\ S_{41} = 0.004620, \quad S_{42} = 0.0000219, \quad S_{43} = -0.0008979, \\ C_{44} = 0.003175, \\ S_{44} = 0.0002456. \end{array}$$

KickSat

